This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

UNIVERSITEITSBIBLIOTHEEK GENT
90000006

Math. 220.

Math 220

TRAITÉ
ANALYTIQUE
DES
SECTIONS CONIQUES
ET DE LEUR USAGE
POUR LA RESOLUTION DES EQUATIONS
dans les Problêmes tant déterminez qu'indéterminez.

OUVRAGE POSTHUME

De M. LE MARQUIS DE L'HOSPITAL, *Academicien Honoraire de l'Academie Royale des Sciences.*

A PARIS,
Chez MONTALANT, Quay des Auguſtins, à la deſcente du Pont ſaint Michel.

M. DCCXX.
AVEC PRIVILEGE DU ROY.

AVERTISSEMENT
DU LIBRAIRE.

L'Illuſtre & ſçavant Auteur de cet Ouvrage étoit ſur le point de le donner au Public, lorſqu'il mourut en 1704. âgé de quarante-trois ans: Le Manuſcrit en étoit ſans Preface, que ce ſeul Auteur pouvoit bien faire : c'eſt pour cela qu'il ne s'en trouve point ici. Mais le titre doit ſuffire aux Connoiſſeurs, pour juger de quelle conſequence eſt en Géometrie la Matiere de ce Livre. La grande réputation de M. le Marquis de l'Hôpital en ce genre d'Etude, répond autant, ce me ſemble, de l'habileté avec laquelle cette matiere eſt traitée, que du ſuccés qu'on doit attendre de l'Ouvrage. C'eſt ce qui m'a déterminé à l'imprimer tel qu'il étoit, ſans autre ſoin que de faire enſorte qu'il le fût le plus correctement qu'il me ſeroit poſſible, en cherchant quelque habile Géometre, qui voulût

bien veiller à l'impreſſion. La conſideration & l'eſtime des Sçavans pour l'Auteur, m'en ont fait heureuſement trouver deux celebres. C'eſt par leurs ſoins que pour répondre à l'empreſſement d'un trés-grand nombre de Mathematiciens pour cet Ouvrage, & ſur tout les jeunes Geometres, qui le regardoient comme devant leur faciliter l'entrée à la ſublime Analyſe des Infiniment petits, *je le publie avec toute la confiance poſſible, quoique denué de la Preface que la maladie de l'un de ces deux Geometres, & les grandes occupations de l'autre, ne leur ont pas permis de faire; & je me perſuade que les Lecteurs contens du fond de l'Ouvrage, ne le ſeront pas moins de ſon execution, tant pour la beauté du papier & du caractere, que pour l'exactitude.*

TABLE.

LIVRE PREMIER.

De la Parabole. page 1

LIVRE SECOND.

De l'Ellipſe. 19

LIVRE TROISIE'ME.

De l'Hyperbole. 47

LIVRE QUATRIE'ME.

Des trois Sections Coniques. 87

LIVRE CINQUIE'ME.

De la Comparaiſon des Sections Coniques entr'elles, & de leurs Segmens. 122

LIVRE SIXIE'ME.

Des Sections Coniques conſiderées dans le Solide. 166

LIVRE SEPTIE'ME.

Des Lieux Geometriques. 206

LIVRE HUITIE'ME.

Des Problémes indéterminés. 249

LIVRE NEUVIEME.

De la conſtruction des Egalités. 291

LIVRE DIXIE'ME.

Des Problêmes déterminés. 362

FIN.

TRAITE'

TRAITÉ ANALYTIQUE
DES SECTIONS CONIQUES,

Et de leur uſage pour la Reſolution des Equations dans les Problêmes tant déterminés qu'indéterminés.

LIVRE PREMIER.

De la Parabole.

DEFINITIONS.

I.

YANT placé ſur un plan une Regle *BC*, & une E'querre *GDO*, en ſorte que l'un de ſes côtés *DG* ſoit couché le long de cette regle, on prendra un fil *FMO* égal en longueur à l'autre côté *DO* de cette équerre, duquel l'on attachera un bout à l'extremité *O* de ce côté *DO*, & l'autre bout en un point quelconque *F* pris ſur ce plan du même côté de l'équerre par rapport à la regle. Maintenant FIG. I.

ſi l'on fait gliſſer le côté DG de l'équerre le long de la regle BC, & qu'en même tems l'on ſe ſerve d'un ſtyle M pour tenir toûjours le fil tendu, & ſa partie MO toute jointe & comme collée contre le côté OD de l'équerre; la courbe AMX que le ſtyle M décrit dans ce mouvement, eſt une portion de Parabole.

Si l'on renverſe l'équerre de l'autre côté du point fixe F, on décrira en la même façon l'autre portion AMZ de la même Parabole; de ſorte que la ligne XAZ ne fera qu'une même courbe qu'on appelle *Parabole*.

2.

La ligne BC dans laquelle le bord inferieur de la regle immobile BC touche le plan & le côté DG de l'équerre GDO, eſt appellée *Directrice*.

3.

Le point fixe F du plan, eſt nommé le *Foyer* de la Parabole.

4.

Si l'on mene du point fixe F, ſur la directrice BC une perpendiculaire FE qui rencontre la parabole au point A; la ligne AF indéfiniment prolongée du côté de F, eſt appellée l'*Axe* de la parabole.

5.

La ligne p quadruple de AF, eſt appellée *Parametre* de l'axe.

6.

Toutes les lignes comme MP menées des points de la parabole perpendiculairement à l'axe, ſont appellées *Ordonnées* à l'axe.

7.

Toutes les lignes comme MO menées des points de la parabole parallelement à l'axe, en ſont les *Diametres*.

8.

Une ligne droite qui ne rencontre la parabole qu'en un point, & qui étant continuée de part & d'autre n'entre point dedans, mais tombe au dehors, eſt appellée *Tangente* en ce point.

COROLLAIRE I.

1. IL suit de la définition de la Parabole, que si l'on tire par un de ses points quelconques M au foyer F une ligne droite MF, & sur la directrice BC une perpendiculaire MD; les droites MF, MD, seront toûjours egales entre elles. Car si l'on retranche du côté OD de l'équerre & du fil OMF qui * lui est égal, la partie commune OM, il est visible que les parties restantes MD, MF, seront toûjours égales entre elles. * *Def.* 6.

COROLLAIRE II.

2. DE-LA il est évident, que si l'on mene une ligne droite quelconque KK parallele à la directrice BC, & que d'un point quelconque M de la parabole, on tire sur cette ligne la perpendiculaire MK, & au foyer la droite MF; la difference ou la somme KD des deux droites MF, MK, sera toûjours la même: sçavoir la difference lorsque le point M tombe au dessous de KK, & la somme lorsqu'il tombe au dessus.

COROLLAIRE III.

3. IL est évident que FE est divisée en deux parties égales par la parabole au point A. Car supposant que le point M tombe au point A, la ligne MF tombe sur AF, & la ligne MD sur AE, qui seront par consequent égales entre elles; puisque MF est toûjours * égale à MD, en quelque endroit de la parabole que tombe le point M. * *Art.* 1.

COROLLAIRE IV.

4. DE LA on voit comment on peut décrire une parabole XAZ, l'axe AP dont le point A est l'origine étant donné, avec son parametre p. Car ayant pris sur l'axe AP de part & d'autre du point A les parties AF, AE égales chacune au quart de son parametre p, & mené par le point E la perpendiculaire indéfinie BC sur FE; si l'on couche le bord inferieur d'une regle sur cette ligne

BC qui ſert de directrice, & que par le moyen d'une équerre ODG, & d'un fil FMO égal au côté OD, & attaché par l'un de ſes bouts au foyer F, & par l'autre bout à l'extremité O de ce même côté, l'on décrive une Parabole XAZ comme l'on a enſeigné dans la definition premiere, il eſt viſible qu'elle ſera celle qu'on demande.

Il n'eſt pas moins viſible que plus le côté OD de l'équerre & le fil OMF (qui * lui doit être égal) ſera long, plus auſſi la portion de la parabole qu'on décrira ſera grande ; de ſorte qu'on la peut augmenter autant que l'on voudra, en augmentant également le côté OD de l'équerre & le fil OMF.

* *Def.* 1.

COROLLAIRE V.

5. SI d'un point quelconque M de la Parabole l'on mene une ordonnée MP à l'axe, & au foyer F la droite MF ; il eſt clair que cette ligne $MF = AP + AF$, puiſque $MF = MD = AP + AE$, & que * $AF = AE$.

* *Art.* 3.

PROPOSITION I.

Theorême.

FIG. 1.

6. LE *quarré d'une ordonnée quelconque* MP *à l'axe* AP, *eſt égal au rectangle du parametre* p, *par la partie* AP *de l'axe priſe entre ſon origine* A *& la rencontre* P *de l'ordonnée.*

Il faut prouver que $\overline{MP}^2 = p \times AP$.

Ayant nommé la donnée AF, m ; & les indeterminées AP, x ; PM, y ; on aura $MF = {}^*m + x$, & $PF = x - m$ ou $m - x$, ſelon que le point p ſe trouve au deſſous ou au deſſus du foyer F. Or le triangle rectangle MPF donné en l'un & l'autre cas $\overline{MF}^2$ $(mm + 2mx + xx) = \overline{MP}^2$ $(yy) + \overline{PF}^2$ $(mm - 2mx + xx)$; d'où l'on tire $4mx = yy$. Donc puiſque ſelon la 5e definition $p = 4m$; on aura auſſi $yy = px$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* *Art.* 5.

COROLLAIRE PREMIER ET FONDAMENTAL.

7. IL eſt donc évident que ſi l'on nomme p le parametre de l'axe AP; chacune de ſes parties AP, x; & chacune de ſes ordonnées correſpondantes PM, y; on aura toûjours $yy = px$. Or comme cette propriete convient à tous les points de la parabole, & en détermine la poſition par rapport à ſon axe AP; il s'enſuit que l'equation $yy = px$ exprime parfaitement la nature de la parabole par rapport à ſon axe. FIG. 2.

COROLLAIRE II.

8. SI l'on mene deux ordonnées quelconques MP, NQ à l'axe AP, leurs quarrés ſeront entreux comme les parties AP & AQ de l'axe, priſes entre ſon origine A & les rencontres P & Q de ces mêmes ordonnées. Car* $\overline{PM}^2 . \overline{QN}^2 :: p*AP . p*AQ :: AP . AQ$. FIG. 2. * Art. 6. 7.

COROLLAIRE III.

9 SI l'on mene par un point quelconque P de l'axe AP une parallele MPM à ſes ordonnées, elle rencontrera la parabole en deux points M & M également éloignés de part & d'autre du point P, & non en davantage. Car afin que les points M & M ſoient à la parabole, il faut* que les quarrés de chaque PM (y) priſe de part & d'autre du point P, ſoient égaux chacun au même rectangle px. * Art. 7.

COROLLAIRE IV.

10. IL ſuit de ce que* $yy = px$, que plus AP (x) eſt grande, plus auſſi l'ordonnée PM (y) priſe de part & d'autre de l'axe AP augmente, & cela à l'infini; & qu'au contraire plus AP (x) diminuë, plus auſſi l'ordonnée PM (y) devient petite: de ſorte que AP (x) étant nulle ou zero, chaque PM (y) priſe de part & d'autre de l'axe AP devient auſſi nulle; c'eſt-à-dire que le point P tombant en A, les deux points de rencontre M & M ſe réu- * Art. 7.

niſſent en ce point. D'où il eſt clair.

1°. Que ſi l'on mene par l'origine A de l'axe une ligne LL parallele à ſes ordonnées, elle ſera tangente en A.

2°. Que la Parabole s'éloigne de part & d'autre de plus en plus à l'infini de ſon axe AP à commencer par ſon origine A; & qu'ainſi toute parallele comme LM à l'axe AP, ne rencontre la Parabole qu'en un ſeul point M, & paſſe au dedans, puiſque ſa diſtance de l'axe demeure partout la même.

COROLLAIRE V.

11. SI d'un point quelconque M de la Parabole l'on tire une parallele ML à l'axe AP, laquelle rencontre en L la parallele AL à ſes ordonnées; il eſt clair en menant l'ordonnée MP, que $AL = PM$ (y), & que $ML = AP$ $(x) = \frac{yy}{p}$, puiſque * $px = yy$. D'où il ſuit que les droites $ML\left(\frac{yy}{p}\right)$, $ML\left(\frac{yy}{p}\right)$ priſes de part & d'autre de l'axe AP ſont égales entr'elles, lorſque les points L, L ſont également éloignés du point A; & partant que ſi une ligne quelconque MM terminée par la parabole eſt coupée en deux parties égales par l'axe en P, elle ſera parallele à la ligne LL, c'eſt à dire qu'elle ſera ordonnée de part & d'autre à l'axe. Car ayant mené les paralleles ML, ML à l'axe AP, il eſt évident que LL ſera diviſée par le milieu en A, puiſque MM l'eſt en P. Les droites ML, ML, ſeront donc égales entr'elles comme on vient de le prouver; & par conſequent la ligne MM ſera parallele à LL.

* *Art. 7.*

COROLLAIRE VI.

12. IL ſuit de ce que toutes les perpendiculaires MPM à l'axe AP, terminées de part & d'autre par la parabole, ſont * coupées par le milieu en P; que l'axe diviſe la parabole en deux portions entierement égales & ſemblablement poſées de part & d'autre. Car ſi le plan ſur lequel elle eſt tracée, étoit plié le long de l'axe enſorte

* *Art. 9.*

que les deux parties se joignissent, il est visible que les deux portions de la parabole tomberoient exactement l'une sur l'autre.

PROPOSITION II.

Theorême.

13. SI *l'on mene par l'origine* A *de l'axe* AP *une ligne droite quelconque* AM *dans l'un ou l'autre des angles* PAL, PAL, *faits par l'axe* AP *& par la ligne* L L *parallele à ses ordonnées ; je dis qu'elle ira rencontrer la parabole* MAM *en un autre point* M. FIG. 3.

Ayant pris sur AL de part ou d'autre du point A la partie AG égale au parametre p de l'axe, & tiré GF parallele à l'axe AP, & qui rencontre la ligne AM (prolongée s'il est necessaire) au point F; on prendra sur la ligne AL du même côté où tombe la ligne AM par rapport à l'axe AP, la partie AL égale GF; & ayant tiré LM parallele à l'axe, je dis que le point M où cette ligne rencontre la droite AM, sera à la parabole MAM.

Car menant MP parallele à AL, les triangles semblables FGA, APM, donneront FG ou AL ou $PM.GA :: AP.PM$. Et partant $\overline{PM}^2 = GA\ (p) * AP$. La ligne PM sera donc * une ordonnée à l'axe AP. *Ce qu'il falloit démontrer.* * *Art.* 7.

COROLLAIRE I.

14. DE-LA on voit comment l'axe AP d'une parabole MAM étant donné avec son parametre p, & ayant mené par l'origine A de l'axe dans l'un ou l'autre des angles PAL, PAL, faits par l'axe AP & par la ligne LL parallele à ses ordonnées, une ligne droite quelconque AM; on voit, dis-je, ce qu'il faut faire pour trouver sur cette ligne le point M où elle rencontre la parabole MAM.

COROLLAIRE II.

15. IL eſt évident * qu'il n'y a que la ligne LAL parallele aux ordonnées à l'axe AP, qui puiſſe être tangente de la parabole MAM au point A origine de l'axe; puiſqu'il n'y a que cette ſeule ligne qui paſſant par le point A, & étant continuée de part & d'autre, ne rencontre la parabole en aucun autre point, & n'entre pas dedans.

* *Art.* 10. 13.

DE'FINITIONS.

9.

Fig. 4. & 5. Si l'on mene par un point quelconque M de la parabole un diametre MO, une ordonnée MP à l'axe AP, & une ligne droite MT qui coupe ſur l'axe AP prolongé au delà de ſon origine A, la partie AT égale à AP; toutes les lignes droites, comme NO, menées des points de la parabole parallelement à MT, & terminées par le diametre MO, ſont appellées *Ordonnées* à ce diametre.

10.

Si l'on prend la ligne q troiſiéme proportionnelle à AT, MT; cette ligne q ſera nommée le *Parametre* du diametre MO.

COROLLAIRE I.

16. SI l'on nomme l'indéterminée AP ou AT, x; il eſt clair que $\overline{MT}^2 = qx$, puiſque $AT\,(x).\ MT :: MT.\ q$.

COROLLAIRE II.

17. A Cauſe du triangle rectangle MPT, le quarré $\overline{MT}^2\,(qx) = \overline{PT}^2\,(4xx) + \overline{MP}^2$ * (px); d'où en diviſant par x, l'on tire $q = 4x + p$.

* *Art.* 7.

C'eſt à dire que le parametre q d'un diametre quelconque MO, ſurpaſſe le parametre p de l'axe du quadruple de $AP\,(x)$.

COROLLAIRE III.

18. SI l'on tire du point M au foyer F la droite MF, on aura MF * $= AP + AF$. Or ſelon la définition 5e. le

* *Art.* 5.

le parametre de l'axe étant $p = 4AF$, le parametre du diametre MO ſera * $q = 4AP + 4AF$. Donc le parametre q d'un diametre quelconque MO, vaut quatre fois la ligne MF tirée de ſon origine M au foyer F. * Art. 17.

PROPOSITION III.

Theorême.

19. LE *quarré d'une ordonnée quelconque* ON *au diametre* MO, *eſt égal au rectangle du parametre* q, *par la partie* MO *de ce diametre, priſe entre ſon origine* M *& la rencontre* O *de l'ordonnée.* FIG. 4. 5.

Il faut prouver que $\overline{QN}^2 = q * MO$.

Ayant mené l'ordonnée NQ à l'axe AP, laquelle rencontre le diametre MO au point R, & tiré OH parallele à MP, on nommera les données AP ou AT, x; PM ou RQ, y; & les intérminées OR ou HQ, a; MO ou PH, b; les triangles ſemblables TPM, ORN, donneront cette proportion $TP\ (2x).\ PM\ (y) :: OR\ (a).\ RN = \frac{ay}{2x}$. Cela poſé.

Puiſque (*fig.* 4.) $NQ = RQ\ (y) - RN\ (\frac{ay}{2x})$, ou $RN\ (\frac{ay}{2x}) - RQ\ (y)$, & $AQ = AH\ (x+b) - HQ\ (a)$, lorſque le point N tombe du côté de l'axe AP par rapport au diametre MO; & qu'au contraire (*fig.* 5.) $NQ = RQ\ (y) + RN\ (\frac{ay}{2x})$, & $AQ = AH\ (x+b) + HQ\ (a)$, lorſqu'il tombe du côté oppoſé : on aura $\overline{QN}^2 = yy \pm \frac{ayy}{x} + \frac{aayy}{4xx}$, & $AQ = x + b \pm a$, ſçavoir — dans le premier cas, & + dans le ſecond. Or * $AP\ (x).\ AQ\ (x+b\pm a) :: \overline{PM}^2\ (yy).\ \overline{QN}^2 = yy \pm \frac{byy}{x} \pm \frac{ayy}{x}$. On formera donc en comparant enſemble ces * Art. 8.

deux valeurs de $\overline{QN}^2$, l'égalité $yy + \frac{byy}{x} \pm \frac{ayy}{x} = yy \pm \frac{ayy}{x} + \frac{aayy}{4xx}$; d'où en effaçant de part & d'autre $yy \pm \frac{ay}{x}$, diviſant par yy, & multipliant par $4xx$, l'on tirera $\overline{OR}^2 (aa) = 4bx$. Mais les triangles ſemblables MPT, NRO, donnent $\overline{PT}^2 (4xx) . \overline{OK}^2 (4bx) :: \overline{MT}^2 * (qx) . \overline{ON}^2 = bq = q * MO (b)$. *Ce qu'il falloit, &c.*

* *Art.* 16.

COROLLAIRE GENERAL.

20. IL eſt viſible que ce qu'on a démontré dans la propoſition premiere par rapport à l'axe AP, à ſes ordonnées PM, & à ſon parametre p, s'étend par le moyen de cette derniere propoſition à un diametre quelconque MO, à ſes ordonnees ON, & à ſon parametre q. Or comme les articles 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 & 15 ſe tirent de la premiere propoſition, & ſubſiſtent également, ſoit que les angles APM ſoient droits, ou bien qu'ils ne le ſoient pas; il s'enſuit que ſi l'on imagine dans ces articles que la ligne AP, au lieu d'être l'axe, ſoit un diametre quelconque, qui ait pour ordonnées les droites PM, QN, & pour parametre la ligne p, ils ſeront encore vrais dans cette ſuppoſition; car leur démonſtration demeurera la même, & il ne faut pour s'en convaincre entierement, que les relire en mettant partout où ſe trouve le mot d'axe, celui de diametre.

COROLLAIRE II.

FIG. 4. & 5.

21. COMME les articles 10 & 15 ſubſiſtent avec la même force, lorſque la ligne AP au lieu d'être l'axe, eſt un diametre quelconque, tel que MO; il s'enſuit que la ligne MT parallele aux ordonnées ON à ce diametre, eſt tangente en M, & qu'il n'y a que cette ſeule ligne qui puiſſe toucher la parabole en ce point.

D'où l'on voit que d'un point donné ſur une parabole, on ne peut mener qu'une ſeule tangente.

COROLLAIRE III.

22. DE-LA il eſt évident ſelon la définition 9. que ſi l'on mene par un point quelconque M d'une parabole, une ordonnée MP à l'axe AP, & une ligne droite MT qui coupe ſur l'axe prolongé du côté de ſon origine A, la partie AT egale à AP; cette ligne MT ſera tangente en M. Et reciproquement que ſi la ligne MT eſt tangente en M, & qu'on mene l'ordonnée MP à l'axe; les parties AT, AP, de l'axe ſeront égales entr'elles.

COROLLAIRE IV.

23. SI l'on imagine dans les définitions 9 & 10, & dans la derniere propoſition, que la ligne AP au lieu d'être l'axe, ſoit un diametre quelconque, qui ait pour ordonnées les droites PM, QN; on verra que cette propoſition ſera encore vraye, puiſqu'elle ſe démontrera de la même maniere qu'auparavant, comme il eſt évident par la ſeule inſpection de la fig. 6. où les triangles ſemblables donnent les mêmes proportions que dans le cas de l'axe. FIG. 6.

D'où il ſuit 1°. Que le Corollaire précedent doit encore avoir lieu, lorſque la ligne AP au lieu d'être l'axe, eſt un diametre quelconque. 2°. Que le diametre MO peut être l'axe dans cette ſuppoſition; & qu'ainſi on peut regarder l'axe comme un diametre qui fait avec ſes ordonnées des angles droits.

PROPOSITION IV.

Theorême.

24. SI *par un point quelconque* M *d'une parabole, l'on mene une ordonnée* MP *à l'axe, & une perpendiculaire* MG *à la tagente* MT *qui paſſe par le point* M; *je dis que la partie* PG *de l'axe ſera toûjours égale à la moitié de ſon parametre* p. FIG. 7.

Il faut prouver que $PG = \frac{1}{2}p$.

Car à cauſe des angles droits TPM, TMG, on aura $TP\ (2x).\ PM\ (y) :: PM\ (y).\ PG = \frac{yy}{2x} = \frac{1}{2}p$, en mettant à la place de yy ſa valeur * px.

* *Art.* 7.

PROPOSITION V.

Theorême.

FIG. 7. 25. *Si par un point quelconque* M *d'une parabole, l'on mene au foyer* F *la droite* MF, *un diametre* MO, *& une tangente* TMS; *les angles* FMT, OMS, *faits par la tangente* TMS *d'un côté avec la droite* MF, *& de l'autre avec le diametre* MO, *ſeront égaux entr'eux.*

Car menant l'axe AP qui rencontre en T la tangente TMS, & l'ordonnée MP à l'axe; on aura * $TA = AP$ ou $TF = AP + AF$ ou * MF. Le triangle TFM ſera donc iſoſcelle; & par conſequent l'angle FTM, ou ſont égal OMS, ſera égal à l'angle FMT. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* *Art.* 22.
* *Art.* 5.

COROLLAIRE.

26. DE-LA il eſt clair que la tangente TMS prolongée indefiniment de part & d'autre du point touchant M, laiſſe la parabole toute entiere du côté de ſon foyer F. Et comme cela arrive toûjours en quelque endroit de la parabole que tombe le point touchant M, il s'enſuit que cette ligne courbe eſt concave dans toute ſon étenduë autour de ſon foyer F.

PROPOSITION VI.

Problême.

FIG. 8. & 9. 27. *Un diametre* AP *avec la tangente* LAL *qui paſſe par ſon origine* A, *& ſon parametre étant donnés; trouver un diametre* BQ *qui faſſe de part ou d'autre avec ſes ordonnées, un angle égal à l'angle donné* K, *ſon origine* B, *& ſon parametre.*

Ayant mené par l'origine A du diametre donné la ligne AE qui faſſe avec ce diametre de part ou d'autre, l'angle PAE égal à l'angle donné K, & trouvé * ſur cette ligne (prolongée de l'autre côté de A lorſqu'elle ne tombe point dans l'un ou l'autre des angles PAL, PAL) le point M où elle rencontre la parabole, on menera par le point du milieu Q de la ligne AM, une parallele QD au diametre AP, qui rencontre la tangente AL au point D; & on diviſera QD par le milieu en B. Je dis que la ligne BQ eſt le diametre qu'on cherche, qu'il a pour origine le point B, & pour parametre une troiſiéme proportionnelle à BQ, & QA. * Art. 14. & 20.

Car 1°. La ligne AM étant diviſée en deux parties égales au point Q par le diametre BQ, elle ſera ordonnée * de part & d'autre à ce diametre; & comme les lignes BQ, AP ſont paralleles entr'elles, l'angle BQA que fait le diametre BQ avec ſon ordonnée QA ſera égal à l'angle PAM égal à l'angle donné K ou ſon complement à deux droits. 2°. Le point du milieu B de la ligne QD ſera l'origine * de ce diametre, puiſque AQ en eſt une ordonnée. 3°. Le parametre du diametre BQ eſt * la troiſiéme proportionnelle à BQ, QA. * Art. 11. & 20. * Art. 22. & 23. * Art. 19.

Lorſque l'angle donnné K n'eſt pas droit, il eſt clair qu'on peut mener de part & d'autre du diametre AP deux differentes lignes AE qui faſſent avec ce diametre des angles égaux à l'angle donné K; & qu'ainſi on pourra toûjours avoir deux ſolutions differentes, en obſervant que ſi l'une des deux lignes AE tomboit ſur la tangente AL, le diametre donné AP ſatisferoit lui-même à la queſtion. Mais lorſque cet angle K eſt droit, comme l'on ne peut mener qu'une ſeule ligne AE qui faſſe avec le diametre AP un angle droit, il s'enſuit qu'on ne peut avoir alors qu'une ſolution; & qu'ainſi * le diametre cherché ſera l'axe. FIG. 8. FIG. 9. * Art. 23.

Il eſt à remarquer que les deux diametres BQ, BQ, qui ſatisfont au Problême lorſque l'angle donné K n'eſt pas droit, ſont ſemblablement poſés de part & d'autre FIG. 10.

de l'axe AP, & que leurs parametres ſont égaux : ce qui ſe voit par la conſtruction même, en ſuppoſant que le diametre donné AP ſoit l'axe, & en menant deux differentes lignes AE, AE de part & d'autre. Car les triangles rectangles ALM, ALM, & ADQ, ADQ étant viſiblement égaux & ſemblables entr'eux, les lignes AD, AD; DQ, DQ; leurs moitiés BQ, BQ; & les ordonnées QA, QA ſeront égales entr'elles; * & par conſequent les parametres le ſeront auſſi.

* *Art.* 19.

COROLLAIRE.

28. IL eſt donc évident, 1°. qu'il n'y a qu'un ſeul diametre qui faſſe avec ſes ordonnées des angles droits; & qu'ainſi il ne peut y avoir qu'un ſeul axe. 2°. Qu'on peut toûjours trouver deux differens diametres, qui faſſent avec leurs ordonnées des angles égaux à un angle donné, lorſque cet angle n'eſt pas droit; que ces deux diametres ſeront ſemblablement poſés de part & d'autre de l'axe, & qu'ils auront des parametres égaux.

PROPOSITION VII.

Problême.

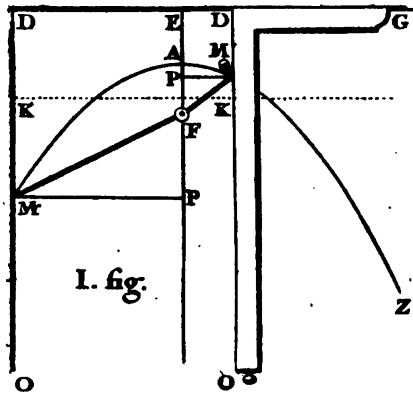
29. UN *diametre étant donné avec la tangente qui paſſe par ſon origine, & ſon parametre; décrire la parabole par un mouvement continu.*

PREMIERE MANIERE.

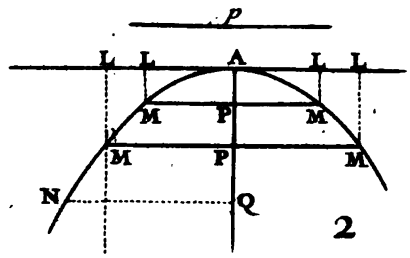
Si le diametre donné étoit l'axe, on la décriroit ſelon l'article 4e; mais lorſqu'il ne l'eſt pas, ſoit MO le diametre donné, & TMS la tangente qui paſſe par ſon origine M. Cela poſé.

FIG. 11.

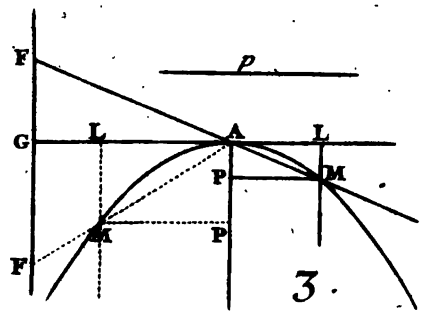
On prendra ſur le diametre MO prolongé au delà de ſon origine M, la partie MD égale au quart de ſon parametre; & on tirera une perpendiculaire indéfinie DE à MD. On menera MF qui faſſe avec la tangente TMS un angle FMT égal à l'angle OMS; & ayant pris MF égale à MD, on décrira ſelon la définition


C
D
E
D
G
A
M
P
K
K
F
M
P
O
O
Z

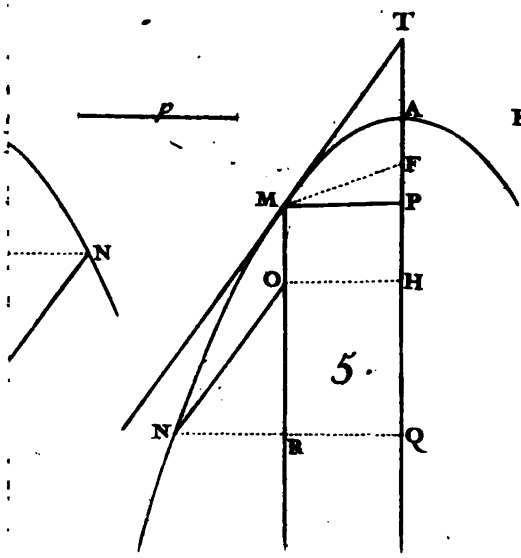
I. fig.


p
L
L
A
L
L
M
P
M
M
P
M
N
Q

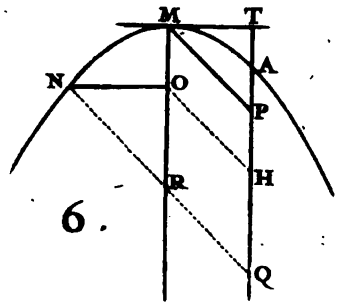
2


F
p
G
L
A
L
P
M
M
P
F

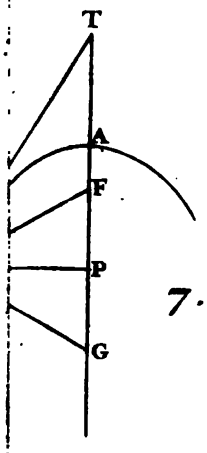
3.


p
N
T
A
F
M
P
O
H
N
R
Q

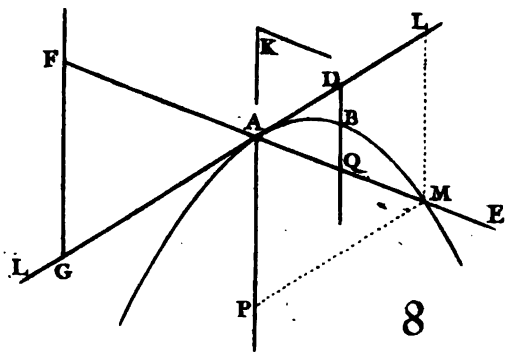
5.


M
T
N
O
A
P
H
R
Q

6.


T
A
F
P
G

7.


L
F
K
D
A
B
Q
M
E
L
G
P

8

premiere, une parabole qui ait pour directrice la ligne DE, & pour foyer le point F. Je dis qu'elle ſera celle qu'on demande.

Car, 1°. La ligne MO étant perpendiculaire à la directrice DE, ſera parallele à l'axe; & par conſequent un diametre ſelon la definition 7e. 2°. La ligne TMS ſera * tangente en M. 3°. Le parametre du diametre MO ſera * quadruple de MF. * *Art.* 25. * *Art.* 18.

SECONDE MANIE'RE.

Soit AP le diametre donné, & LAL la tangente qui paſſe par ſon origine A. Cela poſé. FIG. 12.

Ayant pris ſur le diametre AP prolongé au delà de ſon origine A la partie AG egale à ſon parametre, & mené une droite indefinie DGD qui faſſe avec AG l'angle AGD égal à l'angle GAL pris du même côté; on fera mouvoir une ligne droite indéfinie DM le long de GD toûjours parallelement à AG, en entraînant par ſon extrêmité D le côté DA de l'angle DAM égal à l'angle GAL, & mobile par ſon ſommet autour du point fixe A. Je dis que l'interſection continuelle M de la ligne DM & du côté AM, décrira dans ce mouvement la parabole qu'on demande.

Car menant MP parallele à AL, les lignes MP, GD ſeront égales entr'elles, puiſque l'angle APM ou GAL étant égal à l'angle AGD, elles ſeront également inclinées entre les paralleles GP, DM. Or les triangles AGD, MPA ſont ſemblables: car l'angle MPA ou GAL eſt égal à l'angle AGD; & l'angle PMA ou MAL égal à l'angle GAD, puiſque retranchant des angles égaux GAL, DAM, le même angle DAL, les reſtes doivent être égaux. On aura donc $AG.GD$ ou $PM :: PM.AP$, & partant $GA * AP = \overline{PM}$; d'où il clair que PM eſt une ordonnée au diametre AP qui a pour origine le point A, pour tangente la ligne LAL, & pour parametre la ligne AG. *Ce qu'il fallait, &c.* * *Art.* 19. & 21.

Si le diametre AP étoit l'axe, alors les lignes GD, FIG. 13.

AL, seroient paralleles, & la démonstration devient droit plus facile ; car l'on voit tout d'un coup que GD est égale à PM, & que les triangles rectangles AGD, MPA sont semblables ; d'où il suit $AG.GD$ ou $PM :: PM.AP$. Donc $AG * AP = \overline{PM}^2$, &c.

PROPOSITION VIII.

Problême.

30. UN *diametre* AP *étant donné avec son parametre, & la tangente* AL *qui passe par l'origine* A *de ce diametre ; trouver autant de differens points que l'on voudra de la parabole, ou (ce qui est la même chose) la décrire par plusieurs points.*

PREMIERE MANIE'RE.

FIG. 14. Ayant pris sur le diametre AP prolongé au delà de son origine A, la partie AG égale à son parametre, divisé AG en deux parties égales au point D, & mené une ligne droite indéfinie AF perpendiculaire à AG ; on décrira d'un point C pris partout où l'on voudra sur DA prolongée indéfiniment du côté de A, comme centre, & du rayon CG, un arc de cercle PF qui coupera le diametre AP & sa perpendiculaire AF en deux points P, F. On menera par le point P une parallele MPM à la tangente AL, sur laquelle on prendra de part & d'autre les parties PM, PM, égales chacune à AF. On trouvera de la même maniere autant de couple de points M que l'on voudra ; par lesquels on fera passer une ligne courbe MAM qui sera la parabole qu'on demande.

Car tous les arcs PF passant par le même point G, & ayant leurs centres sur la ligne GA prolongée, s'il est necessaire du côté de A, auront pour diametres les lignes GP ; & par conséquent la proprieté de ces cercles donnera toûjours $\overline{AF}^2 = GA * AP$. Mais chaque PM est * égale à sa correspondante AF, & de plus parallele

* *Hyp.*

à

à la tangente AL qui passe par l'origine A du diametre AP ; elle sera donc * ordonnée à ce diametre. C'est pourquoi la Parabole qu'on demande, doit passer par tous les points M, trouvés comme l'on vient d'enseigner. * Art. 19. & 21.

Il est visible qu'on peut se tromper en traçant les parties de la parabole, qui joignent les points trouvés ; mais on voit en même temps que l'erreur ne peut être sensible, lorsque ces points sont fort près les uns des autres. Ceux qui ont besoin de décrire souvent des Sections Coniques, préferent ordinairement cette methode, de les décrire par plusieurs points ; parce que les machines dont on se sert pour les décrire par un mouvement continu, étant composées, sont souvent fautives, & peu exactes dans la pratique.

SECONDE MANIE'RE.

Ayant mené par un point quelconque L de la tangente AL, une parallele indéfinie LE au diametre AP ; on prendra sur cette ligne & sur le diametre AP prolongé au delà de son origine A, les parties LE, EE, EE, &c. AF, FF, FF, &c. toutes égales entr'elles, & de telle grandeur qu'on voudra. On marquera sur LE, le point M, en sorte que LM soit troisiéme proportionnelle au parametre donné du diametre AP, & à la partie AL de la tangente. On tirera enfin des points A, M, les lignes AE, AE, AE, &c. MF, MF, MF, &c ; je dis que les points d'intersection N, N, N, &c. de chaque AE, avec la correspondante MF, seront tous à la parabole qu'on demande. FIG. 15.

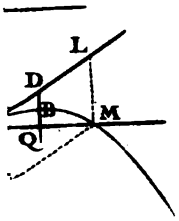
Car menant par le point marqué M, & par l'un des points trouvez N, les lignes MP, NQ, paralleles à la tangente AL, & nommant AP, x ; PM ou AL, y ; AQ, u ; QN, z ; les triangles semblables NQA, ALE, & MPF, NQF, donneront ces deux proportions QN (z). QA (u) :: AL (y). LE ou $AF = \frac{uy}{z}$. & MP

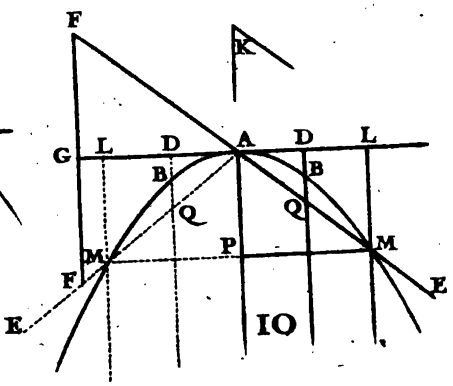
(y). PF ou $PA+AF$ $(x+\frac{uy}{z})$ :: NQ (z). QF ou $QA+AF$ $(u+\frac{uy}{z})$. D'où en multipliant les Extrêmes & les Moyens, l'on forme l'égalité $uy+\frac{uyy}{z}=xz+uy$; & effaçant de part & d'autre uy, & multipliant par z, il vient $uyy=xzz$, qui se reduit à cette proportion AP (x). AQ (u) :: $\overline{MP}^2$ (yy) $\overline{NQ}^2$ (zz). Or par la construction, le quarre de AL ou de PM, est egal au rectangle de la partie AP du diametre donné, par son parametre. Cette ligne PM sera donc * une ordonnée au diametre AP, & par consequent QN en sera * une autre. Ainsi le point N sera l'un des points de la parabole qui tombent d'un côté du diametre AP: pour les avoir de l'autre, il n'y a qu'à prendre sur les droites indéfinies LE, AF, les parties egales LE, EE, &c. AF, FF, &c de l'autre côté des points L, A.

* *Art.* 19. & 21.

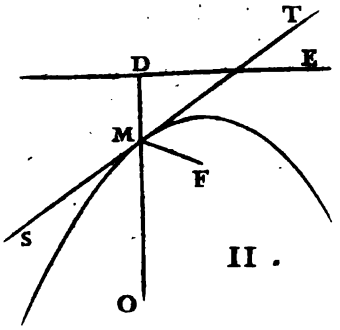
* *Art.* 8. & 20.

Si au lieu du parametre du diametre AP que l'on suppose ici donné, l'on avoit un des points M de la parabole; ce qui arrive souvent : il n'y auroit qu'à mener par ce point, une parallele indefinie LE, au diametre AP, & achever le reste comme cy-dessus.

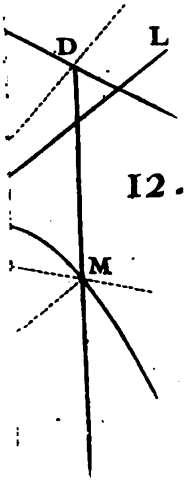




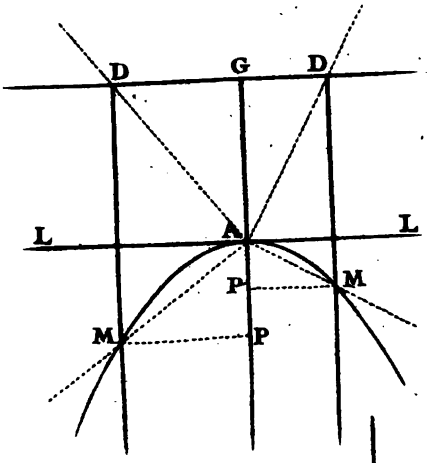
10



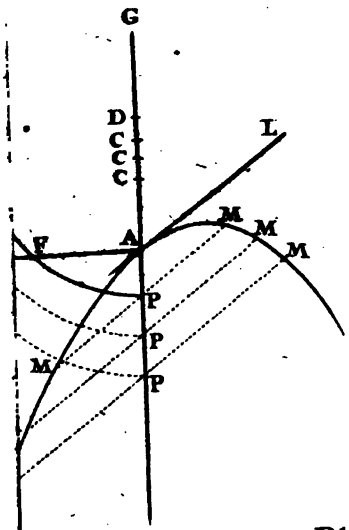
11.

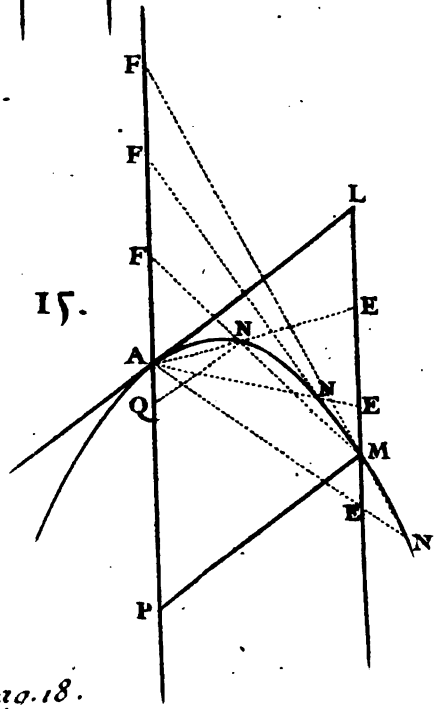


12.



13.





15.

Planche 2. pag. 18.

LIVRE SECOND.

De l'Ellipſe.

DEFINITIONS.

1.

AYANT attaché ſur un plan les deux bouts d'un fil *FMf*, en deux points *F*, *f*, dont la diſtance *Ff* ſoit moindre que la longueur du fil, on ſe ſervira d'un ſtile *M*, pour tenir ce fil toûjours tendu ; & conduiſant ce ſtile autour de ces deux points, en ſorte qu'il revienne au même point d'où il étoit parti : ce ſtile décrira dans ce mouvement, une ligne courbe, qui ſera nommée *Ellipſe*. FIG. 16.

2.

Les deux points fixes *F*, *f*, ſont nommés les deux *Foyers*.

3.

La ligne *Aa*, qui paſſe par les deux Foyers *F*, *f*, & qui eſt terminée de part & d'autre par l'Ellipſe, eſt appellée le *premier* ou le *grand Axe*.

4.

Le point *C*, qui diviſe par le milieu le premier Axe *Aa*, eſt nommé le *Centre* de l'Ellipſe.

5.

La ligne *Bb*, menée par le Centre *C*, perpendiculairement au premier Axe *Aa*, & terminée de part & d'autre par l'Ellipſe, eſt appellée le *ſecond* ou le *petit Axe*.

6.

Les deux Axes *Aa*, *Bb*, ſont appellez enſemble, *Conjugués* : de ſorte que le premier Axe *Aa*, eſt dit conjugué au ſecond *Bb* ; & reciproquement le ſecond *Bb*, conjugué au premier *Aa*.

7.

Les lignes *MP*, *MK*, menées des points *M* de l'Ellipſe parallelement à l'un des Axes, & terminées par

l'autre, ſont appellées *Ordonnées* à cet autre Axe : ainſi *M P* eſt Ordonnée à l'Axe *A a*, & *M K* à l'Axe *B b*.

8.

La troiſiéme proportionnelle aux deux Axes, eſt appellée *Parametre* de celui qui eſt le premier terme de la proportion. Ainſi ſi l'on fait comme le premier Axe *A a*, eſt au ſecond Axe *B b*, de même le ſecond *B b*, à une troiſiéme proportionnelle *p* ; cette ligne *p* ſera le Parametre du premier Axe.

9.

Toutes les lignes droites qui paſſent par le centre *C*, & qui ſont terminées de part & d'autre par l'Ellipſe, ſont appellées *Diametres*.

10.

Une ligne droite qui ne rencontre l'Ellipſe qu'en un ſeul point, & qui étant continuée de part & d'autre, n'entre point dedans, mais tombe au dehors, eſt appellée *Tangente* en ce point.

REMARQUE.

FIG. 17. 31. SI l'on conçoit que les deux foyers *F*, *f*, & le centre *C* ſe réüniſſent en un ſeul point ; il eſt viſible que l'Ellipſe ſe changera alors en un Cercle qui aura pour rayon la droite *C M*, égale à la moitié de la corde *C M C*, attachée par ces deux bouts au point *C*, qui en ſera le centre. On pourra donc conſiderer un cercle comme une eſpece particuliere d'Ellipſe, dans laquelle la diſtance des foyers eſt nulle ; de ſorte que tout ce qu'on démontrera dans la ſuite de l'Ellipſe, telle que puiſſe être la diſtance de ces deux foyers, ſe peut auſſi appliquer au cercle, en ſuppoſant que cette diſtance devienne nulle.

COROLLAIRE I.

FIG. 16. 32. IL ſuit de la définition premiere, que ſi l'on mene d'un point quelconque *M* de l'Ellipſe, aux deux foyers *F*, *f*, les droites *M F*, *M f* ; leur ſomme ſera toûjours la même.

COROLLAIRE II.

33. LORSQUE le point M tombe en A, il eſt viſible que MF devient AF, & que Mf devient Af: de même lorſque le point M tombe en a, il eſt encore viſible que MF devient aF, & que Mf devient af. On aura donc $AF+Af$, ou $2AF+Ff=aF+af$, ou $2af+fF$; & partant $AF=af$. D'où il ſuit:

1°. Que la ſomme des deux droites MF, Mf, eſt toûjours égale au premier axe Aa, puiſque $Mf+MF=Af+AF=Af+fa$.

2°. Que la diſtance Ff des foyers, eſt diviſée en deux parties égales par le centre C, puiſque $CA-AF$ ou $CF=Ca-af$ ou Cf.

COROLLAIRE III.

34. SI de l'extremité B du ſecond axe Bb, l'on mene aux deux foyers F,f, les droites BF, Bf; il eſt clair que les triangles rectangles BCF, BCf, ſeront égaux; & qu'ainſi l'hypothenuſe BF, eſt égal à l'autre hypothenuſe Bf: & par conſequent BF, ou $Bf=CA$ ou Ca, puiſque * $BF+Bf=Aa$. On prouve de même que Fb ou $bf=CA$ ou Ca. D'où l'on voit: * *Art.* 33.

1°. Que le ſecond axe Bb, eſt diviſé en deux parties égales par le centre C; car les triangles rectangles FCB, FCb ſeront égaux, puiſqu'ils ont des hypothenuſes égales FB, Fb, & le côté FC commun.

2°. Que le ſecond axe Bb, eſt toûjours moindre que le premier Aa; puiſque ſa moitié BC étant l'un des côtez du triangle rectangle BCF, ſera moindre que ſon hypothenuſe BF, qui eſt égale à la moitié CA du premier axe Aa.

3°. Que ſi l'on décrit de l'une des extremitez B du petit ou ſecond axe Bb comme centre, & du rayon BF égal à CA, moitié du premier ou grand axe Aa, un cercle; il coupera ce grand axe en deux points F,f, qui ſeront les deux foyers de l'Ellipſe.

COROLLAIRE IV.

35. LES mêmes choſes étant poſées, ſi l'on nomme CA ou BF, t; CF, m; le triangle rectangle BCF, donnera $\overline{BC}^2 = tt - mm$. Or $AF = t - m$, & $Fa = t + m$, & partant $AF \times Fa = tt - mm$. D'où il eſt évident que le quarré de la moitié CB du petit axe Bb, eſt egal au rectangle de AF par Fa parties du grand axe Aa, priſes entre l'un des foyers F, & ſes deux extremités A, a.

COROLLAIRE V.

36. IL ſera facile à preſent de décrire une Ellipſe dont les deux axes Aa, Bb, ſont donnez. Car ayant trouvé* ſur le premier ou grand axe Aa, les foyers F, f, on attachera dans ces points, les extremités d'un fil FMf, dont la longueur égalera celle de cet axe; & ayant décrit par le moyen de ce fil, une Ellipſe comme l'on a enſeigné dans la définition premiere, il eſt évident qu'elle ſera celle qu'on demande.

* *Art.* 34.

PROPOSITION I.

Theorême.

FIG. 16. 37. SI *l'on mene l'ordonnée* MP *au premier ou grand axe* Aa, *& qu'on prenne ſur cet axe la partie* AD *égale à* MF; *Je dis que* CA. CF :: CP. CD.

Ayant nommé, comme auparavant, les données CA, t; CF, m; & de plus les indeterminités CP, x; PM, y; & l'inconnuë CD, z; il peut arriver deux differens cas.

Premier cas. Lorſque le point P tombe au deſſus du centre C. Comme PF eſt toûjours moindre que Pf; il s'enſuit que MF ou AD ſera moindre que Mf ou aD; c'eſt pourquoi AD ou $MF = t - z$, aD ou $Mf = t + z$, $FP = m - x$ ou $x - m$ (ſelon que le point P tombe au deſſous ou au deſſus du foyer F), $Pf = x + m$. Or les triangles rectangles MPF, MPf, donnent $tt -$

$2tz+zz=yy+mm-2mx+xx$, & $tt+2tz+zz=yy+mm+2mx+xx$. Donc si l'on retranche par ordre chaque membre de la premiere égalité de ceux de la seconde, on aura $4tz=4mx$; d'où l'on tire $CD\,(z)=\frac{mx}{t}$.

Second cas. Lorsque le point P tombe au dessous du centre C, comme PF est toûjours plus grande que Pf, il s'ensuit que MF ou AD, sera plus grande que Mf ou aD : c'est pourquoi AD ou $MF=t+z$, aD ou $Mf=t-z$, $PF=x+m$, $Pf=x-m$ ou $m-x$ (selon que le point P tombe au dessous ou au dessus du foyer f. Or les triangles rectangles MPF, MPf, donnent $tt+2tz+zz=yy+mm+2mx+xx$, & $tt-2tz+zz=yy+mm-2mx+xx$. Donc si l'on retranche par ordre chaque membre de la seconde égalité de ceux de la premiere, on aura $4tz=4mx$; d'où l'on tire encore $CD\,(z)=\frac{mx}{t}$. Par conſequent en l'un & l'autre cas, on aura $CA\,(t).\ CF\,(m)::CP\,(x).\ CD\,(z)$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

38. IL est donc évident que si l'on nomme les données CA ou Ca, t; CF ou Cf, m; & l'indéterminée CP, x; on aura toûjours $MF=t-\frac{mx}{t}$, & $Mf=t+\frac{mx}{t}$, lorsque le point P tombe au dessus du centre C : & qu'au contraire on aura $MF=t+\frac{mx}{t}$, & $Mf=t-\frac{mx}{t}$, lorsqu'il tombe au dessous.

PROPOSITION II.

Theorême.

39. LE *quarré d'une ordonnée quelconque* MP *à l'axe* Aa, *est au rectangle de* AP *par* Pa, *parties de cet axe, comme le quarré de son conjugué* Bb, *est au quarré de l'axe* Aa.

Il faut prouver que $\overline{PM}^2 . AP * Pa :: \overline{Bb}^2 . \overline{Aa}^2$.

Les mêmes choſes étant poſées que dans l'article precedent, ſi l'on met dans l'egalité $tt + 2tz + zz = yy$ * *Art. 37.* $+ mm + 2mx + xx$ que l'on a trouvée * par le moyen du triangle rectangle MPF, à la place de z ſa valeur $\frac{mx}{t}$, on formera toûjours celle ci $ttyy = t^4 - ttxx - mmtt + mmxx$, laquelle étant réduite à une propor- * *Art. 35.* tion, donne $\overline{PM}^2 (yy) . AP * Pa (tt - xx) :: \overline{BC}^2 (tt - mm) . \overline{CA}^2 (tt) :: \overline{Bb}^2 . \overline{Aa}^2$. *Ce qu'il falloit, &c.*

COROLLAIRE I.

40. SI l'on mene une ordonnée MK à l'autre axe Bb, lequel j'appelle $2c$, il eſt clair que $MK = CP (x)$, * *Art. 39.* & que $CK = PM (y)$. Or * $\overline{PM}^2 (yy) . AP * Pa (tt - xx) :: \overline{Bb}^2 (4cc) . \overline{Aa}^2 (4tt)$. Et partant $4cc xx = 4cctt - 4ttyy$; ce qui donne cette proportion $\overline{MK}^2 (xx) . BK * Kb (cc - yy) :: \overline{Aa}^2 (4tt) . \overline{Bb}^2 (4cc)$.

C'eſt à dire que le quarré d'une ordonnée quelconque MK à l'axe Bb, eſt au rectangle de BK par Kb parties de cet axe, comme le quarré de ſon conjugué Aa, eſt au quarré de l'axe Bb.

COROLLAIRE FONDAMENTAL.

FIG. 18. 19. 41. SI l'on nomme l'un ou l'autre axe Aa, $2t$; ſon conjugué Bb, $2c$; ſon parametre p ; chacune de ſes ordonnées PM, y ; chacune de ſes parties CP priſes entre le centre & les rencontres des ordonnées, x ; on * *Art. 39.* aura * toûjours $\overline{PM}^2 (yy) . AP * Pa (tt - xx) :: \overline{Bb}^2 (4cc) . \overline{Aa}^2 (4tt) :: p . Aa (2t)$. Puiſque ſelon la définition du Parametre, $Aa (2t) . Bb (2c) :: Bb (2c) . p = \frac{4cc}{2t}$. D'où en multipliant d'abord les extrêmes & les moyens de la proportion $yy . tt - xx :: 4cc . 4tt$, & enſuite

enſuite de l'autre $yy.tt-xx::p.2t$. L'on tire $yy=cc-\frac{ccxx}{tt}$, & $yy=\frac{1}{2}pt-\frac{pxx}{2t}$. Or comme cette proprieté convient également à tous les points de l'Ellipſe, & qu'elle en détermine la poſition par rapport aux deux axes conjugués Aa, Bb; il s'enſuit que l'équation $yy=cc-\frac{ccxx}{tt}$, ou $yy=\frac{1}{2}pt-\frac{pxx}{2t}$, exprime parfaitement la nature de l'Ellipſe par rapport à ſes axes.

COROLLAIRE III.

42. SI l'on mene deux ordonnées quelconques MP, NQ, à l'axe Aa; leurs quarrés ſeront entr'eux comme les rectangles $AP*Pa$, $AQ*Qa$, des parties de cet axe, faites par la rencontre de ces mêmes ordonnées; car * $\overline{Bb}^2.\overline{Aa}^2::\overline{PM}^2.AP*Pa::\overline{QN}^2.AQ*Qa$. Et partant $\overline{PM}^2.\overline{QN}^2::AP*Pa.AQ*Qa$. * Art. 39.

COROLLAIRE IV.

43. SI l'on mene par un point quelconque P de l'un des axes conjugués Aa, une parallele MM à l'autre axe Bb; elle rencontrera l'Ellipſe en deux points M, M, également éloignés de part & d'autre du point P, & non en davantage. Car afin que les points M, M, ſoient à l'Ellipſe, il faut * que les quarrés de PM (y) priſe de part & d'autre de l'axe Aa, ſoient égaux chacun à la même quantité $cc-\frac{ccxx}{tt}$. * Art. 41.

COROLLAIRE V.

44. IL ſuit de ce que * $yy=cc-\frac{ccxx}{tt}$, que plus CP (x) priſe de part & d'autre du centre C augmente plus chaque ordonnée PM (y) priſe de part & d'autre de l'un ou de l'autre axe Aa, diminuë; de ſorte que CP (x) étant égale à CA ou Ca (t), chaque PM (y) devient alors nulle ou zero: & qu'au contraire plus CP (x) devient petite, plus auſſi chaque ordonnée PM (y) priſe * Art. 42.

de part & d'autre de l'axe Aa augmente ; de sorte que CP (x) devenant zero, chaque PM (y), qui est alors CB ou Cb (c), sera la plus grande des ordonnées. D'où il est clair.

1°. Que si l'on mene par les extremités B, b, de l'un des axes conjugués, des paralleles à l'autre ; elles seront tangentes en ces points.

2°. Que l'Ellipse s'éloigne de part & d'autre de plus en plus de l'un ou de l'autre axe Aa, en commençant par l'extremité A ; jusqu'à ce qu'elle rencontre son conjugué Bb ; après quoi elle va toûjours en s'approchant du même axe Aa, jusqu'à ce qu'elle le rencontre en son autre extremité a.

COROLLAIRE VI.

45. IL suit encore de ce que * $yy = cc - \frac{ccxx}{tt}$, que si l'on prend les points P, P, également éloignés de part & d'autre du centre C ; les ordonnées PM, PM, seront égales. D'où il est évident que si une ligne quelconque MM, terminée par l'Ellipse, est coupée en deux également par l'un des axes conjugués Bb en un point K autre que le centre ; elle sera parallele à l'autre Aa. Car menant les paralleles MP, MP, à l'axe Bb, la ligne PP sera divisée par le milieu en C, puisque MM l'est en K ; & partant les ordonnées PM, PM seront égales. La droite MM sera donc parallele à l'axe Aa.

* *Art.* 41.

COROLLAIRE VII.

46. SI l'on conçoit que le plan sur lequel l'Ellipse est tracée, soit plié le long d'un des axes Bb, en sorte que ses deux parties se joignent ; il est clair que les deux demi-Ellipses BAb, Bab, tomberont exactement l'une sur l'autre ; sçavoir, les points A, M, &c. sur a, M, &c. puisque * toutes les perpendiculaires Aa, MM, &c. à cet axe, sont coupées par le milieu aux points C, K, &c. D'où il est visible que l'Ellipse est coupée par les deux axes en qua-

* *Art.* 45.

ne portions parfaitement égales & uniformes, qui ne different entr'elles que par leur ſituation.

PROPOSITION III.

Theorême.

47. SI *l'on mene par l'une des extremités* A *de l'un des axes* A a, *une ligne droite quelconque* A M *dans l'un des angles* a A L, a A L, *faites par cet axe, & par la ligne* L A L *parallele à ſon conjugué* B b; *je dis qu'elle rencontrera l'Ellipſe en un autre point* M.

Ayant pris ſur AL de part ou d'autre du point A, la partie AG égale au parametre p de l'axe Aa, & tire GF parallele à cet axe, & qui rencontre la ligne AM (prolongée, s'il eſt neceſſaire) au point F, on prendra ſur la ligne AL du même côté où tombe la ligne AM par rapport à l'axe Aa, la partie AL égale à GF, & ayant tiré par l'autre extremité a de l'axe Aa la droite aL; je dis que le point M où elle coupe la ligne AM, eſt à l'Ellipſe MAM. FIG. 20.

Car menant MP parallele à AE, & nommant les connuës Aa, $2t$; AG, p; GF ou AL, a; & les inconnuës CP, x; PM, y; les triangles ſemblables AGF, MPA, & LAa, MPa, donneront $AG\ (p)\ GF\ (a) :: MP\ (y).\ AP\ (t \pm x) = \frac{ay}{p}$. Et $AL\ (a).\ Aa\ (2t) :: PM\ (y).\ aP\ (t \mp x) = \frac{2ty}{a}$. Et par conſequent on aura toûjours $AP \times Pa\ (tt - xx) = \frac{2tyy}{p}$, ſoit que le point P tombe au deſſus ou au deſſous du centre C; d'où l'on tire $yy = \frac{1}{2}pt - \frac{pxx}{2t}$. La ligne PM ſera donc * une ordonnée à l'axe Aa; & partant le point M ſera à l'Ellipſe MAM. *Ce qu'il falloit démontrer.* * *Art.* 42.

COROLLAIRE I.

48. DE-LA on voit comment un axe Aa d'une Ellipſe MAM étant donné avec ſon parametre p, &

ayant mené par l'une des extremités A de cet axe, une ligne droite quelconque AM dans l'un ou l'autre des angles aAL, aAL, fait par cet axe, & par la ligne LAL parallele à ſon conjugué Bb; on voit, dis-je, ce qu'il faut faire pour trouver ſur cette ligne le point M où elle rencontre l'Ellipſe MAM.

COROLLAIRE II.

49. IL eſt évident qu'il n'y a que la ligne LAL parallele à l'axe Bb, qui puiſſe être tangente de l'Ellipſe MAM au point A, l'une des extremités de ſon conjugué Aa; puiſqu'il n'y a que cette ſeule ligne, qui paſſant par le point A, & étant continuée de part & d'autre, ne la rencontre en aucun point, & n'entre pas dedans.

PROPOSITION IV.

Theorême.

FIG. 20. 50. TOUS *les diametres comme* MCm, *ſont coupés en deux également par le centre* C, *& ils ne rencontrent l'Ellipſe qu'en deux points* M, m.

Ayant mené l'ordonnée MP, & pris Cp égale à CP, ſi l'on mene la perpendiculaire pm terminée en m par la droite MCm; il eſt évident que les triangles CPM, Cpm ſont ſemblables & égaux, & qu'ainſi CM eſt égale à Cm, & PM à pm. Or comme * les ordonnées qui ſont également éloignées de part & d'autre du centre C, ſont égales entr'elles, & que PM eſt une ordonnée, il s'enſuit que pm ſera auſſi une ordonnée; & par conſequent que le point m eſt à l'Ellipſe.

* *Art.* 45.

De plus il eſt viſible que ſi l'on imagine une parallele à l'axe Bb, qui ſe meuve de C vers A; la partie de cette parallele renfermée dans l'angle ACM, ira toûjours en augmentant à meſure que CP croît, & qu'au contraire la partie de cette parallele renfermée entre le quart d'Ellipſe AMB & l'axe CA, c'eſt à dire, l'ordon-

née PM * ira toûjours en diminuant ; d'où il ſuit que la ligne droite CM, qui paſſe par le centre, ne rencontre l'Ellipſe qu'en un point M du même côté de l'axe ; & il en eſt de même pour le point m pris de l'autre côté. Donc &c. * *Art.* 44.

DE'FINITIONS.

II.

Si l'on mene par un point quelconque M de l'Ellipſe, un diametre MCm, une ordonnée MP à l'un ou l'autre axe Aa, & une ligne droite MT, en ſorte que CT ſoit troiſiéme proportionnelle à CP, CA ; le diametre SCs parallele à MT, eſt appellé *Diametre conjugué* au diametre Mm ; Et réciproquement le diametre Mm eſt dit conjugué au diametre Ss : de ſorte que les deux enſemble ſont appellés *Diametres conjugués.* Fig. 21. 22.

12.

Toutes les lignes droites menées des points de l'Ellipſe parallelement à l'un de ces deux diametres, & terminées par l'autre, ſont appellées *Ordonnées* à cet autre. Ainſi NO parallele au diametre Ss, eſt Ordonnée à ſon conjugué Mm.

13.

La troiſiéme proportionnelle à deux diametres conjugués, eſt appellée *Parametre* du premier de la proportion. Ainſi la troiſiéme proportionnelle à Mm, Ss, eſt appellée *Parametre* du diametre Mm.

COROLLAIRE.

51. Si l'on nomme la donnée CA, t ; & les indéterminées CP, x ; PT, s ; il eſt clair, ſelon la définition 11e que $CT\ (x+s) = \frac{tt}{x}$; & qu'ainſi $sx = tt - xx = AP \times Pa$.

PROPOSITION V.

Theorême.

52. *Si l'on mene par les extremités* M, S, *de deux diametres conjugués* M m, S s, *deux ordonnées* M P, S K, *à un axe* A a: *je dis que la partie* C K *de cet axe, prise entre le centre & la rencontre de l'une des ordonnées* S K, *est moyenne proportionnelle entre les deux parties* A P, P a, *faites par la rencontre de l'autre ordonnée* M P.

Il faut prouver que $\overline{CK}^2 = AP * Pa$.

Ayant nommé les connuës CA, t; CP, x; PT, s; & l'inconnuë CK, m; on aura $AP * Pa = tt - xx$ * *Art.* 51. $= * sx$, & $AK * Ka = tt - mm = sx + xx - mm$ en mettant pour tt sa valeur $xx + sx$. Cela posé, la proprieté de l'Ellipse* donnera $AP * Pa\ (sx).\ AK * Ka\ (sx + xx - mm) ::$ * *Art.* 42. $\overline{PM}^2.\ \overline{KS}^2 ::\ \overline{TP}^2\ (ss).\ \overline{CK}^2\ (mm)$. à cause des triangles semblables TPM, CKS. D'où l'on tire en multipliant les extrêmes & les moyens, & en transposant à l'ordinaire, $\overline{CK}^2\ (mm) = \frac{sxx + ssx}{xx + s} = sx = AP * Pa$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

53. PUISQUE $\overline{CK}^2 = tt - xx$, il s'ensuit que $\overline{CA}^2 - \overline{CK}^2$ ou $AK * Ka = xx$. Or * $\overline{CA}^2\ (tt).\ \overline{CB}^2\ (cc) ::$ * *Art.* 41. $AK * Ka\ (xx).\ \overline{SK}^2 = \frac{ccxx}{tt}$. Et $\overline{CA}^2\ (tt).\ \overline{Cb}^2\ (cc) ::$ $AP * Pa\ (tt - xx).\ \overline{PM}^2 = cc - \frac{ccxx}{tt}$. De plus à cause des triangles rectangles CPM, CKS, on aura le quarré $\overline{CM}^2$ ou $\overline{CP}^2 + \overline{PM}^2 = xx + cc - \frac{ccxx}{tt}$, & le quarré $\overline{CS}^2$ ou $\overline{CK}^2 + \overline{KS}^2 = tt - xx + \frac{ccxx}{tt}$. Donc $\overline{CM}^2 + \overline{CS}^2 = tt + cc$.

C'est à dire que la somme des quarrés de deux diametres conjugués quelconques Mm, Ss, est égale à la somme des quarrés des deux axes Aa, Bb.

PROPOSITION VI.

Theorême.

54. LE *quarré d'une ordonnée quelconque* ON *au diametre* Mm, *eſt au rectangle de* MO×Om *fait des parties de ce diametre ; comme le quarré de ſon conjugué* Ss, *eſt au quarré du même diametre* Mm.

Il faut prouver que $\overline{ON}^2 . MO \times Om :: \overline{Ss}^2 . \overline{Mm}^2$.

Ayant mené les paralleles NQ, OH, à l'axe Bb, & la parallele OR à ſon conjugué Aa, qui rencontre au point R l'ordonnée NQ prolongée, s'il eſt neceſſaire ; on nommera les données CP, x ; PM, y ; CA, t ; PT, s ; & les indéterminées HQ ou OR, a ; CH, b ; & on aura à cauſe des triangles ſemblables CPM, CHO, & MPT, NRO, ces deux proportions $CP(x).PM(y) :: CH(b).HO$ ou $RQ = \frac{by}{x}$. Et $TP(s).PM(y) :: OR(a).RN = \frac{ay}{s}$. Cela poſé.

Puiſque (*fig.* 21.) NQ eſt toûjours la difference de $RQ\left(\frac{by}{x}\right)$, $RN\left(\frac{ay}{s}\right)$, & CQ la ſomme de $CH(b)$, $HQ(a)$, lorſque le point N tombe entre les points M, S, ou m, s ; & qu'au contraire (*fig.* 22.) NQ eſt toûjours la ſomme de RQ, RN, & CQ la difference de CH, HQ, lorſque le point N tombe par tout ailleurs : on aura $\overline{NQ}^2 = \frac{bbyy}{xx} \mp \frac{2abyy}{sx} + \frac{aayy}{ss}$, & $CQ = aa \mp 2ab + bb$; ſçavoir $-\frac{2abyy}{sx}$ & $\mp 2ab$ dans le premier cas, & au contraire $+\frac{2abyy}{sx}$ & $-2ab$ dans le ſecond cas. Or** ** *Art.* 42. $AP \times Pa\ (tt - xx)$. $AQ \times Qa$ ou $\overline{CA}^2 - \overline{CQ}^2\ (tt - aa \mp 2ab - bb) :: \overline{PM}^2\ (yy)$. $\overline{QN}^2 = \frac{ttyy - aayy \mp 2abyy - bbyy}{tt - xx}$. En comparant enſemble ces deux valeurs du quarré de NQ, on formera l'égalité $\frac{bbyy}{xx} \mp \frac{2abyy}{sx} + \frac{aayy}{ss} = \frac{ttyy - aayy \mp 2abyy - bbyy}{tt - xx}$, dans laquelle effaçant d'une part le

terme $\pm\frac{2abyy}{sx}$ & de l'autre le terme $\pm\frac{2abyy}{tt-xx}$ qui lui eſt
*Art. 51. égale, puiſque * $sx=tt-xx$, & diviſant par yy, il vient $\frac{bb}{xx}+\frac{aa}{ss}=\frac{tt-aa-bb}{tt-xx}$.

Si l'on multiplie par xx, & qu'on tranſpoſe bb, on trouvera $\frac{aaxx}{ss}$ ou $\frac{aax^4}{ssxx}=\frac{ttxx-aaxx-bbtt}{tt-xx}$; & multipliant le premier membre par $ssxx$, & le ſecond par le quarré de $tt-xx$ valeur de sx (ce qui ſe fait en multipliant ſimplement le numerateur par $tt-xx$) on aura $aax^4=t^4xx-aattxx-bbt^4-ttx^4+aax^4+bbttxx$; d'où en effaçant de part & d'autre aax^4, tranſpoſant $aattxx$, & diviſant par $ttxx$, l'on tirera $\overline{HQ}^2$ ou $\overline{OR}^2\,(aa)=tt-xx+bb-\frac{bbtt}{xx}$.

Maintenant ſi l'on nomme le demi diametre CM ou Cm, z; on aura à cauſe des triangles ſemblables CPM, CHO, cette proportion $CP\,(x).\,CM\,(z)::CH\,(b).\,CO=\frac{bz}{x}$. Et partant $MO\times Om=zz-\frac{bbzz}{xx}$. Or les triangles ſemblables ORN, CKS, donnent $\overline{ON}^2.\,\overline{CS}^2::\overline{OR}^2$
*Art. 52. $(tt-xx+bb-\frac{bbtt}{xx}).\,\overline{CK}^2$ * $(tt-xx)::MO\times Om\left(\frac{xxzz-bbzz}{xx}\right).\,\overline{CM}^2\,(zz)$. Puiſqu'en multipliant les extrêmes & les moyens, on trouve le même produit. Donc $\overline{ON}^2.$
*Art. 50. $MO\times Om::\overline{CS}^2.\,\overline{CM}^2::\overline{Ss}^2.\,\overline{Mm}^2$. *Ce qu'il falloit, &c.*

COROLLAIRE GENERAL.

55. IL eſt viſible que ce qu'on a démontré dans la Propoſition ſeconde par rapport aux deux axes Aa, Bb, s'étend par le moyen de cette Propoſition à deux diametres conjugués quelconques Mm, Ss. Or comme les articles 40, 41, 42, 43, 44, 45, 47, 48 & 49, ſe tirent de la ſeconde Propoſition, & ſubſiſtent également, ſoit que l'angle ACB ſoit droit ou qu'il ne le ſoit pas; il s'enſuit que ſi l'on ſuppoſe dans ces articles, que les lignes Aa, Bb, au lieu d'être les deux axes ſoient deux diametres.

diametres conjugués quelconques, ils ſeront encore vrais dans cette ſuppoſition : car leur démonſtration demeurera toûjours la même ; & il ne faut pour s'en convaincre entierement, que les relire en mettant par tout où ſe trouve le mot d'*Axe* celui de *Diametre*.

COROLLAIRE II.

56. COMME les articles 44 & 49, ſubſiſtent avec la même force, lorſque les lignes Aa, Bb, au lieu d'être les deux axes, ſont deux diametres conjugués quelconques, tels que Mm, Ss ; il s'enſuit que la ligne MT menée par le point M l'une des extremités d'un diametre quelconque Mm, parallelement à ſon diametre conjugués Ss, eſt tangente en M, & qu'il n'y a que cette ſeule ligne qui puiſſe toucher l'Ellipſe en ce point. FIG. 23.

D'où l'on voit que d'un point donné ſur une Ellipſe, on ne peut mener qu'une ſeule tangente.

COROLLAIRE III.

57. DE-LA il eſt évident, ſelon la définition 11e, que ſi l'on mene par un point quelconque M d'une Ellipſe, une ordonnée MP à l'un ou l'autre axe Aa ; & qu'ayant pris CT du côté du point P, troiſiéme proportionnelle à CP, CA, on tire la droite MT : cette ligne MT ſera tangente en M. Et reciproquement, que ſi la ligne MT eſt tangente en M, & qu'on mene l'ordonnée MP à l'un ou l'autre axe Aa, les parties CP, CA, CT de cet axe, ſeront en proportion geometrique continuë.

COROLLAIRE IV.

58. SI l'on imagine dans les définitions 11, 12 & 13, & dans les deux dernieres Propoſitions, que les lignes Aa, Bb, au lieu d'être les deux axes, ſoient deux diametres conjugués quelconques ; on verra que ces Propoſitions ſeront encore vraies, puiſqu'elles ſe démontreront de la même maniere qu'auparavant : comme il eſt évident par l'inſpection de la figure 23, où les triangles

ſemblables donnent les mêmes proportions que dans le cas des axes.

D'où il ſuit 1°. Que le Corollaire précedent doit encore avoir lieu, lorſque la ligne Aa, au lieu d'être un axe, eſt un diametre quelconque. 2°. Que les diametres conjugués Mm, Ss, peuvent être les deux axes dans cette ſuppoſition ; & qu'ainſi on peut regarder les deux axes comme deux diametres conjugués, qui font entr'eux des angles droits.

PROPOSITION VII.

Theorême.

FIG. 24. 59. SI *par un point quelconque d'une Ellipſe qui a pour centre le point* C, *l'on tire une ordonnée* MP *à l'un des axes* Aa, *& une perpendiculaire* MG *à la tangente* MT *qui paſſe par le point* M : *je dis que* CP *ſera toûjours à* PG *en raiſon donnée de l'axe* Aa *à ſon parametre.*

Car nommant le demi-axe CA ou Ca, t ; & les indéterminées CP, x ; PM, y ; on aura * $CT = \frac{tt}{x}$; & partant $PT = \frac{tt-xx}{x}$. Or les triangles rectangles ſemblables TPM, MPG, donnent $TP\left(\frac{tt-xx}{x}\right)$. $PM\,(y) :: PM\,(y)$. $PG = \frac{xyy}{tt-xx}$. D'où l'on tire cette proportion $CP\,(x)$. $PG\left(\frac{xyy}{tt-xx}\right) :: AP \times Pa\,(tt-xx)$. $\overline{PM}\,(yy)$. Puiſqu'en multipliant les extrêmes & les moyens, on forme le même produit xyy. Mais le rectangle $AP \times Pa$, eſt * au quarré $\overline{PM}$, comme l'axe Aa eſt à ſon parametre. Donc &c.

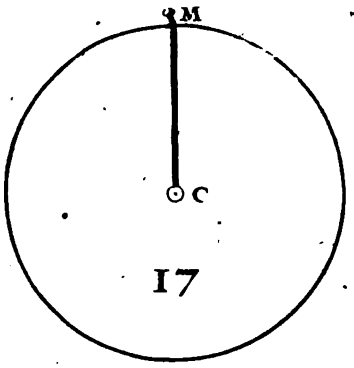
* *Art.* 57.

* *Art.* 41.

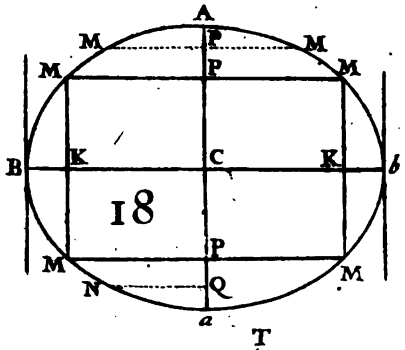
PROPOSITION VIII.

Theorême.

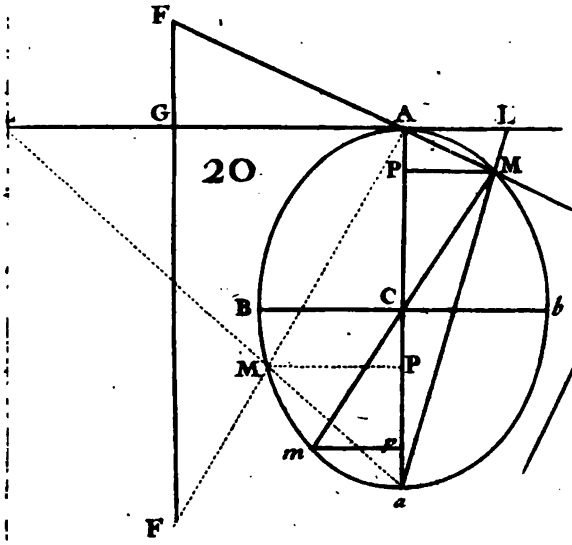
FIG. 25. 60. SI *l'on mene par un point quelconque* M *d'une Ellipſe, une tangente* TMS, *& aux deux foyers* F, f, *les droites* MF,



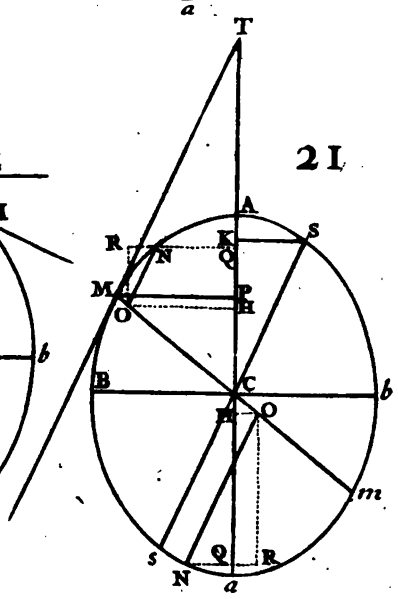
17



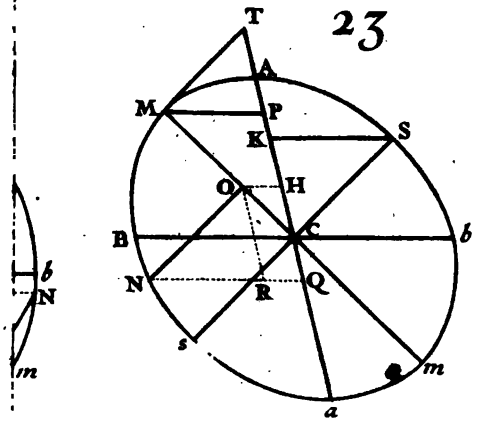
18



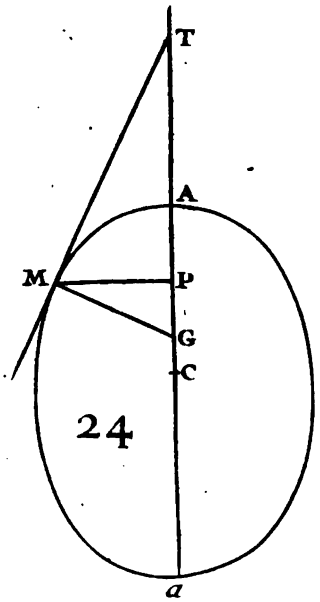
20



21



23



24

M f; *je dis que les angles* F M T, f M S, *faits par ces lignes de part & d'autre avec la tangente* T M S, *ſont égaux entr'eux.*

Car ayant mené les perpendiculaires FD, fd, ſur cette tangente; le premier axe Aa qui la rencontre en T, & l'ordonnée MP à cet axe, & nommé les données CA ou Ca, t; CF ou Cf, m; & l'indéterminée CP, x; on aura $MF^*(t-\frac{mx}{t})$. $Mf(t+\frac{mx}{t})::TF$, ou CT^* * *Art.* 38. * *Art.* 57. $(\frac{tt}{x})-CF\ (m)$. Tf ou $CT(\frac{tt}{x})+Cf\ (m)$. Puiſqu'en multipliant les extrêmes & les moyens, on trouve le même produit. Or les triangles ſemblables TFD, Tfd, donnent $TF.Tf::FD.fd$. L'hypothenuſe MF du triangle rectangle MDF, ſera donc à l'hypothenuſe Mf du triangle rectangle Mdf, comme le côté DF eſt au côté df; & par conſequent ces deux triangles ſeront ſemblables. Les angles FMD, fMd, ou FMT, fMS, qui ſont oppoſés aux côtés homologues DF, df, ſeront donc égaux entr'eux. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

61. DE LA il eſt évident que la tangente TMS étant prolongée indéfiniment de part & d'autre du point touchant M, laiſſe l'Ellipſe toute entiere du côté de ſes deux foyers F, f. Or comme cela arrive toûjours en quelque endroit de l'Ellipſe que tombe le point M, il s'enſuit qu'elle ſera concave dans toute ſon étenduë autour de ſes deux foyers, & par conſequent auſſi autour de ſon centre.

PROPOSITION IX.

Theorême.

62. SI *l'on mene par l'une des extremités* A *d'un diametre* A a *une parallele* D A E *à ſon conjugué* B b, *laquelle rencontre deux autres diametres conjugués quelconques* M m, S s, FIG. 26.

aux points D, E; *je dis que le rectangle de* DA *par* AE, *eſt égal au quarré de la moitié* CB *du diametre* Bb.

Il faut prouver que $DA \times AE = \overline{CB}^2$.

Ayant mené par les extremités M, S, des diametres conjugués Mm, Ss, les ordonnées MP, SK, au diametre Aa, on nommera les données CA, t; CB, c; & les indéterminées CP, x; PM, y; & on aura * $\overline{CK}^2 = AP \times Pa = tt - xx$; & par conſequent $AK \times Ka$ ou $\overline{CA}^2 - \overline{CK}^2 = xx$. Or * $\overline{BC}^2 (cc). \overline{CA}^2 (tt) :: \overline{MP}^2 (yy). AP \times Pa$ ou $\overline{CK}^2 = \frac{ttyy}{cc}$. Et $\overline{CA}^2 (tt). \overline{CB}^2 (cc) :: AK \times Ka (xx). \overline{KS}^2 = \frac{ccxx}{tt}$. Donc en extrayant les racines quarrées, l'on tire $CK = \frac{ty}{c}$, & $KS = \frac{cx}{t}$. Mais les triangles ſemblables CPM, CAD, & CKS, CAE, donnent $CP (x). PM (y) :: CA (t). AD = \frac{ty}{x}$. Et $CK\left(\frac{ty}{c}\right). KS \left(\frac{cx}{t}\right) :: CA (t). AE = \frac{ccx}{ty}$. Donc $DA \times AE = cc = \overline{BC}^2$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* *Art.* 52.

* *Art.* 54.

PROPOSITION X.

Problême.

FIG. 27. 63. DEUX *diametres conjugués* Aa, Bb, *d'une Ellipſe étant donnés avec une ligne droite* MCm *qui paſſe par le centre* C; *marquer ſur cette ligne les points* M, m, *où elle rencontre l'Ellipſe.*

Ayant mené par l'une des extremités A du diametre Aa, une parallele indéfinie AD, à ſon conjugué Bb, laquelle rencontre la ligne CM donnée de poſition au point D; on tirera par le point A perpendiculairement ſur AD, la ligne AO égale à CB, & par les points O, D, la ligne OD. On décrira du rayon OA un cercle qui coupera la ligne OD en deux points N, n, par où l'on tirera des paralleles NM, nm, à la ligne OC qui joint

les centres de l'Ellipſe & du cercle. Je dis que les points M, m, où elles rencontrent la ligne CD, ſeront à l'Ellipſe, & détermineront par conſequent les extremités du diametre MCm donné de poſition.

Car menant les paralleles MP, NQ, à AD, qui rencontrent les lignes CA, OA, aux points P, Q; les triangles ſemblables CDO, MDN, & CDA, CMP, & ODA, ONQ, donneront $CA.CP :: CD.CM :: OD.ON :: OA.OQ$. c'eſt à dire, $CA.CP :: OA.OQ$. Et partant ſi l'on mene la droite PQ, elle ſera parallele à OC; & par conſequent auſſi à MN ſuppoſée parallele à OC. Ainſi les paralleles MP, NQ, ſeront égales entr'elles. Cela poſé, ſi l'on nomme les données CA, t; CB ou AO ou ON, c; & les indéterminées CP, x; PM ou NQ, y; on aura $CA\ (t).\ CP\ (x) :: OA\ (c).\ OQ = \frac{cx}{t}$. Et à cauſe du triangle OQN rectangle en Q, le quarré $\overline{NQ}^2$ ou $\overline{MP}^2\ (y) = \overline{ON}^2\ (cc) - \overline{OQ}^2\ (\frac{ccxx}{tt})$. La ligne MP ſera donc * une ordonnée au diametre Aa; & par conſequent le point M appartiendra à l'Ellipſe qui a pour diametres conjugués les droites Aa, Bb. Mais à cauſe des paralleles NM, OC, nm, la ligne Mm eſt diviſée en deux également par le centre C; puiſque par la proprieté du cercle, Nn l'eſt au point O. Donc le point m appartiendra * auſſi à la même Ellipſe.

* *Art.* 41.

* *Art.* 50.

Si les diametres conjugués Aa, Bb, étoient les deux axes, les paralleles CO, PQ, ſe confondroient alors avec les lignes CA, AO, qui n'en feroient qu'une ſeule; ce qui rendroit la conſtruction & la démonſtration un peu plus faciles.

PROPOSITION XI.

Problême.

64. DEUX *diametres conjugués* Aa, Bb, *d'une Ellipſe étant donnés; en trouver les deux axes* Mm, Ss: *& démontrer qu'il n'y en peut avoir que deux.* FIG. 27.

Ayant mené par l'une des extremités A du diametre Aa, une parallele DE à ſon conjugué Bb, on tirera AO perpendiculaire à DE & égale à CB. Ayant joint OC, on menera par ſon point de milieu F la ligne FG qui la coupe à angles droits, & qui rencontre au point G la ligne DE, ſur laquelle on prendra de part & d'autre du point G les parties GD, GE, égales chacune à GO ou GC. Tirant enfin les droites CD, CE; je dis que les deux axes Mm, Ss, ſont ſitués ſur ces droites.

* *Art. 58.* Car les deux axes pouvant être regardés * comme deux diametres conjugués, qui font entr'eux un angle droit, ils rencontreront la ligne DE en des points D, E, tels que le cercle décrit de ce diametre paſſera par les deux points C, O, puiſque le rectangle $DA \times AE$ étant égal * au quarré de AO, l'angle DOE ſera droit, auſſi-bien que l'angle DCE. Or il eſt évident que c'eſt préciſément ce que l'on vient de faire par le moyen de cette conſtruction; puiſque les lignes GO, GC, GE, GD étant toutes égales entr'elles, ſont les rayons d'un même cercle. Mais comme il ne peut y avoir ſur la ligne DE que deux points D, E, qui ſatisfaſſent en même temps à ces deux conditions; ſçavoir, que l'angle DCE & l'angle DOE ſoient chacun droit; il s'enſuit que les diametres conjugués Mm, Ss, qui font entr'eux un angle droit, ſeront les mêmes que les axes; & qu'il n'y en peut avoir que deux.

* *Art. 62.*

Maintenant pour en déterminer la grandeur, il n'y a qu'à tirer les droites OD, OE; & par les points N, R, où elles rencontrent le cercle qui a pour rayon OA, mener les paralleles NM, RS. Car il eſt évident * que les points M, S, où elles rencontrent les droites CD, CE, appartiendront à l'Ellipſe qui a pour diametres conjugués les lignes Aa, Bb; & qu'ainſi ils ſeront les extremités de ſes axes.

* *Art. 63.*

COROLLAIRE.

65. SI l'on propoſoit de trouver deux diametres conjugués Mm, Ss, qui fiſſent entr'eux un angle MCS égal à un angle donné ; deux autres diametres conjugués Aa, Bb, étant donnés. Il eſt viſible que la queſtion ſe reduiroit à trouver ſur la ligne DE donnée de poſition ; deux points D ; E, tels que menant aux deux points O, C, donnés hors cette ligne, les droites DO, OE, CD, CE, l'angle DOE fût droit, & l'angle DCE égal à l'angle donné. Mais comme la ſolution de ce Problême eſt aſſez difficile, on l'a renvoyée dans le 10e Livre, & on a ſuivi ici une autre voye, qui eſt plus ſimple ; c'eſt de trouver d'abord les deux axes, & de s'en ſervir enſuite pour trouver les deux diametres conjugués qu'on demande, comme l'on va enſeigner dans la Propoſition ſuivante.

PROPOSITION XII.

Problême.

66. LES *deux axes* Aa, Bb, *d'une Ellipſe étant donnés* ; *trouver deux diametres conjugués* Mm, Ss, *qui faſſent entr'eux l'angle* MCS *égal à un angle donné.* FIG. 28. 29.

Je ſuppoſe que les diametres Mm, Ss, ſoient en effet ceux qu'on demande, & qu'ils rencontrent aux points D, E, la ligne droite indéfinie DE menée par l'extremité A du petit axe Aa parallellement au grand Bb. Et ayant tiré du centre C de l'Ellipſe, la ligne CF, qui faſſe avec DE au point F l'angle CFE égal à l'angle donné MCS, je nomme les donnees CA, t ; CB, c ; AF, a ; & l'inconnuë AE, z ; ce qui donne $AD = \frac{ct}{z}$, $CE = \sqrt{tt+zz}$ à cauſe du triangle rectangle CAE. Cela poſé. * *Art.* 62.

Les triangles FEC, CED, ſeront ſemblables ; puiſque l'angle au point E eſt commun, & que l'angle CFE a

été fait égal à l'angle MCS : c'eſt pourquoi $FE\ (z-a) : EC\ (\sqrt{tt+zz}) :: EC\ (\sqrt{tt+zz}).\ ED\ (z+\frac{cc}{z})$. D'où en multipliant les extrêmes & les moyens, l'on forme l'égalité $zz-az+cc-\frac{acc}{z}=tt+zz$; & effaçant de part & d'autre zz, multipliant enſuite par z, & diviſant par a, il vient $zz-\frac{cc}{a}z+\frac{tt}{a}z+cc=o$, Et en faiſant (pour faciliter le calcul) $\frac{cc-tt}{a}=2b$, on changera l'égalité précedente en celle ci $zz-2bz+cc=o$, ou $zz-2bz+bb=bb-cc$ ce qui donne en extrayant de part & d'autre la racine quarré $z-b$ ou $b-z=\sqrt{bb-cc}$, & par conſéquent l'inconnuë $AE\ (z)=b\pm\sqrt{bb-cc}$. Voici maintenant la conſtruction que cette derniere égalité fournit.

Ayant prolongé le petit axe Aa juſqu'au point O, en ſorte que AO ſoit égale à la moitié CB du grand ; ſoit tirée CF, qui faſſe avec DE menée par le point A parallelement à Bb, l'angle CFE égal à l'angle donné. Ayant joint OF, ſoient tirées les droites OH, CG, perpendiculaires ſur OF, CF, qui rencontrent DE aux points H, G (on n'a point marqué dans les figures 28 & 29, les points H, G, ſur la ligne DE ; parce que ces figures auroient été trop grandes, & que d'ailleurs il eſt facile de les y imaginer). Soit décrit du centre O, & du rayon OK, égal à la moitié de GH, partie de AD prolongée, compriſe entre G & H, un arc de cercle qui coupe DE aux points K, K, & ayant pris ſur DE les parties KD, KE, égales chacune à KO, ſoient tirées par le centre C de l'Ellipſe, les droites DC, EC. Je dis que les diametres cherchés Mm, Ss, ſont ſitués ſur ces lignes.

Car à cauſe des angles droits FAC, FCG, & FAO, FOH, on aura $AG=\frac{tt}{a}$, $AH=\frac{cc}{a}$; & partant $GH=\frac{cc-tt}{a}=2b$. Le rayon OK qui eſt égal à la moitié de HG, ſera donc égal à b ; & à cauſe du triangle rectangle

gle OAK ; on aura $AK = \sqrt{bb - cc}$, & AE ou $KE + AK = b + \sqrt{bb - cc}$, & AD ou $KD + AK = b + \sqrt{bb - cc}$. Or cela posé, si l'on multiplie la valeur de AE par celle de AD, il vient $AE \times AD = cc = \overline{CB}^2$; & partant * les diametres Mm, Ss, sont conjugués. Mais le rectangle de $AE + AD$ ou DE $(2b)$ par $AE - AF$ ou EF $(b + \sqrt{bb - c} - a)$ est $= 2bb + 2b\sqrt{bb - cc} - 2ab = 2bb + 2b\sqrt{bb - cc} + tt - cc$ en mettant pour $2ab$ sa valeur $cc - tt$; & à cause du triangle rectangle CAE le quarré $\overline{CE}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{CA}^2 = 2bb + 2b\sqrt{bb - cc} + tt - cc = DE \times EF$: ce qui donne $FE. EC :: EC. ED$. Et partant les triangles FEC, CED, seront semblables ; puisqu'ils ont l'angle au point E commun, & que leurs côtés autour de cet angle sont proportionnels. L'angle MCS sera donc égal à l'angle donné CFE. C'est ce qui restoit à démontrer. * Art. 62.

Maintenant pour avoir la grandeur CM, CS, des deux demi-diametres cherchés ; il n'y a qu'à tirer les lignes OD, OE, & mener par les points N, R, où elles rencontrent le cercle qui a pour rayon OA, les paralleles NM, RS, à OC. Car il est visible * que les points M, S, où elles rencontrent les droites CD, CE, seront à l'Ellipse, & détermineront par consequent les extremités de ces diametres. * Art. 63.

COROLLAIRE I.

67. Il suit de cette construction, 1°. Qu'afin que le Problême soit possible, il faut que OK $\left(\frac{cc - tt}{2a}\right)$ surpasse ou soit égale à AO (c) ; car autrement le cercle décrit du rayon OK, ne rencontreroit la ligne DE en aucun point, ce qui est neanmoins necessaire pour la construction.

2°. Que lorsque OK surpasse OA, on trouve toûjours par le moyen des deux points K, K, deux differens diametres conjugués Mm, Ss, qui satisfont également : mais qu'alors le diametre Ss de la figure 29 est égal au diametre Mm de la figure 28. & semblablement posé de l'autre côté de l'axe Aa ; parce que AE de la figure

29. eſt égal à AD de la figure 28. Et de même que le diametre Mm de la figure 29. eſt égal au diametre Ss de la figure 28. & ſemblablement poſé de l'autre côté de l'axe Aa; parce que AD de la figure 29. eſt égal à AE de la figure 28. C'eſt à dire que les deux differens diametres conjugués Mm, Ss, qui ſatisfont également au Problême, ſont ſemblablement poſés de part & d'autre de l'axe Aa, & que dans ces deux differentes poſitions leurs grandeurs demeurent la même.

3°. Que lorſque $OK = OA$, les deux points d'interſection K, K, ſe réuniſſent au point touchant A; & qu'ainſi il n'y a alors qu'à prendre les parties AE, AD, égales chacune à la moitié CB du grand axe : d'où l'on voit qu'il ne peut y avoir alors qu'une ſolution, & que les deux diametres conjugués Mm, Ss, qui ſatisfont, ſont égaux entr'eux.

FIG. 30.

COROLLAIRE II.

68. IL eſt clair auſſi que plus AF (a) eſt grande, plus l'angle obtus donné CFE l'eſt auſſi, & plus au contraire la ligne OK $\left(\frac{cc-tt}{2a}\right)$ diminuë : de ſorte que AF étant la plus grande qu'il eſt poſſible, l'angle obtus CFE, ſera auſſi le plus grand; & au contraire la ligne OK, ſera la moindre, c'eſt à dire égale à AO. Or ſi l'on mene alors les droites Ba, ab; les triangles rectangles aCB, CAD. aCb, CAE, ſeront tous égaux entr'eux; puiſque les lignes AE, AD, ſont égales chacune à la moitié CB ou Cb de l'axe Bb, & que CA eſt égal à Ca. L'angle ACM, ſera donc égal à l'angle CaB, & l'angle ACS à l'angle Cab; & partant l'angle donné MCS ou CFE, ſera auſſi égal à l'angle Bab. D'où l'on voit voit :

FIG. 28. 29. & 30.

1°. Que ſi l'on mene de l'une des extremités a du petit axe Aa aux extremités B, b, du grand, les lignes aB, ab; l'angle obtus donné CFE, doit être égal ou moindre que l'angle Bab, afin que* le Problême ſoit poſſible.

* *Art.* 67.

2°. Que lorſqu'il lui eſt égal, comme dans la figure 30.

il n'y a que deux diametres conjugués *M m*, *S s*, qui satisfassent, lesquels sont égaux entr'eux.

3°. Que lorsqu'il est moindre, comme dans les fig. 28 & 29. il y a toûjours deux differens diametres conjugues qui satisfont également ; qu'ils sont semblablement posés de part & d'autre du petit axe, cet angle demeurant le même entr'eux, & que leur grandeur demeure aussi la même dans ces deux differentes positions.

PROPOSITION XIII.

Problême.

69. DEUX *diametres conjugués* A a, B b, *d'une Ellipse étant donnés ; la décrire par un mouvement continu.*

PREMIERE MANIERE.

On cherchera * les deux axes, & on la décrira ensuite selon l'article 36. * *Art.* 64

SECONDE MANIERE.

Ayant mené par l'une des extremités *A* de l'un des diametres donnés *A a*, une perpendiculaire *AH* sur l'autre *B b*, on prendra sur cette ligne la partie *AQ* de part ou d'autre du point *A* égale à *CB*. Et ayant tiré la ligne *CQ*, on fera glisser la ligne *GF* égale à *HQ* par ses extremités le long des lignes *B b*, *CQ* (prolongées de part & d'autre du centre *C* autant qu'il sera necessaire) jusqu'à ce qu'après avoir parcouru successivement les quatre angles faits par ces deux lignes, elle revienne dans la même situation d'où elle étoit partie. Je dis que si l'on prend *GM* égale à *AQ*, le point *M* décrira dans ce mouvement l'Ellipse requise. FIG. 31. & 32.

Car menant *GP* parallele à *QA*, qui rencontre en *P* le diametre *A a*, & en *O* le diametre *B b* ; les triangles semblables *CHQ*, *COG*, & *CAQ*, *CPG*, donneront *CQ. CG* :: *AQ* ou *GM. GP* :: *HQ* ou *GF. GO*. Et par consequent la ligne *PM* sera parallele au diametre *B b*. Cela posé.

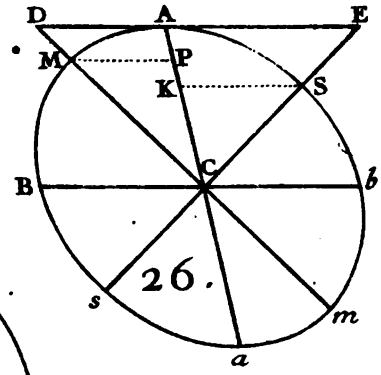
Si l'on nomme les données CA, t; AQ ou CB ou Cb, c; & les inconnuës CP, x; PM, y; on aura $CA\ (t)\ CP\ (x) :: AQ\ (c)\ GP = \frac{cx}{t}$. Et le triangle rectangle GPM donnera $\overline{PM}^2 = \overline{GM}^2 - \overline{GP}^2$, c'eſt à dire en termes analytiques $yy = cc - \frac{ccxx}{tt}$. La ligne PM ſera donc * une ordonnée au diametre Aa dans l'Ellipſe qui a pour diametres coniugués les lignes Aa, Bb. Donc &c.

* *Art.* 41. & 35.

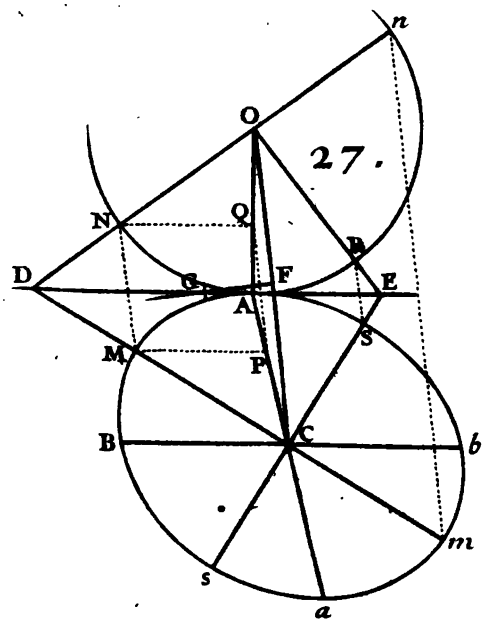
FIG. 33. Si les deux diametres conjugués Aa, Bb, étoient les deux axes, il eſt clair que les lignes AQ, CQ, tomberoient ſur le diametre Aa qui ſeroit l'un des axes, & que le point H tomberoit ſur le centre C. D'où l'on voit qu'il faudroit prendre alors GF égale à CQ, ſomme ou difference des deux demi axes CA, CB; & la faire gliſſer par ſes extremités le long des axes Aa, Bb, prolonges s'il eſt neceſſaire.

Comme les lignes Aa, Bb, s'entrecoupent à angles droits au point C; il eſt clair qu'en quelque ſituation que ſe trouve la droite GF pendant qu'elle gliſſe le long de ces lignes, le cercle qui auroit cette ligne pour diametre, paſſeroit toûjours par le point C; & qu'ainſi la ligne CD qui paſſe par le point D milieu de FG, ſera toûjours égale à DF, puiſque les lignes CD, DF, DG, ſeront toûjours des raïons de ce cercle. Delà naît la deſcription ſuivante.

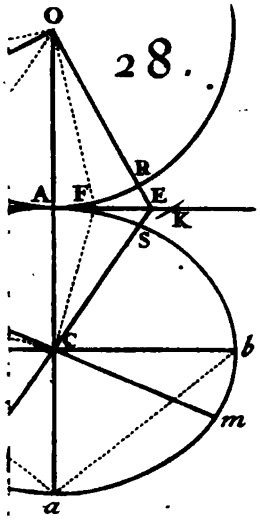
Soient deux lignes droites CD, DF, égales chacune à la moitié de CQ, ſomme ou difference des deux demi-axes CB, CA; attachées l'une à l'autre par leur extremité commune D, en ſorte qu'elles ſe puiſſent mouvoir autour de ce point, comme les jambes d'un compas autour de ſa tête. Soit attachée l'extremité C de la droite CD dans le centre de l'Ellipſe; & ſoit entenduë l'extremité F de l'autre droite FD, ſe mouvoir le long de l'axe Bb, en entraînant avec elle la ligne DC mobile autour du point fixe C. Il eſt clair que ſi l'on prend ſur FD (prolongée, s'il eſt neceſſaire) la partie FM égale à CA, le



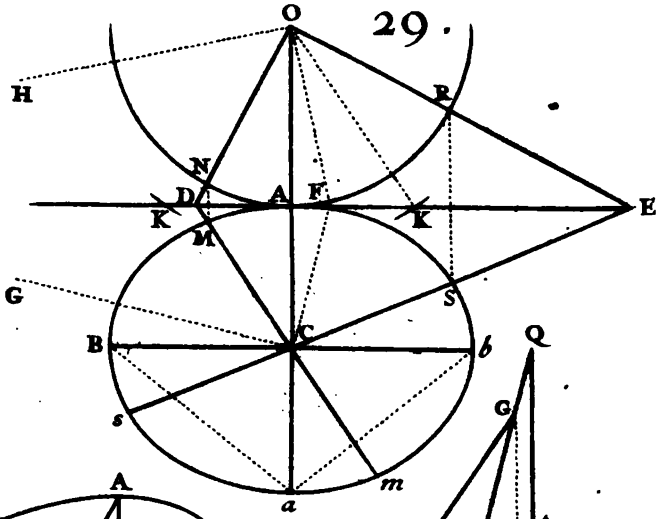
26.



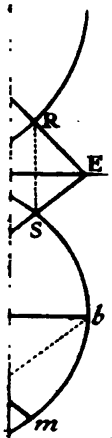
27.

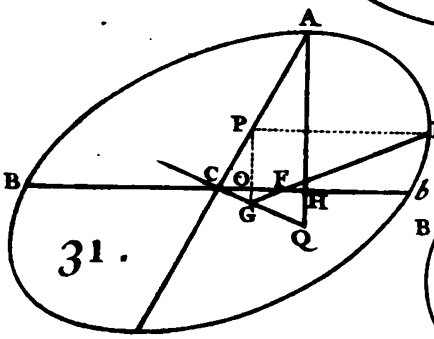


28.

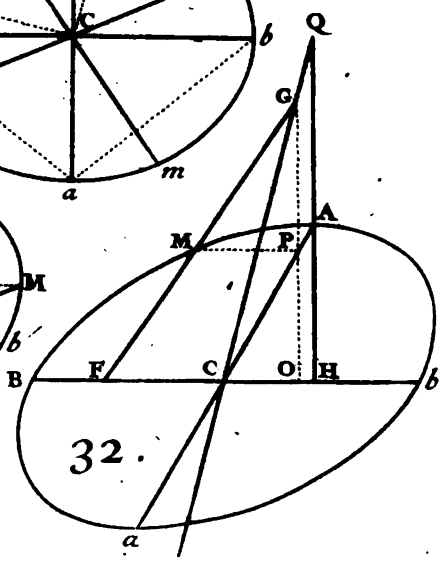


29.



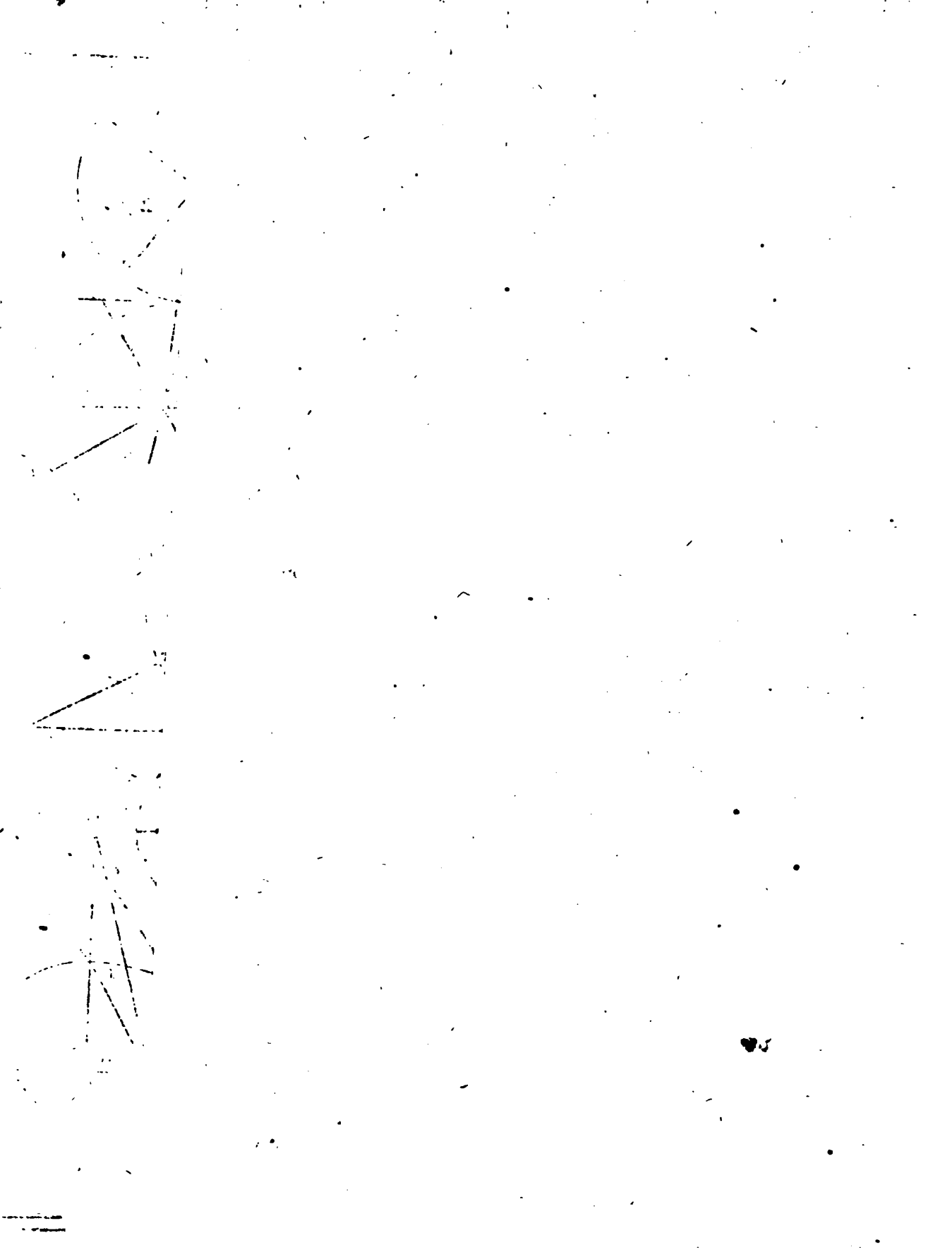


31.



32.

Planche 4. pag. 44.



point *M* décrira dans ce mouvement l'Ellipſe qu'on cherche.

PROPOSITION XIV.

Problême.

70. DEUX *diametres conjugués* A a, B b, *d'une Ellipſe étant donnés ; la décrire par pluſieurs points.*

PREMIERE MANIE'RE.

Ayant mené par l'une des extremités *A* de l'un des diametres donnés *A a*, une parallele indéfinie *D A D* à ſon conjugué *B b*, on tirera *A O* perpendiculaire à *A D*, & égale à la moitié *C B* du diametre *B b* ; on joindra *O C* ; & on décrira un cercle du centre *O*, & du rayon *O A*. Cela fait on menera librement de part & d'autre de *C A*, autant de lignes *C D*, *C D*, &c. qu'on voudra ; & ayant tiré des points *D*, *D*, &c. où elles rencontrent la ligne *D A D*, au centre *O*, les lignes *D O*, *D O*, &c. qui coupent la circonference du cercle aux points *N*, *N*, &c. on menera des droites *N M*, *N M*, &c. paralleles à *O C*, leſquelles rencontrent aux points *M*, *M*, &c. les droites correſpondantes *C D*, *C D*, &c. ſur leſquelles on marquera de l'autre côté du centre *C* des points *m*, *m*, &c. qui en ſoient également éloignés. Il eſt évident * que la ligne courbe qui paſſera par tous les points *M*, *M*, &c ; *m*, *m*, &c. ainſi trouvés, aura pour diametres conjugués les droites *A a*, *B b*. FIG. 34. * *Art.* 63.

SECONDE MANIE'RE.

Ayant pris ſur l'un des demi-diametres *C B*, de petites parties *C E*, *E E*, &c. égales entr'elles, de telle grandeur qu'on voudra, & autant que ce demi-diametre en pourra contenir ; on lui menera les perpendiculaires *E D*, *E D*, &c, qui rencontrent la circonference circulaire décrite du centre *C* & du raïon *C B*, aux points *D*, *D*, &c. Ayant joint *A B*, on tirera par celui des points *E*, qui eſt le plus proche du centre *C*, la ligne *E P* parallele à *A B*, FIG. 35.

qui rencontre CA au point P. On prendra ſur le diametre Aa de part & d'autre du centre C, autant de parties PP, PP, &c. égales à CP, qu'il en pourra contenir; & on menera par tous les points P, P, &c. des paralleles MPM, MPM, &c. au diametre Bb, ſur chacune deſquelles on prendra de part & d'autre du point P, des parties PM, PM, égales chacune à ſa correſpondante ED. Je dis que la ligne courbe qui paſſe par tous ces points M, ſera l'Ellipſe qu'on demande.

Car nommant les données CA, t; CB ou CD, c; & les indéterminées CP, x; PM, y; on aura à cauſe des triangles ſemblables CAB, CPE, cette proportion $CA\ (t).\ CB\ (c)::\ CP\ (x).\ CE = \frac{cx}{t}$. Et à cauſe du triangle CED rectangle en E, le quarré $\overline{ED}^2$ ou $\overline{PM}^2\ (yy) = \overline{CD}^2\ (cc) - \overline{CE}^2\ (\frac{ccxx}{tt})$. La ligne PM ſera donc * une ordonnée au diametre Aa. Et comme cette démonſtration convient à toutes les lignes PM; puiſque chaque CP eſt toûjours à ſa correſpondante CE, en raiſon de CA à CB: il s'enſuit que la Courbe qui paſſe par tous les points M trouvés comme cy-deſſus, ſera l'Ellipſe qu'on demande.

* Art. 41. & 55.

LIVRE TROISIEME.

De l'Hyperbole.

DÉFINITIONS.

1.

AYANT attaché ſur un plan en un point *f* l'une des extremités d'une longue regle *fMO*, en ſorte qu'elle puiſſe tourner librement autour de ce point fixe *f*, comme centre ; on attachera à ſon autre extremité *O*, le bout d'un fil *OMF*, dont la longueur doit être moindre que celle de la regle, & duquel l'autre bout ſera attaché en un autre point *F*, pris auſſi ſur ce plan. Maintenant, ſi l'on fait tourner la regle *fMO* autour du point fixe *f*, & qu'en même temps l'on ſe ſerve d'un ſtile *M* pour tenir le fil *OMF*, toûjours également tendu, & ſa partie *MO* toute jointe & comme collée contre le bord de la regle : la ligne courbe *AX* décrite dans ce mouvement, eſt une portion d'*Hyperbole*. FIG. 36.

Si l'on renverſe la regle de l'autre côté du point *F*, on décrira de la même ſorte l'autre portion *AZ* de la même Hyperbole.

Mais, ſi ſans changer la longueur de la regle, ni celle du fil, on attache l'extremité de la regle en *F*, & celle du fil en *f*, on décrira en la même ſorte une autre ligne courbe *xaz* oppoſée à la premiere *XAZ*, qui eſt encore appellée *Hyperbole*, & les deux enſemble ſont nommées *Hyperboles oppoſées*.

2.

Les deux points fixes *F*, *f*, ſont nommés les *Foyers*.

3.

La ligne *Aa*, qui paſſe par les deux foyers *F*, *f*, & qui eſt terminée de part & d'autre par les Hyperboles oppoſées, eſt appellée le *premier Axe*.

4.

Le point *C*, qui diviſe par le milieu le premier axe *Aa*, eſt nommé le *Centre*.

5.

Si l'on mene par le centre C une perpendiculaire indéfinie Bb au premier axe Aa; & que du point A, comme centre, & de l'intervalle CF, on décrive un arc de cercle qui la coupe aux points B, b: la partie Eb de cette perpendiculaire, eſt appellée le *ſecond Axe*.

6.

Les deux axes Aa, Bb, ſont appellés enſemble *Conjugués*; de ſorte que le premier axe Aa, eſt dit *Conjugué* au ſecond Bb; & reciproquement le ſecond Bb, *Conjugué* au premier Aa.

7.

Les lignes MP, MK, menées des points M des Hyperboles oppoſées parallelement à l'un des axes conjugués, & terminées par l'autre, ſont appellées *Ordonnées* à cet autre axe. Ainſi MP eſt *Ordonnée* au premier axe Aa, & MK au ſecond Bb.

8.

La troiſiéme proportionnelle aux deux axes, eſt appellée *Parametre* de celui qui eſt le premier terme de la proportion. Ainſi ſi l'on fait comme le premier axe Aa, eſt au ſecond axe Bb, de même le ſecond axe Bb, à une troiſiéme proportionnelle p; cette ligne p ſera le Parametre du premier axe Aa.

9.

Toutes les lignes qui paſſent par le centre C, ſont appellées *Diametres*: ceux qui rencontrent les Hyperboles oppoſées, *premiers Diametres*, & ceux qui ne les rencontrent point, quoique prolongées à l'infini, *ſeconds Diametres*.

10.

Une ligne droite qui ne rencontre une Hyperbole qu'en un ſeul point, & qui étant continuée de part & d'autre, n'entre point dedans, mais tombe au dehors, eſt appellée *Tangente* en ce point.

REMARQUE.

REMARQUE.

71. ON a dit dans la premiere définition que la longueur du fil FMO doit être moindre ou plus grande que celle de la regle fMO; dont la raiſon eſt que s'il étoit égal à cette regle, le ſtile M décriroit dans ce mouvement, une ligne dont tous les points M ſeroient également diſtants des deux points F, f; puiſque retranchant du fil & de la regle, la partie commune MO, les reſtes MF, Mf, ſeroient toûjours égaux entr'eux. D'où il eſt viſible que cette ligne ne ſeroit autre qu'une ligne droite indéfinie Bb, menée perpendiculairement à la droite Ff par ſon point de milieu C. FIG. 37.

COROLLAIRE I.

72. IL ſuit de la définition premiere, que ſi l'on mene d'un point quelconque M, de l'une des Hyperboles oppoſées, aux deux foyers F, f, les droites MF, Mf; leur difference ſera toûjours la même. Car elle ſera toûjours égale à la difference qui ſe trouve entre la longueur de la regle & celle du fil. FIG. 36.

COROLLAIRE II.

73. LORSQUE le point M tombe en A, il eſt viſible que MF devient AF, & que Mf devient Af; & de même lorſque le point M tombe en a, en décrivant l'Hyperbole oppoſée xaz; il eſt encore viſible que MF devient aF, & que Mf devient af. Donc puiſque la difference de ces deux droites eſt par tout la même, on aura $Af - AF$ ou $Ff = AF - aF = aF - af$ ou $Ff = af$; & partant $AF = af$. D'où il ſuit :

1°. Que la diſtance Ff des foyers, eſt diviſée en deux parties égales par le centre C; puiſque $CA + AF$ ou $CF = Ca + af$ ou Cf.

2°. Que la difference des deux droites MF, Mf, eſt toûjours égale au premier axe Aa; puiſque dans l'Hyperbole XAZ, on a toûjours $Mf - MF = Af - AF$ ou

$Af - af$; & que dans ſon oppoſée xaz, on a auſſi toûjours $MF - Mf = aF - af$ ou $aF - AF$.

COROLLAIRE III.

74. IL ſuit de la définition cinquiéme.

1°. Que le ſecond axe Bb, eſt diviſé en deux parties égales par le centre C ; car les triangles rectangles ACB, ACb, ſeront égaux, puiſqu'ils ont des hypothenuſes égales AB, Ab, & le côté AC commun.

2°. Que ſi l'on prend ſur le ſecond axe Bb, la partie CE égale à la moitié CA du premier, & qu'on tire l'hypothenuſe AE : le ſecond axe Bb ſera plus grand, égal, ou moindre que le premier Aa ; ſelon que la droite CE, eſt plus grande, égale, ou moindre que l'hypothenuſe AE ; parce que l'hypothenuſe Ab, priſe égale à CF, ſe trouvera auſſi pour lors plus grande, égale, ou moindre que l'hypothenuſe AE.

3°. Que ſi l'on prend ſur le premier axe Aa de part & d'autre du centre C, les parties CF, Cf, égales chacune à l'hypothenuſe AB du triangle rectangle CAB, formé par les deux demi-axes CA, CB : les points F, f, ſeront les deux foyers.

COROLLAIRE IV.

75. LES mêmes choſes étant poſées, ſi l'on nomme CF ou AB, m ; CA, ou Ca, t ; le triangle rectangle ACB, donnera $\overline{BC} = mm - tt$. Or $AF = m - t$, & $Fa = m + t$; & partant $AF * Fa = mm - tt$. D'où il eſt évident que le quarré de la moitié CB du ſecond axe Bb, eſt égal au rectangle de AF par Fa parties du premier axe Aa, priſes entre l'un des foyers F, & ſes deux extremités, A, a.

COROLLAIRE V.

76. IL ſera maintenant facile de décrire les Hyperboles oppoſées dont les deux axes Aa, Bb, ſont donnés, & dont l'on ſçait que l'axe Aa doit être le premier. Car

ayant trouvé * sur le premier axe Aa, les foyers F, f, on attachera dans le point F, le bout d'un fil FMO, duquel l'autre bout O, sera lié à l'extremité d'une longue regle OMf, mobile sur son autre extremité f autour du foyer f, & dont la longueur OMf doit * être moindre ou plus grande que la longueur du fil OMF, de la ligne Aa. Ayant ensuite décrit par le moyen de cette regle & de ce fil, deux Hyperboles opposées XAZ, xaz, comme l'on a enseigné dans la définition premiere, il est évident qu'elles auront pour premier axe, la ligne Aa, & pour second, la ligne Bb. Et c'est ce qu'on demandoit. * *Art.* 74. * *Art.* 71.

Plus la regle OMf, sera longue, & plus les portions des Hyperboles opposées, qu'on décrira par le moyen de cette regle, seront grandes; de sorte qu'on les peut augmenter autant que l'on voudra, en augmentant également la longueur de la regle & celle du fil.

PROPOSITION I.

Theorême.

77. *Si l'on mene l'ordonnée* MP *au premier axe* A a, *& qu'on prenne sur cet axe prolongé la partie* AD *égale à* MF, *du côté du foyer* F *lorsque le point* M *tombe sur l'Hyperbole* XAZ, *& du côté du foyer* f *lorsqu'il tombe sur son opposée* xaz; *je dis que* CA. CF :: CP. CD.

Ayant nommé comme auparavant les données CA ou Ca, t; CF ou Cf, m; & de plus les indéterminées CP, x; PM, y; & l'inconnuë CD, z; on aura dans le premier cas, AD ou $MF = z - t$, aD ou $Mf = z + t$, $FP = x - m$ ou $m - x$ (selon que le point P tombe au dessous ou au dessus du foyer F), $Pf = x + m$: & dans le second cas, AD ou $MF = z + t$, aD ou $Mf = z - t$, $FP = x + m$, $Pf = x - m$ ou $m - x$ selon que le point P tombe au dessus ou dessous du foyer f.

Cela posé, le triangle rectangle MPF donnera $zz + 2tz + tt = yy + xx + 2mx + mm$; sçavoir, dans le premier

cas, + dans le ſecond ; & l'autre triangle rectangle MPF donnera $zz \pm 2tz + tt = yy + xx \pm 2mx + mm$; ſçavoir, + dans le premier, & — dans le ſecond.

Maintenant, ſi l'on retranche par ordre dans le premier cas, chaque membre de la premiere équation de ceux de la ſeconde ; & au contraire dans le ſecond cas, chaque membre de la ſeconde de ceux de la premiere, il vient $4tz = 4mx$; d'où l'on tire $CD\,(z) = \frac{mx}{t}$. Donc $CA\,(t).CF\,(m) :: CP\,(x)\ CD\,(z)$. *Ce qu'il falloit, &c.*

COROLLAIRE.

78. IL eſt évident que ſi l'on nomme les données CA ou Ca, t ; CF ou Cf, m ; & l'indéterminée CP, x ; on aura toûjours $MF = \frac{mx}{t} - t$, & $Mf = \frac{mx}{t} + t$, lorſque le point M tombe ſur l'Hyperbole XAZ, qui a pour foyer le point F. & qu'au contraire on aura $MF = \frac{mx}{t} + t$, & $Mf = \frac{mx}{t} - t$, lorſque le point M tombe ſur ſon oppoſée xaz, qui a pour foyer le point f.

PROPOSITION II.

Theorême.

79. LE *quarré d'une ordonnée quelconque* PM, *au premier axe* Aa, *eſt au rectangle de* AP *par* Pa, *parties de cet axe prolongé, comme le quarré de ſon conjugué* Bb, *eſt au quarré du premier axe* Aa.

Il faut prouver que $\overline{PM}^2 . AP * Pa :: \overline{Bb}^2 . \overline{Aa}^2$.

Les mêmes choſes étant poſées que dans la Propoſition précédente, ſi l'on met dans l'équation $zz \pm 2tz + tt = yy + xx \pm 2mx + mm$ que l'on a trouvée * par le moyen du triangle rectangle MPF, à la place de z, ſa valeur $\frac{mx}{t}$, on formera toûjours celle-cy $ttyy = mmxx - mmtt - ttxx + t^4$, laquelle étant réduite à une proportion, donne $\overline{PM}^2\,(yy).\ AP * Pa\,(xx - tt) ::$

* *Art. 77.*

$\overline{BC}$ * $(mm-tt)$. $\overline{CA}$ (tt) :: $\overline{Bb}$. $\overline{Aa}$. *Ce qu'il falloit démontrer.* * *Art.* 75.

COROLLAIRE I.

80. Si l'on mene une ordonnée MK au second axe Bb, lequel j'appelle $2c$; il est clair que $MK=CP$ (x). & que $CK=PM$ (y). Or $\overline{PM}$ (yy). $AP*Pa$ $(xx-tt)$ :: $\overline{Bb}$ $(4cc)$. $\overline{Aa}$ $(4tt)$. Et partant $4ccxx=4cctt+4ttyy$; ce qui donne cette proportionne $\overline{MK}$ (xx). $\overline{CK}+\overline{CB}$ $(yy+cc)$ :: $\overline{Aa}$ $(4tt)$. $\overline{Bb}$ $(4cc)$.

C'est à dire que le quarré d'une ordonnée quelconque MK au second axe Bb, est au quarré de CK, joint au quarré de CB moitié du second axe Bb, comme le quarré de son conjugué Aa, est au quarré de ce second axe Bb.

COROLLAIRE II. FONDAMENTAL.

81. Si l'on nomme le premier ou second axe Aa; $2t$; son conjugué Bb, $2c$; son parametre p; chacune de ses ordonnées PM, y; & chacune de ses parties CP, prises entre le centre & les rencontres des ordonnées, x; on aura toûjours * $\overline{PM}$ (yy). $\overline{CP}+\overline{CA}$ $(xx+tt)$ :: $\overline{Bb}$ $(4cc)$. $\overline{Aa}$ $(4tt)$ :: p. Aa $(2t)$. puisque selon la définition du parametre Aa $(2t)$. Bb $(2c)$ :: Bb $(2c)$. $p=\frac{4cc}{2t}$: où l'on doit observer que c'est le signe $-$ lorsque l'axe Aa est le premier, & qu'ainsi on peut substituer alors à la place de $\overline{CP}-\overline{CA}$, le rectangle $AP*Pa$ qui lui est égal; & au contraire que c'est le signe $+$ lorsque l'axe Aa est le second. D'où en multipliant d'abord les Extrêmes & les Moyens de la premiere proportion yy. $xx+tt$ :: $4cc$. $4tt$. ensuite de l'autre yy. $xx+tt$ :: p. $2t$. l'on tire $yy=\frac{ccxx}{tt}+cc$, & $yy=\frac{pxx}{2t}+\frac{1}{4}pt$. Or comme cette proprieté convient également à tous les points des Hyperboles oppofées, & qu'elle en

FIG. 38. & 39.

* *Art.* 79. & 80.

détermine la position par rapport aux axes ; il s'ensuit que l'équation $yy = \frac{ccxx}{tt} \mp cc$, ou $yy = \frac{pxx}{2t} \mp \frac{1}{2}pt$, en exprime parfaitement la nature par rapport à ses axes.

COROLLAIRE III.

82. Si l'on mene deux ordonnées quelconques MP, NQ à l'axe Aa, il est clair que $\overline{MP}^2 . \overline{NQ}^2 :: \overline{CP}^2 \mp \overline{CA}^2 . \overline{CQ}^2 \mp \overline{CA}^2$. Car $\overline{PM}^2 . \overline{CP}^2 \mp \overline{CA}^2 :: \overline{Bb}^2 . \overline{Aa}^2 :: \overline{QN}^2 . \overline{CQ}^2 \mp \overline{CA}^2$. Donc &c.

Il est bon de remarquer encore qu'on peut substituer à la place de $\overline{CP}^2 - \overline{CA}^2$, & $\overline{CQ}^2 - \overline{CA}^2$, les rectangles $AP \times Pa$, $AQ \times Qa$ qui leur sont égaux ; ce qu'il faut toûjours observer dans la suite.

COROLLAIRE IV.

83. Si l'on mene par un point quelconque P de l'un ou de l'autre axe Aa (prolongé lorsque c'est le premier) une parallele MPM à son conjugué Bb, elle rencontrera une Hyperbole ou les Hyperboles opposées en deux point M, M, également éloignés de part & d'autre du point P, & non en davantage. Car afin que les points M, M, soient à une Hyperbole ou aux Hyperboles opposées, il faut * que les quarrés de PM (y) pris de part & d'autre de l'axe Aa, soient égaux chacun à la même quantité $\frac{ccxx}{tt} \mp cc$.

* Art. 81.

COROLLAIRE V.

Fig. 38. & 39. 84. Il suit de ce que $yy = \frac{ccxx}{tt} \mp cc$, que plus CP (x) prise de part ou d'autre du centre C, devient grande plus aussi chaque ordonnée PM (y) prise de part & d'autre de l'axe Aa, augmente, & cela à l'infini ; & qu'au contraire plus CP (x) devient petite, plus aussi PM (y) diminuë ; de sorte que (*fig.* 38.) CP (x) étant égale à CA ou Ca (t) lorsque l'axe Aa, est le premier,

PM (y) devient alors nulle ou zero ; & que (*fig.* 39.) CP (x) étant nulle ou zero, lorſque l'axe Aa eſt le ſecond, chaque PM (y) qui devient alors CB ou Cb (c), eſt la moindre de toutes les ordonnées PM (y) priſes de part & d'autre du centre. D'où il eſt clair :

1°. Que ſi l'on mene (*fig.* 39.) par les extremités B, b, du premier axe Bb, des paralleles au ſecond axe Aa ; elles ſeront tangentes en ces points.

2°. Que les Hyperboles oppoſées s'éloignent de part & d'autre de plus en plus à l'infini de leurs axes conjugués, en commençant par les extremités du premier : avec cette difference neanmoins que le premier axe rencontre chacune des Hyperboles oppoſées en un point, & qu'étant prolongé il paſſe au dedans ; au lieu que le ſecond tombe tout entier entre les Hyperboles oppoſées, & ne les rencontre jamais, quoique prolongé à l'infini.

COROLLAIRE VI.

85. IL ſuit encore de ce que $yy = \frac{ccxx}{ff} + cc$, que ſi l'on prend les points P, P, également éloignés de part & d'autre du centre C, les ordonnées PM, PM, ſeront égales. D'où il eſt clair que ſi une ligne droite MM, terminée par une Hyperbole ou par des Hyperboles oppoſées, eſt coupée en deux également par un axe Bb en un point K autre que le centre, elle ſera parallele à ſon conjugué Aa. Car menant des paralleles MP, MP, à l'axe Bb, la ligne PP, ſera coupée par le milieu en C, puiſque MM l'eſt en K ; & partant les ordonnées PM, PM, ſeront égales. La droite MM ſera donc parallele à l'axe Aa.

COROLLAIRE VII.

86. SI l'on conçoit que le plan ſur lequel les Hyperboles oppoſées ſont tracées, ſoit plié le long de l'axe Aa, en ſorte que ſes deux parties ſe joignent ; il eſt clair (*fig.* 39.) lorſque l'axe Aa eſt le ſecond, que les deux

Hyperboles oppoſées tomberont exactement l'une ſur l'autre ; ſçavoir, les points B, M, &c. ſur les points b, M, &c. puiſque * toutes les perpendiculaires Bb, MM à cet axe, ſont coupées par le milieu aux points C, P, &c.

* *Art.* 83.

Par la même raiſon *(fig.* 38.*)* lorſque l'axe Aa eſt le premier, les portions des Hyperboles oppoſées qui ſont de part & d'autre de cet axe, tomberont exactement l'une ſur l'autre.

AVERTISSEMENT.

On a ſuivi juſqu'ici la même methode que dans l'Ellipſe, & on auroit pû la continuer juſqu'à la fin ; mais comme il faut néceſſairement parler de certaines lignes particulieres à l'Hyperbole, & qu'on peut par leur moïen prouver les mêmes choſes d'une maniere plus aiſée, on a pris ce dernier parti.

DE'FINITIONS.

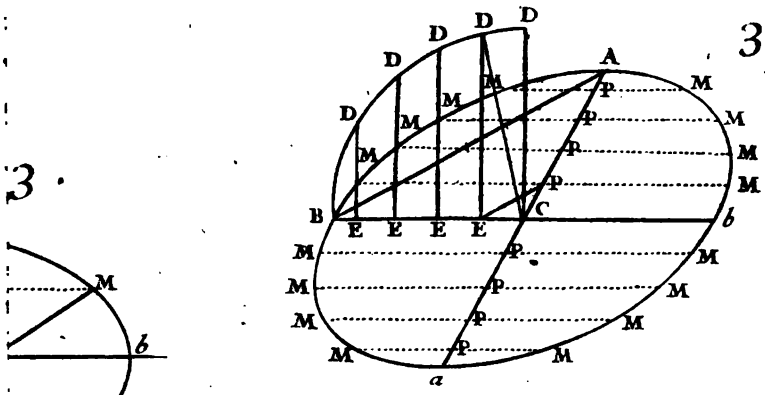
II.

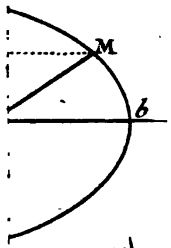
FIG. 40. Si l'on mene du centre C deux droites indéfinies CG, Cg, paralleles aux lignes Ab, AB, menées de l'extremité A du premier axe Aa, aux deux extremités B, b, du ſecond ; ces deux droites ſeront appellées les *Aſymptotes* de l'Hyperbole MAM ; & ſi on les prolonge indéfiniment de l'autre côté du centre, elles ſeront nommées les *Aſymptotes* de l'Hyperbole oppoſée MaM.

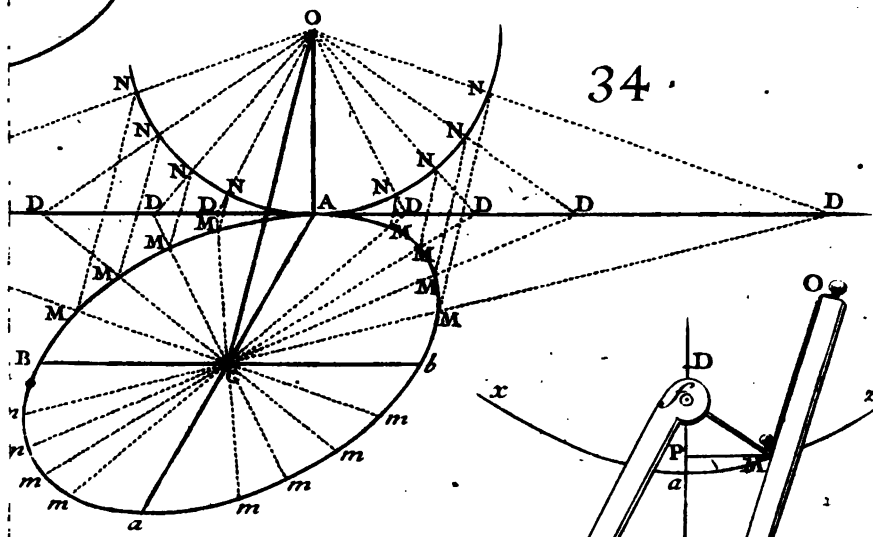
12.

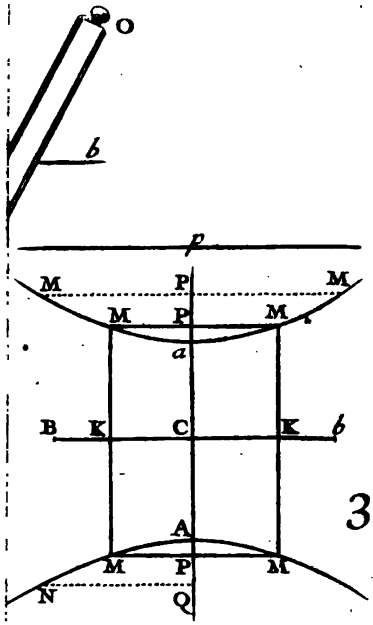
Le quarré de la partie CG, ou Cg, d'une aſymptote, compriſe entre le centre C, & la rencontre de la ligne AB, ou Ab, menée de l'extremité A du premier axe, à l'extremité B, ou b, du ſecond, eſt appellé la *Puiſſance* de l'Hyperbole MAM, ou de ſon oppoſée MaM.

COROLLAIRE I.

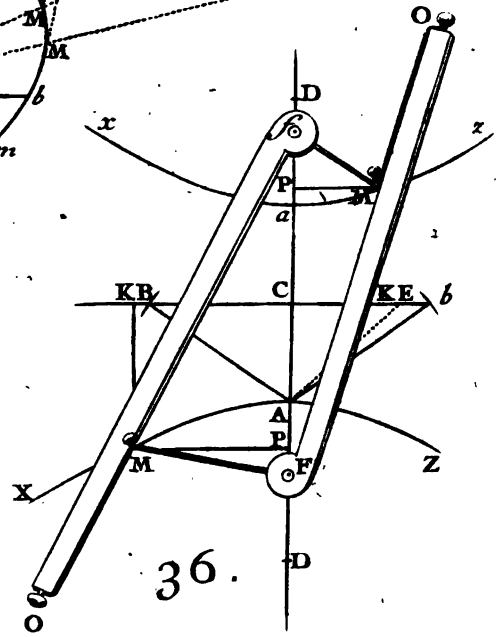

35.
A
B
C
D
E
M
P
a
b


3.
M
b


34.
O
N
D
A
M
B
C
b
a
m


O
b
p
M
P
a
B
K
C
A
N
Q

38.


O
D
x
z
P
M
a
KB
C
KE
b
A
X
Z
F

36.

COROLLAIRE I.

87. IL eſt évident que l'angle GCg, fait par les aſymptotes d'une Hyperbole, ou ſon égal BAb, eſt moindre, égal, ou plus grand qu'un droit, ſelon que le ſecond axe Bb eſt moindre, égal, ou plus grand que le premier Aa. Car lorſque le premier axe Aa ſurpaſſe le ſecond Bb, ſa moitié CA, ſurpaſſe la moitié CB du ſecond; & par conſéquent dans le triangle rectangle CAB, l'angle CAB eſt moindre qu'un demi droit. Les deux angles égaux CAB, CAb, qui font enſemble l'angle BAb, ſeront donc moindres qu'un droit. Les deux autres cas ſe démontrent de la même maniére.

COROLLAIRE II.

88. A CAUSE des triangles ſemblables BAb, BGC, il eſt clair que la ligne AB eſt diviſée par l'aſymptote CG en deux parties égales au point G, & que CG eſt la moitié de AB; puiſque BC eſt la moitié de Bb. On prouvera de même que Ab eſt diviſée par l'aſymptote Cg en deux parties égales au point g, & que Cg eſt la moitié de Ab. Donc toutes les lignes CG, GA, GB, Cg, gA, gb, ſont égales entr'elles; puiſqu'elles ſont égales chacune à la moitié de l'une ou l'autre des lignes AB, Ab, que l'on ſçait être égales entr'elles, ſuivant la définition 5e.

COROLLAIRE III.

89. LA puiſſance d'une Hyperbole eſt égale à la quatriéme partie de la ſomme des quarrés des deux demi-axes. Car nommant CA, t; CB, c; CG, m; on aura * $BA = 2m$, & à cauſe du triangle rectangle ACB, le quarré $\overline{AB}^2$ $(4mm) = tt + cc$. Et par conſéquent $\overline{CG}^2$ $(mm) = \frac{tt+cc}{4}$. * Art. 88.

PROPOSITION III.

Theorême.

FIG. 40. 90. SI *l'on mene par un point quelconque* M *de l'une ou de l'autre des Hyperboles oppoſées, une ligne droite* R r *perpendiculaire au premier axe* A a *qu'elle rencontre en* P, *& terminée par les aſymptotes en* R *&* r; *je dis que le rectangle de* R M *par* M r, *eſt égal au quarré de* B C, *moitié du ſecond axe* B b.

Il faut prouver que R M × M r = $\overline{BC}^2$.

Nommant les connuës CA, t; CB, c; & les indéterminées CP, x; PM, y; les triangles ſemblables ACB, CPr, & ACb, CPR, donnent $CA(t).CB$ ou $Cb(c)::CP(x).Pr$, ou $PR=\frac{cx}{t}$. Donc RM, ou $PR \mp PM = \frac{cx}{t} \mp y$; & Mr, ou $Pr \mp PM = \frac{cx}{t} \mp y$. Et par conſéquent $RM \times Mr = \frac{ccxx}{tt} - yy = \overline{BC}^2 (cc)$ en mettant pour yy ſa valeur * $\frac{ccxx}{tt} - cc$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* *Art.* 81.

COROLLAIRE I.

91. IL eſt clair que $\overline{PM}^2 (\frac{ccxx}{tt} - cc)$ eſt toûjours moindre que $\overline{PR}^2$ ou $\overline{Pr}^2 (\frac{ccxx}{tt})$; Et par conſéquent que tous les points des Hyperboles oppoſées tombent dans les angles faits par leurs aſymptotes; de ſorte qu'il n'en peut tomber aucun dans les angles d'à côté.

COROLLAIRE II.

92. SI l'on mene par deux points quelconques M, N, d'une Hyperbole ou des Hyperboles oppoſées, deux lignes droites Rr, Kk, perpendiculaires au premier axe, & terminées par les aſymptotes: il eſt évident que les rectangles $RM \times Mr$, $KN \times Nk$, ſeront toûjours égaux entr'eux; puiſqu'ils ſont égaux chacun au quarré de la

moitié BC du ſecond axe Bb. D'où l'on voit que $RM.KN :: Nk.Mr$.

PROPOSITION IV.

Theorême.

93. SI *l'on mene par deux points quelconques* M, N, *d'une Hyperbole ou des Hyperboles oppoſées, deux droites* Hh, Ll, *paralleles entr'elles, & terminées par les aſymptotes; je dis que les rectangles* HM*Mh, LN*Nl *ſeront égaux entr'eux.*

Il faut prouver que HM*Mh = LN*Nl.

Ayant mené les droites Rr, Kk, perpendiculaires au premier axe Aa, il eſt clair que les triangles MRH, NKL, & Mrh, Nkl, ſont ſemblables; puiſqu'ils ſont formés par des paralleles. On aura donc $RM.KN :: HM.LN$. Et $Nk.Mr :: Nl.Mh$. Or *$RM.KN :: Nk.Mr$. Donc $HM.LN :: Nl.Mh$. Et par conſéquent $HM*Mh = LN*Nl$. *Ce qu'il falloit démontrer.* *Art. 92.

COROLLAIRE I.

94. SI l'on ſuppoſe que la ligne NL parallele à MH, paſſe par le centre C, c'eſt à dire, qu'elle devienne CE: il eſt clair que les deux points L, l, ſe réüniront au centre C; & partant que le rectangle $LN*Nl$, deviendra le quarré $\overline{EC}^2$. D'où l'on voit que ſi l'on mene d'un point quelconque E, de l'une des Hyperboles oppoſées au centre C, la droite CE, & par un autre point quelconque M de l'une ou de l'autre de ces Hyperboles, une ligne MHh, parallele à CE, & qui rencontre les aſymptotes en H & h; le quarré de CE ſera égal au rectangle de HM par Mh.

COROLLAIRE II.

95. SI l'on mene par un point quelconque N, de l'une des Hyperboles oppoſées, une ligne droite Ll, terminée par les aſymptotes, & qui rencontre l'une ou

l'autre de ces Hyperboles en un autre point n ; les parties LN, ln, de cette droite prises entre les points des Hyperboles & la rencontre des asymptotes, seront égales entr'elles. Car nommant LN, a ; Nn, b ; nl, c ; on aura $LN * Nl\,(ab + ac) = HM * Mh = Ln * nl.\,(bc + ac)$, d'où l'on tire $LN\,(a) = ln\,(c)$.

COROLLAIRE III.

96. SI l'on suppose dans le Corollaire précedent que la ligne Nn, terminée par les Hyperboles opposées, passe par le centre C, c'est à dire, qu'elle devienne le premier diametre ED : il est évident que les deux points L, l. se réuniront au centre C ; & qu'ainsi NL deviendra EC, & nl, CD. D'où l'on voit que tout premier diametre DE, est divisé en deux également par le centre C.

COROLLAIRE IV.

97. SI deux lignes droites Mm, Nn, parallèles entr'elles, sont terminées par une Hyperbole ou par les Hyperboles opposées, & rencontrent une asymptote aux points H, L ; je dis que les rectangles $MH * Hm$, $NL * Ln$, seront égaux entr'eux. Car prolongeant, s'il est necessaire, ces deux lignes, jusqu'à ce qu'elles rencontrent l'autre asymptote aux points h, l ; les parties MH, mh, & NL, nl, seront égales * entr'elles : & partant, puisque $HM * Mh = LN * Nl$, il s'ensuit que $MH * Hm = NL * Ln$.

* Art. 95.

PROPOSITION V.

Theorême.

FIG. 41. 98. SI *l'on mene par deux points quelconques* M, N, *d'une Hyperbole ou des Hyperboles opposées deux droites* MH, NL, *paralleles entr'elles & terminées par une asymptote ; & deux autres droites* Mh, Nl, *aussi paralleles entr'elles, & terminées par l'autre asymptote ; je dis que les*

rectangles HM * Mh, NL * Nl, *ſont égaux entr'eux.*

Cette Propoſition ſe prouve de la même maniere que la précedente, & il n'y a rien à changer dans la démonſtration.

COROLLAIRE I.

99. Si les droites MH, Mh, & NL, Nl, ſont paralleles aux deux aſymptotes; il eſt clair que les parallelogrammes $MHCh$, $NLCl$, auſſi-bien que les triangles CHM, CLN, qui en ſont les moitiés, ſont égaux entr'eux; puiſque les côtés de ces parallelogrammes autour des angles égaux HMh, LNl, ſont réciproquement proportionnels. FIG. 42.

COROLLAIRE II.

100. Les mêmes choſes étant poſées que dans le Corollaire précedent, il eſt viſible que $CH * HM = CL * LN$; puiſque dans cette ſuppoſition $Mh = CH$, & $Nl = CL$: c'eſt à dire, que ſi l'on mene par deux points quelconques M, N, de l'une, ou des Hyperboles oppoſées, deux droites MH, NL, paralleles à l'une des aſymptotes, & terminées par l'autre; les rectangles $CH * HM$, $CL * NL$, ſeront toûjours égaux entr'eux; & qu'ainſi $CH.CL :: LN.MH$.

COROLLAIRE III.

101. Puisque l'extremité A du premier axe, eſt un des points de l'Hyperbole, & que la ligne AB, qui coupe en G, l'aſymptote CG, eſt parallele à l'autre aſymptote Cg; il s'enſuit * que le rectangle $CH * HM$ ſera toûjours égal au même rectangle $CG * GA$, ou * au quarre $\overline{CG}^2$, c'eſt à dire, ſelon la définition 12e, à la puiſſance de l'Hyperbole. Si donc l'on nomme la donnée CG, m; & les indéterminées CH, x; HM, y; on aura toûjours $CH * HM\ (xy) = \overline{CG}^2\ (mm)$. Or comme cette proprieté convient également à tous les points des Hyperboles oppoſées, & qu'elle en détermine la poſition par * *Art.* 100. * *Art.* 88.

rapport à ſes aſymptotes ; il s'enſuit que l'équation $xy = mm$ en exprime parfaitement la nature par rapport à ſes aſymptotes.

COROLLAIRE IV.

102. IL ſuit de ce que $MH\,(y) = \frac{mm}{x}$, que plus CH (x) augmente, plus au contraire HM (y) diminuë ; de ſorte que CH (x) étant infiniment grande, HM (y) ſera alors infiniment petite, c'eſt à dire, nulle ou zero. D'où l'on voit que l'Hyperbole AM, & ſon aſymptote CH (étant prolongées) s'approchent de plus en plus, de ſorte qu'enfin leur diſtance devient moindre qu'aucune donnée ; & que cependant elles ne ſe peuvent jamais rencontrer, puiſqu'elles ne ſe joignent que dans l'infini où l'on ne peut jamais arriver. Il en eſt de même pour l'autre aſymptote Cg.

COROLLAIRE V.

103. ENTRE toutes les lignes qui paſſent par le centre C, 1°. Celles qui, comme Aa, tombent dans les angles faits par les aſymptotes du côté des Hyperboles, rencontrent chacune des Hyperboles oppoſées en un ſeul point A, ou a ; & étant prolongées, elles paſſent au dedans de ces Hyperboles. Car à cauſe des angles GCA, gCA, & de leurs oppoſés au ſommet, il eſt clair que la ligne Aa, s'éloigne de plus en plus de l'une & de l'autre aſymptote; au lieu que les Hyperboles oppoſées s'en approchent toûjours * de plus en plus. 2°. Celles qui, comme Bb, tombent dans les angles d'à côté, faits auſſi par les aſymptotes, ne peuvent jamais rencontrer les Hyperboles oppoſées, quoiqu'on les prolonge à l'infini ; puiſqu'aucun des points des Hyperboles * ne peut tomber dans ces angles.

* *Art.* 102.

* *Art.* 91.

D'où l'on voit * que tous les premiers diametres, tombent dans les angles faits par les Aſymptotes du côté des Hyperboles, & que les ſeconds tombent dans les angles d'à côté.

* *Def.* 9.

COROLLAIRE VI.

104. SI l'on mene par un point quelconque H, de l'une des aſymptotes CE, une parallele HM, à l'autre Ce; elle ne rencontrera l'Hyperbole qu'en un ſeul point M; & étant continuée, elle paſſera au dedans. Car ſa diſtance de Ce, demeure par tout la même, au lieu que l'Hyperbole s'en approche * toûjours de plus en plus. FIG. 43. * *Art.* 102.

COROLLAIRE VII.

105. DE-LA il eſt évident que ſi par un point quelconque M, d'une Hyperbole, l'on mene deux droites indéfinies MH, Mh, paralleles à ſes aſymptotes Ce, CE.

1°. Tous les points de l'Hyperbole qui lui eſt oppoſée, tomberont dans l'angle HMh; puiſqu'ils tombent tous * dans l'angle fait par ſes aſymptotes, lequel eſt renfermé dans l'angle HMh. * *Art.* 91.

2°. Les deux portions de l'Hyperbole, tomberont dans les deux angles à côté de celui-ci; ainſi aucun de ſes points ne tombera dans l'angle oppoſé au ſommet à l'angle HMh.

3°. Toutes les lignes qui, comme MF, tombent dans l'angle HMh, rencontrent (étant prolongées du côté de F) l'Hyperbole oppoſée en un point N, & paſſent au dedans; puiſqu'elles s'écartent de plus en plus des droites MH, Mh, & par conſequent de ſes deux aſymptotes qui leur ſont paralleles: mais étant prolongées de l'autre côté du point M, elles entrent au dedans de l'Hyperbole qui paſſe par ce point, & ne la rencontrent jamais ailleurs.

4°. Toutes les lignes qui, comme Ee, tombent dans les angles à côté de l'angle HMh, rencontrent les deux aſymptotes de l'Hyperbole qui paſſe par le point M; ainſi lorſqu'elles paſſent au dedans de l'une de ſes portions, elles la rencontrent neceſſairement en quelque point N; puiſqu'elles vont rencontrer l'aſymptote qui tombe au dehors de cette portion.

COROLLAIRE VIII.

106. SI l'on mene par un point quelconque M, d'une Hyperbole, une ligne droite Ff, qui rencontre l'une de ſes aſymptotes au point F, & l'une des aſymptotes de l'Hyperbole oppoſée au point f; & qu'on la prolonge en N, en ſorte que fN, ſoit égale à FM: je dis que le point N, ſera à l'Hyperbole oppoſée. Car la ligne Ff, tombe dans l'angle HMh, & rencontre par conſequent l'Hyperbole oppoſée en quelque point N, comme l'on vient de démontrer dans le Corollaire précedent. Donc * &c.

* Art. 95.

2°. Si l'on mene par un point quelconque M, d'une Hyperbole, une ligne droite Ee, terminée par ſes aſymptotes, & qu'on prenne ſur cette ligne, la partie eN, égale à EM: je dis que le point N, ſera encore l'un des points de cette Hyperbole. Car menant MH, parallele à l'aſymptote Ce, & terminée par l'autre en H, ſi l'on prend ſur cette autre aſymptote, la partie CL, égale à HE, & qu'on tire LN, parallele à HM; on a démontré dans l'article 104 qu'elle rencontrera l'Hyperbole en un point N, & dans l'article 100. que ce point ſera tel que CL ou HE. $HM :: CH$ ou EL. LN; d'où l'on voit que la ligne LN, rencontre l'Hyperbole dans le même point où elle rencontre la droite Ee. Mais à cauſe des paralleles HM, LN, il eſt clair que $eN = EM$, puiſque $CL = HE$. Donc &c.

PROPOSITION VI.

Problême.

FIG. 43.

107. D'UN *point donné* M, *ſur une Hyperbole dont les aſymptotes* CE, Ce, *ſont données; mener la tangente* DMd; *& démontrer qu'on n'en peut mener qu'une ſeule.*

Ayant mené du point donné M, une parallele MH, à l'une des aſymptotes Ce, & terminée par l'autre CE, au point H; on prendra ſur cette aſymptote, la partie HD.

HD égale à HC; on tirera par le point donné M, la droite DM, qui rencontre l'asymptote Ce en un point d. Je dis en premier lieu, que cette ligne DMd, touchera l'Hyperbole au point M.

Car à cause des triangles semblables CDd, HDM, la ligne Dd, terminée par les asymptotes, est divisée en deux parties égales par le point M, de même que CD, l'est en H. Or s'il étoit possible qu'elle rencontrât l'Hyperbole en un autre point O, il est clair que Od, seroit * égale à MD, & par conséquent à Md, c'est à dire, la partie au tout; ce qui ne pouvant être, il s'ensuit que la ligne DMd, ne peut rencontrer l'Hyperbole, qu'au seul point M. De plus, si elle passoit au dedans, comme la ligne Ee, il est visible qu'elle rencontreroit la portion de l'Hyperbole, au dedans de laquelle elle passeroit en quelque point N; puisqu'elle iroit, rencontrer en un point e, l'asymptote Ce, qui tombe * au dehors de cette portion. Il est donc évident que la ligne Dd, ne rencontre l'Hyperbole qu'au seul point M, & qu'elle n'entre point au dedans; c'est à dire, qu'elle est tangente en ce point.

* *Art.* 95.

* *Art.* 91.

Je dis en second lieu, qu'il n'y a que la seule ligne DMd, qui puisse toucher l'Hyperbole au point M; car si l'on prend sur l'asymptote CE, la partie HE, plus grande ou moindre que HD, & qu'on tire par le point donné M, la droite EM, qui rencontre l'autre asymptote Ce, au point e, il est clair à cause des paralleles MH, Ce, que ME sera plus grande ou moindre que Me; puisque HE a été prise plus grande ou moindre que HD ou que HC. Or cela posé, si l'on prend sur la plus grande partie Me, le point N, en sorte que Ne soit égale à ME, il est évident que ce point * sera encore à l'Hyperbole, & qu'ainsi la ligne Ee, ne la touchera point au point M. Ce qui restoit à démontrer.

* *Art.* 106.

REMARQUE.

108. ON a démontré dans l'art. 102. que plus CH devient grande, plus au contraire HM diminuë ; de ſorte que CH étant infiniment grande, HM devient infiniment petite, c'eſt à dire, nulle ou zero. Or CH étant infiniment grande, HD (qui lui eſt égale) la ſera auſſi ; & par conſéquent les lignes MD, HD, qui ne ſe rencontrent que dans l'infini, pouvant être regardées comme paralleles, tomberont l'une ſur l'autre ; puiſque le point M ſe confond alors avec le point H : c'eſt à dire, que l'aſymptote CE, étant prolongée a l'infini, auſſi-bien que l'Hyperbole, peut être regardée comme une ligne qui la touche dans ſon extremité. Il en eſt de même de l'autre aſymptote Ce, laquelle peut être regardée comme touchant la même Hyperbole dans ſon autre extremité.

D'où l'on voit que les deux aſymptotes peuvent être regardées comme des tangentes infinies, qui touchent les Hyperboles oppoſées dans leurs extremités.

COROLLAIRE I.

109. COMME il n'y a que la ſeule ligne DMd, laquelle étant terminées par les aſymptotes, ſoit coupée en deux parties égales au point M ; il s'enſuit que ſi une ligne droite DMd, terminée par les aſymptotes d'une Hyperbole, la rencontre en un point M, qui coupe cette ligne droite en deux parties égales ; elle ſera tangente de cette Hyperbole en ce point. Et réciproquement que ſi une ligne droite DMd, terminée par les aſymptotes d'une Hyperbole, la touche en un point M ; elle ſera coupée en deux parties égales par ce point.

COROLLAIRE II.

FIG. 44. 110. SI par le point touchant M d'une tangente quelconque DMd, terminée par les aſymptotes CL,

el, d'une Hyperbole, l'on mene un premier diametre MCm; & que par le point m, où il rencontre l'Hyperbole oppoſée, l'on tire une parallele Ee, à la tangente Dd, terminée par les aſymptotes aux points E, e: je dis que cette ligne ſera tangente au point m. Car les triangles CMD, CmE, ſeront ſemblables & égaux, puiſque* CM eſt égal à Cm. La ligne mE, ſera donc égale à MD. On prouvera de même (à cauſe des triangles ſemblables & égaux CMd, Cme) que me eſt égale à Md. C'eſt pourquoi la ligne Ee eſt diviſée en deux également au point m; puiſque Dd l'eſt au point M. Et par conſéquent* elle ſera tangente en m.

* *Art.* 96.

* *Art.* 109.

D'où l'on voit que les tangentes Dd, Ee, qui paſſent par les extremités d'un premier diametre quelconque Mm, ſont paralleles entr'elles; & de plus égales, lorſqu'elles ſont terminées par les aſymptotes.

DE'FINITIONS.

13.

S'il y a deux diametres Mm, Ss, dont l'un Ss, ſoit parallele aux tangentes qui paſſent par les extremités de l'autre Mm; & de plus terminé en S, s, par les droites MS; Ms, menées de l'une des extremités M du diametre Mm, parallelement aux aſymptotes: ces deux diametres Mm, Ss, ſeront appellés enſemble *Conjugués*. FIG. 44.

14.

Les lignes droites menées des points des Hyperboles oppoſées parallelement à l'un des diametres conjugués, & terminées par l'autre, ſont nommées *Ordonnées* à cet autre. Ainſi NO, eſt une ordonnée au diametre Mm.

15.

Si l'on prend une troiſiéme proportionnelle à deux diametres conjugués, elle ſera le *Parametre* de celui qui eſt le premier terme de la proportion.

COROLLAIRE I.

111. LA définition 13e convient aux deux axes ; puiſque ſelon l'article 84. le ſecond axe eſt parallele aux tangentes qui paſſent par l'extremité du premier ; & que de plus, ſelon la definition 11e, il eſt terminé par deux droites menées de l'une des extremités du premier axe, parallelement aux aſymptotes. D'où l'on voit que les deux axes peuvent être regardés comme deux diametres conjugués qui ſont entr'eux des angles droits.

COROLLAIRE II.

112. COMME le diametre SCs, eſt parallele à la tangente DMd, qui paſſe par l'une des extremités M du diametre MCm, & que cette tangente rencontre les deux aſymptotes CD, Cd, de l'Hyperbole, qui paſſe par le point M : il s'enſuit qu'il tombe dans les angles a côté de l'angle DCd, fait par les aſymptotes de cette Hyperbole ; Et qu'ainſi c'eſt un ſecond diametre.

D'où l'on voit qu'entre deux diametres conjugués MCm, SCs ; il y en a toûjours un premier Mm, & un ſecond Ss.

COROLLAIRE III.

113. LE ſecond diametre SCs, eſt coupé par le milieu au centre C, & de plus égal à la tangente DMd, qui paſſant par l'une des extremités M du premier diametre Mm, qui lui eſt conjugué, eſt terminée par les aſymptotes. Car à cauſe des paralleles MS, Cd, & Ms, CD ; il eſt clair que CS eſt égale à Md, & Cs à MD. Or DMd, eſt diviſée * en deux parties égales au point touchant M. Donc &c.

* *Art.* 109.

COROLLAIRE IV.

114. DEUX diametres conjugués Mm, Ss, étant donnés, & ſçachant lequel des deux eſt un premier diametre ; il ne faut pour avoir les aſymptotes CD, Cd, que

tirer par le centre C, des paralleles aux deux droites MS, Ms, menées de l'une des extremités M, du premier diametre Mm, aux deux extremités S, s, du second.

Et réciproquement les deux asymptotes CD, Cd, d'une Hyperbole étant données, avec l'un de ses points M; il ne faut pour avoir deux de ces diametres conjugués MCm, SCs, que tirer MH parallele à l'une des asymptotes Cd, qui rencontre l'autre asymptote CD en H; & l'ayant prolongée en S, en sorte que HS soit égale à HM, mener les droites CM, CS. Car tirant MD parallele à CS, il est clair à cause des triangles semblables CHS, MHD, que HD est égale à HC; puisque MH est égale à HS; & qu'ainsi * MD est tangente en M : d'où il suit selon la definition 13e, que les lignes CM, CS, sont deux demi-diametres conjugués. * Art. 107.

Il est donc évident que deux diametres conjugués Mm, Ss, étant donnés de position & de grandeur, & sçachant de plus lequel des deux est un premier diametre; on a les deux asymptotes CD, Cd, avec l'un des points M, de l'une des Hyperboles opposées.

Et réciproquement que les asymptotes CD, Cd, d'une Hyperbole étant données, avec un de ses points M; on a deux de ses diametres conjugués Mm, Ss, de position & de grandeur; & l'on sçait lequel des deux est un premier diametre; sçavoir, celui qui passe par le point donné M.

COROLLAIRE V.

115. UN second diametre SCs, étant donné de position, pour en déterminer la grandeur, & trouver le premier diametre Mm, qui lui est conjugué; on lui menera par tout où l'on voudra au dedans de l'angle fait par les asymptotes, une parallele Ll, terminée par les asymptotes en L, l; & par son point de milieu O, le premier diametre CO, qui rencontrera l'Hyperbole en

un point *M* ; par lequel ayant tiré les droites *MS*, *Ms*, paralleles aux aſymptotes ; il eſt clair, ſelon la définition 13e, que les points *S*, *s*, où elles rencontrent le ſecond diametre *SCs*, donné de poſition, en déterminent la grandeur, & que le premier diametre *MCm* lui eſt conjugué. Car menant par le point *M*, la ligne *Dd*, parallele à *Ll*, & terminée par les aſymptotes, elle ſera coupé en deux également au point *M* ; puiſque *Ll*, l'eſt au point *O* : & partant * elle ſera tangente en *M*.

* *Art.* 109.

De-là, il eſt évident qu'un ſecond diametre *SCs*, étant donné de poſition, ſa grandeur eſt déterminée en ſorte qu'il ne peut en avoir qu'une ſeule ; comme auſſi la grandeur & la poſition du premier diametre *Mm*, qui lui eſt conjugué.

COROLLAIRE VI.

116. UN ſecond diametre *SCs*, étant donné de poſition & de grandeur, avec ſon parametre, & la poſition de ſes ordonnées ; il ſera facile de trouver de poſition & de grandeur le premier diametre *MCm*, qui lui eſt conjugué, avec ſon parametre. Car ayant mené par le centre *C*, une parallele indéfinie aux ordonnées du diametre *Ss*, on marquera ſur cette ligne deux points *M*, *m*, également éloignés de part & d'autre du centre *C*, en ſorte que *Mm*, ſoit égale à la moyenne proportionnelle entre le ſecond diametre *Ss*, & ſon parametre. Puis ayant trouvé une troiſiéme proportionnelle aux deux lignes *Mm*, *Ss*, il eſt clair, ſelon les définitions 14 & 15, que *Mm*, ſera le premier diametre conjugué au diametre *Ss*, & qu'il aura pour ſon parametre cette troiſiéme proportionnelle.

PROPOSITION VII.

Theorême.

Fig. 44.

117. LE *quarré d'une ordonnée quelconque* ON, *au premier diametre* Mm, *eſt au rectangle de* MO *par* Om, *par-*

ties de ce diametre prolongé ; comme le quarré de ſon conjugué S s, *eſt au quarré de ce premier diametre* M m.

Il faut prouver que $\overline{ON}^2 . MO \times Om :: \overline{Ss}^2 . \overline{Mm}^2$.

Ayant mené par l'une des extremités M, du premier diametre Mm, une parallele Dd au ſecond diametre Ss, terminée par les aſymptotes ; elle ſera tangente en M, ſelon la définition 13e. Et par conſequent * elle ſera coupée en deux également par ce point : c'eſt pourquoi, ſi l'on prolonge l'ordonnée ON (qui ſelon la définition 14e eſt parallele au diametre Ss) de part & d'autre du diametre Mm, elle rencontrera les aſymptotes en deux points L, l, qui ſeront également éloignés de part & d'autre du point O. Cela poſé, ſoient nommées les données CM, ou Cm, t ; CS, ou Cs, ou * MD, ou Md, c ; & les indéterminées CO, x ; ON, y ; on aura à cauſe des triangles ſemblables CMD, COL ; cette proportion : $CM\ (t). MD\ (c) :: CO\ (x). OL$ ou $Ol = \frac{cx}{t}$. Donc LN ou $LO \pm ON = \frac{cx}{t} \pm y$, & Nl ou $Ol \mp NO = \frac{cx}{t} \mp y$; Et partant $LN \times Nl = \frac{ccxx}{tt} - yy =$ * $DM \times Md = cc$. D'où il ſuit que $\overline{ON}^2\ (yy). MO \times Om\ (xx - tt) :: \overline{Ss}^2\ (4cc). \overline{Mm}^2\ (4tt)$. Puiſqu'en multipliant les Extrêmes & les Moyens, on trouve $4ttyy = 4ccxx - 4cctt$, c'eſt à dire (en diviſant par $4tt$, & tranſpoſant à l'ordinaire) l'équation même précédente $\frac{ccxx}{tt} - yy = cc$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* *Art.* 109.

* *Art.* 113.

* *Art.* 90.

COROLLAIRE GENERAL.

118. IL eſt viſible que ce qu'on a démontré dans la Propoſition ſeconde *, par rapport aux deux axes Aa, Bb, s'etend par le moyen de cette Propoſition à deux diametres conjugués quelconques, Mm, Ss. Or comme les articles 80, 81, 82, 83, 84 & 85, ſe tirent de la ſeconde Propoſition, & ſubſiſtent également, ſoit que l'angle ACB, ſoit droit ou qu'il ne le ſoit pas ; il s'en-

* *Art.* 79.

ſuit que ſi l'on ſuppoſe dans ces articles que les lignes *Aa*, *Bb*, au lieu d'être les deux axes, ſoient deux diametres conjugués quelconques, ces articles ſeront encore vrais dans cette ſuppoſition : car leur démonſtration demeure toûjours la même ; & il ne faut pour s'en convaincre entierement, que les relire en mettant par tout où ſe trouve le mot d'*Axe*, celui de *Diametre*.

PROPOSITION VIII.

Theorême.

FIG. 45. 119. SOIENT *deux tangentes quelconques* DE, FG, *d'une Hyperbole* MA, *terminées par les aſymptotes, & qui s'entrecoupent en un point* O ; *je dis que les côtés des triangles* CDE, CFG, *autour de l'angle commun* C, *ſont réciproquement proportionnels.*

Il faut prouver que CD. CF :: CG. CE.

Ayant mené par les points touchans *M*, *A*, les paralleles *MH*, *AL*, à l'aſymptote *CG* ; il eſt clair à cauſe des triangles ſemblables *CDE*, *HDM*, que *CD* eſt double de *CH*, & *CE* double de *HM* ; puiſque *DE* eſt * double de *DM*. Et à cauſe des triangles ſemblables *CFG*, *LFA*, que *CF* eſt double de *CL*, & *CG* double de *LA* ; puiſque *FG*, eſt double de *FA*. Or † *CH*. *CL* :: *LA*. *HM*. Et partant ſi l'on prend le double de chaque terme, on aura 2*CH* ou *CD*. 2*CL* ou *CF* :: 2*LA* ou *CG*. 2*HM* ou *CE*. *Ce qu'il falloit démontrer.*

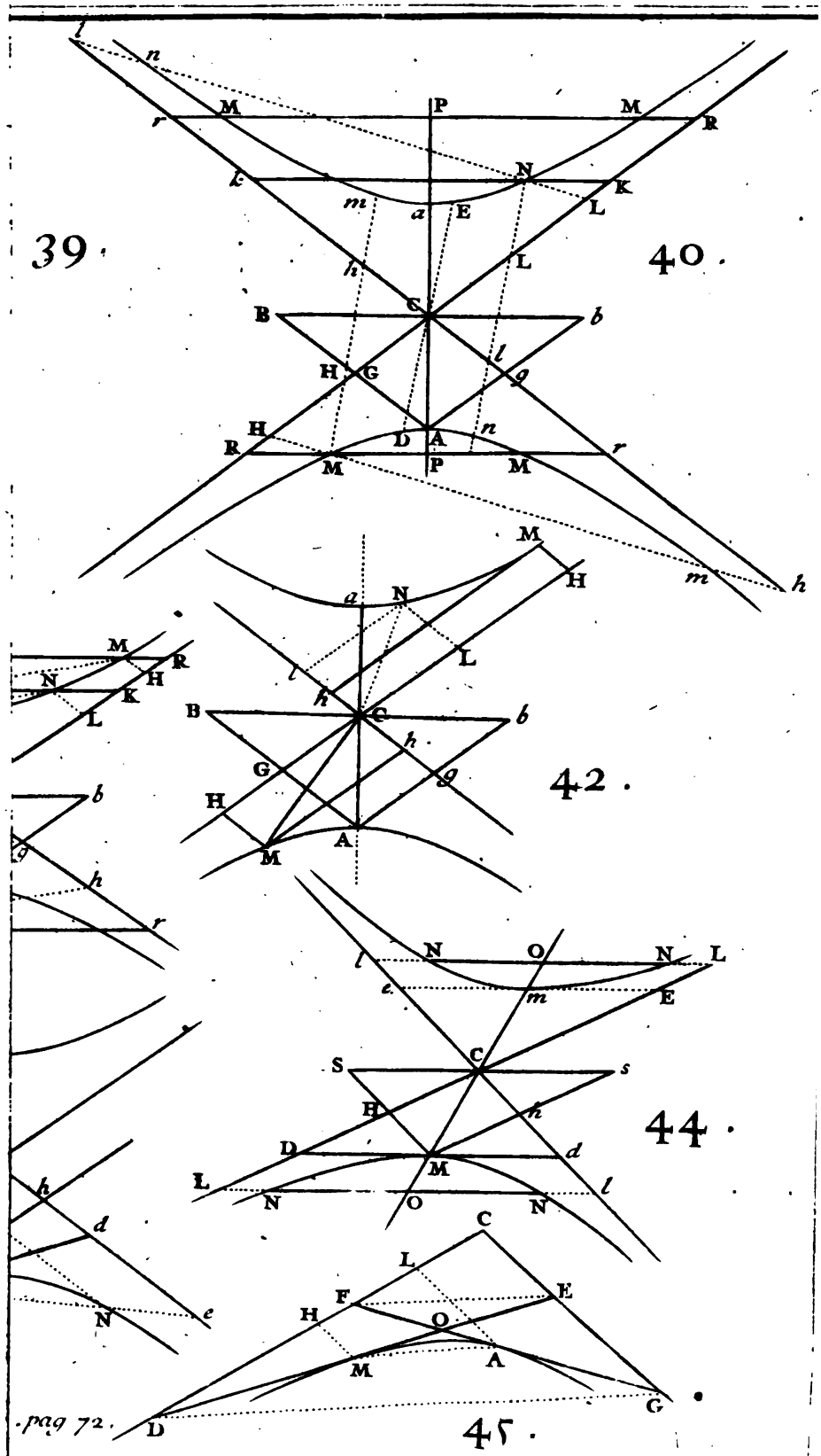
* *Art.* 109.

† *Art.* 100.

COROLLAIRE.

120. IL ſuit de cette Propoſition que les droites *DG*, *FE*, ſont paralleles entr'elles. D'où il eſt évident :

1°. Que les triangles *CDE*, *CFG*, ſont égaux ; car les triangles *FDE*, *FGE*, qui ont la même baſe *FE*, & qui ſont entre les mêmes paralleles *DG*, *FE*, ſont égaux ; Et partant, ſi l'on ajoûte de part & d'autre le même


39.
40.
42.
44.
45.
pag 72.

même triangle CEF, on formera les triangles CDE, CFG, qui seront egaux entr'eux.

2°. Que la ligne DE, eſt couppée en même raiſon aux points M, O, que la ligne FG l'eſt aux points A, O. Car menant par les points touchans la droite MA, il eſt clair qu'elle ſera parallele aux deux droites DG, FE; puiſqu'elle coupe par le milieu les droites DE, FG, renfermées entre ces paralleles.

PROPOSITION IX.

Theorême.

Si par un point quelconque M, *d'une Hyperbole*, *on mene une ordonnée* M P *à tel de ſes diametres* A a *que l'on voudra*, *& une tangente* M T *qui le rencontre en* T; *je dis que* C P. C A :: C A. C T. *en obſervant que les points* P, T, *tombent du même côté du centre* C, *lorſque la ligne* A a *eſt un premier diametre*; *& au contraire qu'ils tombent de part & d'autre du centre*, *lorſque c'eſt un ſecond diametre.* FIG. 46. & 47.

Premier cas. Lorſque la ligne Aa eſt un premier diametre. On prolongera la tangente MT juſqu'à ce qu'elle rencontre les aſymptotes CD, CG, aux points D, E; & l'ordonnée PM, juſqu'à ce qu'elle rencontre l'aſymptote CD au point N; on menera enſuite par le point A la ligne AK, parallele à DE, qui rencontre l'aſymptote CG au point K, & la tangente FG terminée par les aſymptotes, qui ſera parallele * à PM, & qui rencontre au point O l'autre tangente DE. FIG. 46. * Def. 14.

Cela poſé, AP eſt à AC, ou FN à FC, en raiſon compoſée de FN à FD, ou de OM à OD, ou * de OA à OG, ou de EK à EG, & de FD à FC, ou * de EG à EC. Or AT eſt à TC, ou KE à EC, en raiſon compoſée de EK à EG, & de EG à EC. Donc $AP.AC :: AT.TC$. puiſque les raiſons compoſantes de ces deux raiſons ſont les mêmes; & par conſequent $AP+AC$ ou $CP.CA :: AT+TC$ ou $CA.CT$. *Ce qui étoit propoſé en premier lieu.* * Art. 120. * Art. 120.

Second cas. Lorſque la ligne Aa eſt un ſecond diametre. Ayant mené par le centre C la ligne CK parallele à l'ordonnée PM, qui rencontre l'Hyperbole au point B, & la tangente MT au point R, & par le point touchant M la ligne MK parallele à Aa; il eſt clair que CB ſera le premier demi-diametre conjugué au ſecond Aa, & qu'ainſi MK ſera ordonnée à ce diametre.

Cela poſé, ſi l'on nomme les données CA ou Ca, t; CB, c; & les indéterminées CP ou MK, x; PM ou CK, y; on aura ſelon ce qu'on vient de démontrer dans le premier cas, $CR=\frac{cc}{y}$; & partant RK ou $CK-CR=\frac{yy-cc}{y}$. Or les triangles ſemblables KRM, CRT, donnent $KR\left(\frac{yy-cc}{y}\right).\ RC\ \left(\frac{cc}{y}\right)::MK\ (x).$

* *Art.* 80. & 118. $CT=\frac{ccx}{yy-cc}=\frac{tt}{x}$. en mettant pour $yy-cc$ ſa valeur $\frac{ccxx}{tt}$ tirée de ce que $yy=$*$\frac{ccxx}{tt}+cc$. C'eſt à dire que $CP.\ CA::CA.\ CT$. *Ce qui reſtoit à démontrer.*

PROPOSITION X.

Theorême.

Fig. 48. & 49. 122. *Si par un point quelconque* M *d'une Hyperbole qui a pour centre le point* C, *on mene une ordonnée* MP *à l'un ou à l'autre axe* Aa, *& une perpendiculaire* MG *à la tangente* MT, *laquelle paſſe par* M: *Je dis que* CP *ſera toûjours à* PG *en la raiſon donnée de l'axe* Aa *à ſon Parametre.*

Car nommant le demi-axe CA ou Ca, t; & les indéterminées CP, x; PM, y; on aura * $CT=\frac{tt}{x}$; Et partant $PT=\frac{xx\mp tt}{x}$, ſelon que Aa eſt le premier ou le ſecond axe. Or les triangles rectangles ſemblables TPM, MPG, donnent $TP\left(\frac{xx\mp tt}{x}\right).\ PM\ (y)::PM$

* *Art.* 121.

(y). $PG = \frac{xyy}{xx \mp tt}$. D'où l'on tire cette proportion CP (x). $PG\left(\frac{xyy}{xx \mp tt}\right) :: \overline{CP}^2 \mp \overline{CA}^2\ (xx \mp tt).\ \overline{PM}^2\ (yy)$. puiſqu'en multipliant les moyens & les extrêmes, on trouve le même produit xyy. Mais $\overline{CP}^2 \mp \overline{CA}^2$ eſt à $\overline{PM}^2$, comme * l'axe Aa eſt à ſon parametre. Donc CP eſt auſſi à PG en cette même raiſon. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* *Art.* 82.

PROPOSITION XI.

Theorême.

123. SI *d'un point quelconque* M *d'une Hyperbole, l'on tire à ſes deux foyers* F, f, *les droites* MF, Mf; *je dis que la tangente* MT, *qui paſſe par ce point* M, *diviſe en deux également l'angle* FMf. Fig. 50.

Car ayant mené les perpendiculaires FD, fd, ſur la tangente MT; le premier axe Aa, qui paſſe par les foyers F, f, & qui rencontre la tangente en T; & l'ordonnée MP, à cet axe: on nommera les données CA ou Ca, t; CF ou Cf, m; & l'indéterminée CP, x. L'on aura MF * $\left(\frac{mx}{t} - t\right)$. $Mf\left(\frac{mx}{t} + t\right) :: TF$ ou CF $(m) - CT$ * $\left(\frac{tt}{x}\right)$. Tf ou $Cf\,(m) + CT\left(\frac{tt}{x}\right)$. puiſqu'en multipliant les extrêmes & les moyens, on forme le même produit. Or les triangles rectangles ſemblables TFD, Tfd, donnent $TF.\ Tf :: FD.\ fd$. L'hypothenuſe MF du triangle rectangle MDF, ſera donc à l'hypothenuſe Mf du triangle rectangle Mdf, comme le côté DF eſt au côté df; & par conſéquent ces deux triangles ſeront ſemblables. Donc les angles FMD, fMd, qui ſont oppoſés aux côtés homologues DF, df, ſeront égaux entr'eux. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* *Art.* 78.

* *Art.* 121.

COROLLAIRE.

124. DE-LA il eſt évident, que la tangente MT, étant prolongée indéfiniment de part & d'autre du point touchant M, laiſſe l'Hyperbole AM, toute entiere du côté de ſon foyer interieur F. Et comme cela arrive toûjours en quelque endroit de cette Hyperbole qu'on prenne le point M, il eſt viſible qu'elle ſera concave dans toute ſon étenduë autour de ſon foyer interieur F.

PROPOSITION XII.

Theorême.

FIG. 51. 125. LA *difference des quarrés de deux diametres conjugués quelconques* Mm, Ss, *eſt égale à la difference des quarrés des deux axes* Aa, Bb.

Il faut prouver que $\overline{CS}^2 - \overline{CM}^2 = \overline{CB}^2 - \overline{CA}^2$, *ou que* $\overline{CM}^2 - \overline{CS}^2 = \overline{CA}^2 - \overline{CB}^2$.

* *Def.* 11. & 13. Si l'on mene les droites MS, AB, elles ſeront paralleles à l'aſymptote Cg, & de plus couppées en deux également par l'autre aſymptote CG, aux points H, G; puiſque * les lignes Ms, Ab, ſont paralleles à cette aſymptote, & que les ſeconds diametres Ss, Bb, ſont couppés * en deux également au centre C: C'eſt pourquoi ſi l'on mene ſur l'aſymptote CG, les perpendiculaires AF, BE, ML, SK, on formera les triangles GAF, GBE, & HML, HSK, qui ſeront ſemblables & égaux. Cela poſé, ſoient nommées les données CG ou * GA, m; GE ou GF, a; AF ou BE, b; & les indéterminées CH, x; HM, y: ce qui donne $CE = m + a$, $CF = m - a$; $\overline{CE}^2 + \overline{EB}^2$ ou $\overline{CB}^2 = mm + 2am + aa + bb$, $\overline{CF}^2 + \overline{FA}^2$ ou $\overline{CA}^2 = mm - 2am + aa + bb$. Et partant $\overline{CB}^2 - \overline{CA}^2 = 4am$. Or les triangles ſemblables GAF, HML, fourniſſent $GA\,(m).\ AF\,(b) :: HM\,(y).\ ML$ ou $KS = \frac{by}{m}$. Et $GA\,(m).\ GF\,(a) :: HM$

* *Art.* 113.

* *Art.* 88.

(y). HL ou $HK = \frac{ay}{m}$. Donc $CK = x + \frac{ay}{m}$, $CL = x - \frac{ay}{m}$; $\overline{CK}^2 + \overline{KS}^2$ ou $\overline{CS}^2 = xx + \frac{2axy}{m} + \frac{aayy}{mm} + \frac{bbyy}{mm}$, $\overline{CL}^2 + \overline{LM}^2$ ou $\overline{CM}^2 = xx - \frac{2axy}{m} + \frac{aayy}{mm} + \frac{bbyy}{mm}$. Et partant $\overline{CS}^2 - \overline{CM}^2 = \frac{4axy}{m} = 4am$, en mettant pour xy sa valeur * mm. Donc $\overline{CS}^2 - \overline{CM}^2 = \overline{CB}^2 - \overline{CA}^2$; *Ce qu'il falloit démontrer.* * *Art.* 101.

Si l'angle GCg, fait par les asymptotes, étoit aigu, au lieu que dans cette figure & le raisonnement qui lui est approprié, il est obtus; CF seroit alors plus grande que CE, & on prouveroit de la même maniere que $\overline{CM}^2 - \overline{CS}^2 = \overline{CA}^2 - \overline{CB}^2$. Mais si l'angle GCg fait par les asymptotes étoit droit, il est visible alors que les lignes AB, MS, seroient perpendiculaires sur l'asymptote CG; & qu'ainsi les deux demi-diametres conjugués CM, CS, seroient égaux entr'eux, de même que les deux demi-axes CA, CB. Or comme alors la difference des deux diametres conjugués Mm, Ss, est nulle, aussi bien que celle des deux axes Aa, Bb; il s'ensuit que cette Proposition est vraie dans tous les cas.

COROLLAIRE.

126. DE-LA il est évident qu'un premier diametre quelconque Mm, est moindre, plus grand, ou égal au second diametre Ss, qui lui est conjugué; selon que l'angle GCg, fait par les asymptotes, est obtus, aigu, ou droit.

DÉFINITION.

16.

Les deux Hyperboles opposées sont appellées *Equilateres*, lorsque deux de leurs diametres conjugués quelconques sont égaux entr'eux; ou bien lorsque l'angle fait par leurs asymptotes est droit.

COROLLAIRE.

Fig. 52. 127. Si d'un point quelconque M d'une Hyperbole équilatère, l'on mene une ordonnée MP à tel de ſes diametres Aa qu'on voudra, on aura *$\overline{MP}^2 = \overline{C}^2 \pm \overline{CA}^2$: ſçavoir $-$, lorſque Aa eſt un premier diametre ; & $+$, lorſque c'eſt un ſecond. Car le diametre conjugué au diametre Aa *lui ſera toûjours égal.

*Art. 81. & 118.

*Art. 126.

PROPOSITION XIII.

Problême.

Fig. 53. 54. & 55. 128. DEUX *diametres conjugués quelconques étant donnés, & ſçachant lequel des deux eſt le premier ; ou ce qui revient* *Art. 114. *au même, les aſymptotes* CD, CF, *d'une Hyperbole étant données, avec un de ſes points quelconques* M : *mener deux diametres conjugués* A a, B b, *qui faſſent entr'eux un angle égal à un angle donné.*

Ayant coupé dans un cercle quelconque qui a pour centre le point o, un arc dcf capable de l'angle DCF fait par les aſymptôtes ; on menera par le point de milieu e, de la corde df, la ligne ec qui faſſe avec cette corde de part ou d'autre l'angle dec ou fec égal à l'angle donné ; & par le point c, où elle rencontre l'arc dcf, les droites cd, cf. Cela fait, on prendra ſur les aſymptotes les parties CD, CF, égales aux cordes cd, cf ; & ayant tiré DF, l'on menera le ſecond diametre Bb parallele à cette ligne, & le premier diametre Aa qui paſſe par ſon milieu E. Je dis que ces deux diametres Aa, Bb, font entr'eux un angle égal à l'angle donné, & qu'ils ſont conjugués l'un à l'autre.

Car par la conſtruction l'angle dcf eſt égal à l'angle DCF fait par les aſymptotes ; & par conſequent les triangles DCF, dcf, & DCE, dce, ſont égaux & ſemblable. L'angle BCa, que font entr'eux les deux diametres Aa, Bb, ſera donc égal à l'angle DEC ou dec.

qui a été fait égal à l'angle donné. De plus, si l'on mene par le point A, que je suppose être l'une des extremités du premier diametre Aa, une parallele DE, il est clair qu'elle sera couppée également par ce point, puisque DF l'est au point E; & qu'ainsi * elle sera tangente en A; d'où il suit * que les diametres Aa, Bb, sont conjugués.

* *Art.* 109.
* *Def.* 13.

Maintenant pour déterminer la grandeur de ces deux diametres, on tirera par le point donné M, une parallele MKL au premier diametre Aa, laquelle rencontre l'asymptote CD au point K, & l'autre asymptote CF, prolongé au delà du centre C, au point L: & ayant pris CA moyenne proportionnelle entre KM, ML; il est clair * que le point A sera l'une des extremités du premier diametre Aa; & qu'ainsi menant les lignes AB, ab, paralleles aux asymptotes CF, CD, elles * détermineront par leurs points de rencontre B, b, la grandeur du second diametre Bb.

* *Art.* 94.
* *Def.* 13.

Comme l'on peut mener deux differentes lignes ec, ec, qui faſſent avec la corde df, de part & d'autre des angles dec, fec, égaux à l'angle donné, lorsque cet angle n'est pas droit; il s'ensuit qu'on pourra toûjours trouver alors deux differens diametres conjugués Aa, Bb, qui satisferont également, comme l'on voit dans les figures 54 & 55. Mais il est à remarquer que les diametres conjugués Aa, Bb, de la fig. 55. ont une position semblable par rapport à l'asymptote CF, à ceux de la figure 54. par rapport à l'autre asymptote CD; & que leur grandeur demeure la même dans ces deux differentes positions. Car,

1°. Menant du centre o au point e, milieu de la corde df, la ligne oe, elle sera perpendiculaire à cette corde, & par consequent les angles oec, oec, seront égaux; c'est pourquoi tirant les rayons oc, oc, les triangles oec, oec, qui ont le côté oe commun, les angles oec, oec, & les côtés oc, oc, égaux entreux, auront aussi leurs troisiémes côtés ec, ec, égaux. Les triangles fec, dec, qui ont les côtés ef, ed, & ec, ec, & les

angles fea, dec, égaux, seront donc égaux & semblables ; d'où l'on voit que l'angle ecf, ou ECF, de la figure 55. est égal à l'angle ecd, ou ECD, de la fig. 54. & qu'ainsi la position du diametre Aa, de la fig 55. par rapport à l'asymptote CF, est semblable à celle du diametre Aa, de la figure 54. par rapport à l'autre asymptote CD.

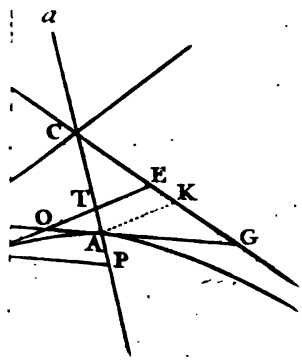
2°. Si l'on mene dans la figure 55. la ligne Ml, qui fasse avec l'asymptote CF, prolongée du côté du centre C, l'angle MlC égal à l'angle MLC ou ECF, de la figure 54 : il est clair que les lignes Ml, Mk, de la figure 55. seront égales aux lignes ML, MK, de la figure 54 ; puisqu'on suppose que la position du point M par rapport aux asymptotes, est la même dans ces deux figures. Or l'angle MlL, complement à deux droits de l'angle MlC, de la figure 55. ou de ECF de la figure 54, est egal à l'angle MKk, complement à deux droits de l'angle ECD de la fig. 55. ou de ECF de la fig. 54 ; Et par consequent dans la fig. 55. les deux triangles LMl, kMK, qui ont l'angle en M commun, & les angles aux points l, K, égaux, sont semblables : ce qui donne $LM. Ml :: kM. MK$. Et partant $LM * MK = lM * Mk$ ou $LM * MK$ de la figure 54. D'où l'on voit * que les premiers demi-diametres CA, CA, des figures 54. & 55. sont égaux. Il en est de même du diametre Bb ; puisque sa position & sa grandeur dépendent de celles du premier diametre Aa, auquel il est conjugué.

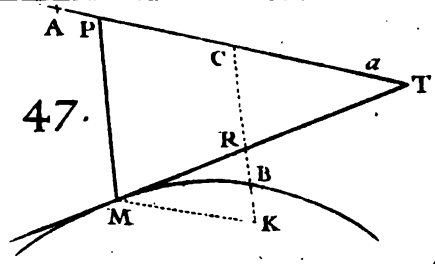
* Art. 94.

Comme l'on ne peut mener qu'une seule ligne ec, qui fasse avec la corde df de part ou d'autre, un angle égal à l'angle donné, lorsque cet angle est droit ; il s'ensuit qu'il n'y a que deux diametres conjugués Aa, Bb, qui faſſent entr'eux un angle droit ; & qu'ainsi * ils seront les deux axes. Mais le triangle dcf ou DCF, étant alors isoscelle, le premier axe Aa divisera par le milieu l'angle DCF fait par les asymptotes ; d'où l'on voit que pour trouver de position les deux axes, il n'y a qu'à tirer deux lignes droites Aa, Bb, perpendiculaires entr'elles, dont l'une d'elles Aa, divise par le milieu l'angle

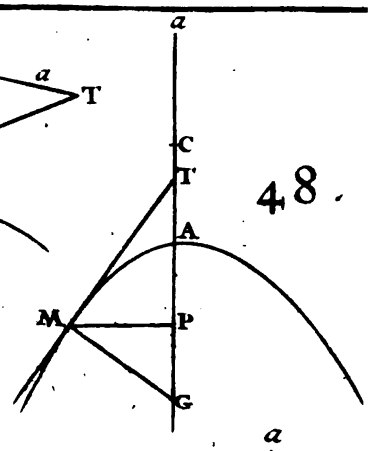
Fig. 56. & 57.

* Art. 111.

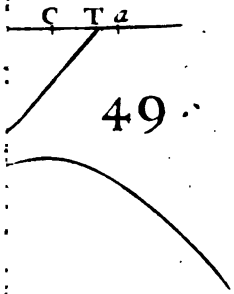




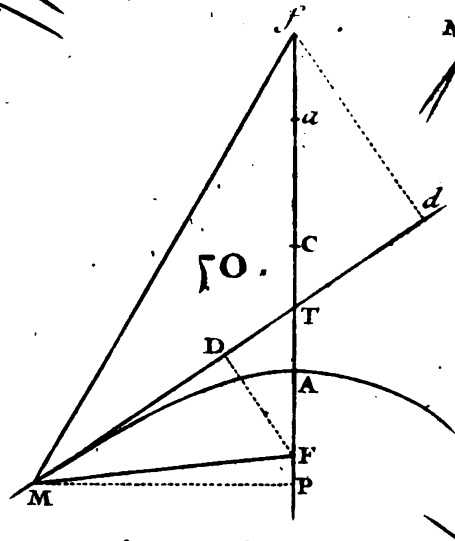
47.



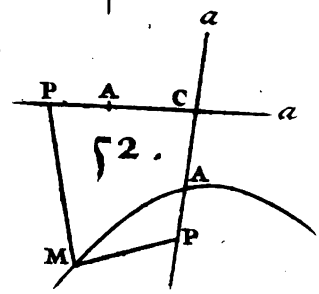
48.



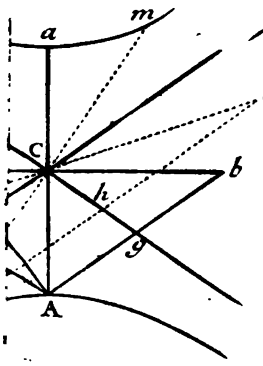
49.

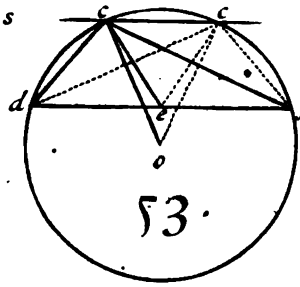


50.

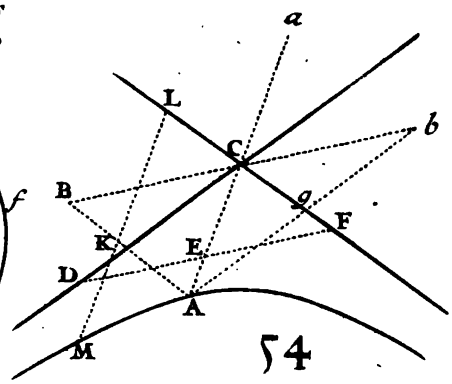


52.

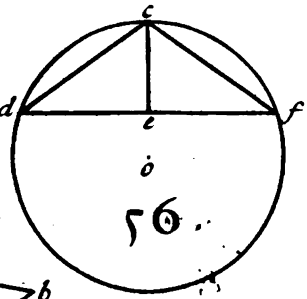




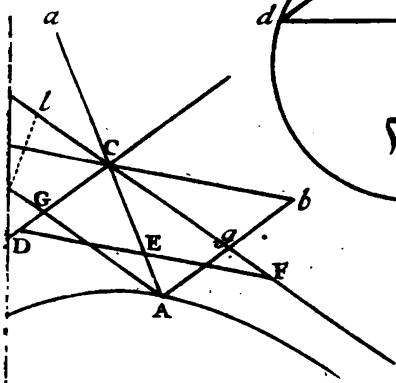
53.

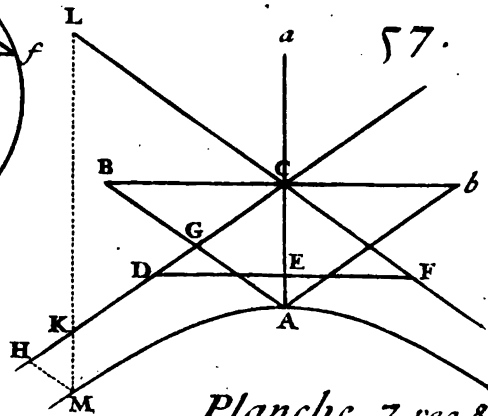


54



56.





57.

Planche 7 pag. 8

DCF, fait par les aſymptotes : après quoi l'on en déterminera la grandeur, comme on vient de l'enſeigner pour les diametres conjugués.

On peut encore trouver les deux axes de cette autre maniere. Soit menée par le point donné M une parallele MH à l'une des aſymptotes CF, & terminée par l'autre CD au point H. Soit priſe ſur l'aſymptote CD, la partie CG égale à la moyenne proportionnelle entre CH, HM : & ſoit tirée par le point G une parallele AB à CF, telle que chacune de ſes parties GA, GB, ſoit égale à CG. Il eſt évident que les lignes CA, CB, * ſeront les deux demi-axes de poſition & de grandeur.

* *Art.* 101. & 88.

COROLLAIRE.

129. IL eſt donc évident, 1°. Qu'il n'y a que deux diametres conjugués qui faſſent entr'eux un angle droit ; & qu'ainſi il ne peut y avoir que deux axes. 2°. Qu'on peut toûjours trouver deux differens diametres conjugués qui faſſent entr'eux un angle égal à un angle donné, lorſque cet angle n'eſt pas droit ; que les deux premiers ont une poſition ſemblable par rapport à l'autre aſymptote, à celle des deux autres par rapport à l'autre aſymptote ; d'où il ſuit qu'ils ſont ſemblablement poſés de part & d'autre des deux axes, puiſque les deux axes diviſent par le milieu les angles faits par les aſymptotes ; & qu'enfin leur grandeur demeure la même dans ces deux differentes poſitions.

PROPOSITION XIV.

Problême.

130. DEUX *diametres conjugués quelconques étant donnés, & ſçachant lequel des deux eſt le premier ; ou ce qui eſt la même choſe* * *les aſymptotes de deux Hyperboles oppoſées étant données avec un de leurs points quelconque : décrire ces Hyperboles par un mouvement continu.*

* *Art.* 114.

PREMIERE MANIE'RE.

On cherchera les deux axes, comme l'on vient d'enſeigner dans la propoſition précedente, & l'on décrira enſuite les Hyperboles oppoſées ſelon l'article 76.

SECONDE MANIE'RE.

FIG. 58. Soient Aa, Bb, les diametres conjugués donnés, entre leſquels le diametre Aa eſt le premier, ou bien CG, Cg, les aſymptotes données, avec le point A, un de ceux des Hyperboles oppoſées. Ayant mené par le point donné A une parallele AG, à l'une des aſymptotes Cg, & terminée par l'autre en G, on fera gliſſer le long de l'aſymptote CG, indéfiniment prolongée de part & d'autre du centre C, une droite HK égale à CG, qui entraînera par ſon extremité H une parallele HM à l'aſymptote Cg, & par ſon autre extremité K, une droite KA mobile autour du point fixe A. Je dis que l'interſection continuelle M des droites AK, HM, décrira dans ce mouvement les deux Hyperboles oppoſées qu'on demande.

Car à cauſe des triangles ſemblables KHM, KGA, on aura toûjours KH ou CG. $HM :: KG$ ou CH. GA. Et partant $CH * HM = CG * GA$. Le point M ſera donc * un des points de l'Hyperbole qui paſſe par le point donné A, & qui a pour aſymptotes les droites données CG, Cg; ou de l'Hyperbole oppoſée.

* *Art.* 101.

PROPOSITION XV.

Problême.

131. LES *mêmes choſes étant données que dans la Propoſition précedente; décrire les Hyperboles oppoſées par pluſieurs points.*

PREMIERE MANIE'RE.

FIG. 59. Soient CD, CE, les aſymptotes données, & A le

point donné. Ayant mené par ce point A autant de lignes DE, DE, DE, &c. qu'on voudra, terminées par les asymptotes; & ayant pris sur ces lignes droites les parties EM, EM, EM, &c. égales AD, AD, AD, &c; sçavoir chacune à sa correspondante : il est clair * 1°. Que les points M, M, M, &c, seront à l'Hyperbole qui passe par le point A, lorsque les points E, E, E, &c. tombent au dessous du centre. 2°. Que ces Hyperboles ont pour asymptotes les droites CD, CE. Faisant donc passer par tous les points M, M, M, &c. qui tombent dans l'angle fait par les asymptotes, une ligne courbe, & par les autres points M, M, M, &c. qui tombent dans l'angle oppose au sommet à celui ci, une autre ligne courbe; ces deux lignes seront les deux Hyperboles opposées qu'on demande.

* *Art.* 106.

SECONDE MANIE'RE.

Soient les lignes Aa, Bb, les deux diametres conjugués donnés, entre lesquels Aa est le second. Ayant pris sur le premier demi-diametre CB prolongé indéfiniment du côté de B, de petites parties CE, EE, EE, &c. égales entr'elles, autant & de telle grandeur qu'on voudra, on menera par celui des points E, qui est le plus proche du centre C, la ligne EP parallele à BA; & on prendra sur le second diametre Aa de part & d'autre du centre C, autant de petites parties CP, PP, PP, &c. toutes égales à CP, qu'il y a de petites parties CE, EE, EE, &c. Ayant tiré CD perpendiculaire & égale à CB, on menera par tous les points P, P, P, &c, des paralleles MPM, MPM, MPM, &c. au premier diametre Bb, sur chacune desquelles on prendra de part & d'autre du point P, des parties PM, PM, égales chacune à sa correspondante ED. Je dis que les deux lignes courbes qui passent par tous les points M ainsi trouvés, seront les deux Hyperboles opposées qu'on demande. FIG. 60.

Car nommant les données CA, t; CB ou CD, c; &c.

les indéterminées CP, x ; PM, y ; les triangles ſemblables CAB, CPE, donneront cette proportion $CA\ (t).\ CB\ (c) :: CP\ (x).\ CE = \frac{cx}{t}$. Et à cauſe du triangle ECD rectangle en C, (en imaginant chaque hypothenuſe ED qu'on a omiſe de peur de confuſion dans la figure) le quarré $\overline{ED}$ ou $\overline{PM}\ (yy) = \overline{CE}\ (\frac{ccxx}{tt})$ $+ \overline{CD}\ (cc)$. La ligne PM ſera donc * une ordonnée au ſecond diametre Aa, qui a pour conjugué le premier Bb ; & comme cette démonſtration convient à toutes les lignes PM, puiſque chaque CP eſt toûjours à la correſpondante CE, en la raiſon de CA à CB : il s'enſuit &c.

* *Art.* 81. & 118.

FIG. 61. Lorſque les diametres conjugués Aa, Bb, ſont égaux entr'eux, c'eſt à dire *, lorſque les Hyperboles qu'on demande ſont equilateres ; la conſtruction devient beaucoup plus aiſée. Car ayant mené CD perpendiculaire & égale à CA, & tiré par un point quelconque P du diametre Aa, une parallele MPM au premier diametre Bb ; il n'y aura qu'à prendre ſur cette ligne de part & d'autre du point P, les parties PM, PM, égales chacune à PD, pour avoir deux points des Hyperboles oppoſées. Car à cauſe du triangle PCD rectangle en C (en imaginant chaque hypothenuſe PD) on aura toûjours $\overline{PD}$ ou $\overline{PM} = \overline{CP} + \overline{CD}$ ou $\overline{CA}$; Et partant la ligne PM ſera * une ordonnée au ſecond diametre Aa, qui a pour conjugué le premier Bb qui lui eſt égal.

* *Def.* 16.

* *Art.* 127.

DE'FINITION.

17.

FIG. 62. Soient deux Hyperboles oppoſées AM, am, qui ayent pour premier axe la ligne Aa, & pour ſecond axe la ligne Bb ; & ſoient deux autres Hyperboles oppoſées BS, bs, qui ayent au contraire pour premier axe la ligne Bb, & pour ſecond axe la ligne Aa : ces deux nouvelles Hyperboles BS, bs, ſont appellées *Conjuguées*

aux deux premieres AM, am; & les quatre enſemble ſont appellées Hyperboles *conjuguées*.

COROLLAIRE.

132. IL eſt clair que les lignes Ba, Ab, ſont paralleles; puiſque les droites Aa, Bb, terminées par ces lignes, s'entrecoupent * en deux également au point C. D'où il ſuit, ſelon la définition 11e. que l'Hyperbole BS conjuguée à AM, a pour l'une de ſes aſymptotes la ligne CG aſymptote de l'Hyperbole AM; & pour l'autre, la ligne Cg autre aſymptote de l'Hyperbole AM indéfiniment prolongée du côté C: puiſque ces deux lignes paſſent par le centre C; & ſont les paralleles aux deux droites Ba, BA, menées de l'extremité B du premier axe Bb de l'Hyperbole BS aux deux extremités A, a, du ſecond. Il eſt donc évident que les deux droites CG, Cg, paralleles à Ab, AB, indéfiniment prolongées de part & d'autre du centre C, ſont non ſeulement les aſymptotes des Hyperboles oppoſées AM, am; mais auſſi des deux autres BS, bs, qui leur ſont conjuguées. * *Def.* 4. & 5.

PROPOSITION XVI.

Theorême.

133. SI *l'on mene par un point quelconque* H *d'une aſymptote* CG *commune aux deux Hyperboles* AM, BS, *une parallele* MS *à l'autre aſymptote* Cg; *je dis qu'elle rencontrera ces deux Hyperboles en des points* M, S, *qui ſont également éloignés de part & d'autre du point* H.

Car, 1°. La ligne MS rencontrera * chacune des Hyperboles AM, BS, en un point. 2°. A cauſe de l'Hyperbole AM, le rectangle * $CH * HM = CG * GA$; & à cauſe de l'Hyperbole BS, le rectangle $CH * HS = CG * GB$. Donc, puiſque * $GB = GA$, il s'enſuit que $CH * HS = CH * HM$; Et qu'ainſi $HS = HM$. *Ce qu'il falloit démontrer.* * *Art.* 104. * *Art.* 101. * *Art.* 88.

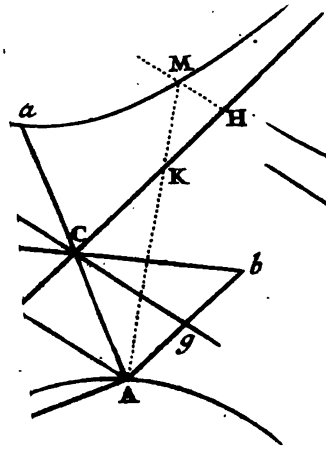
COROLLAIRE I.

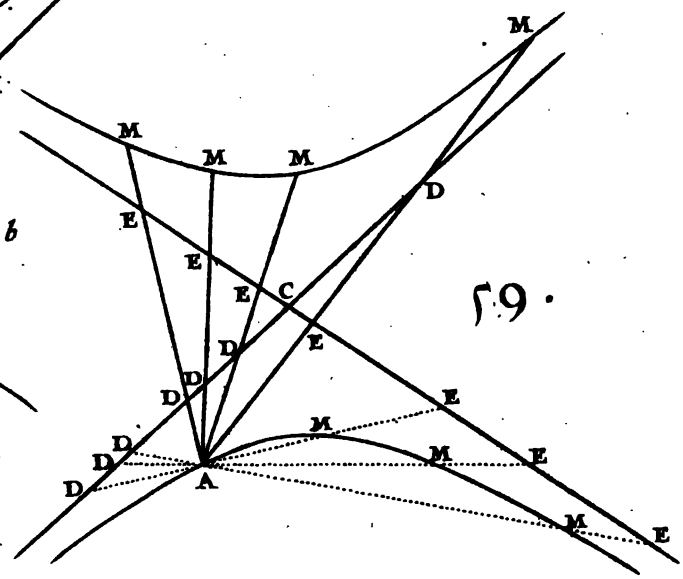
134. SI l'on mene des points M, S, des deux Hyperboles AM, BS, les diametres MCm, SCs, terminés par les deux autres Hyperboles am, bs, il eſt clair * que le diametre Ss ſera le ſecond diametre conjugué au premier Mm des deux Hyperboles oppoſées AM, am; & réciproquement que le diametre Mm ſera le ſecond diametre conjugué au premier Ss des deux Hyperboles oppoſées BS, bs. D'où l'on voit que deux diametres conjugués quelconques Mm, Ss, de deux Hyperboles oppoſées AM, am, ſont auſſi deux diametres conjugués des deux autres Hyperboles BS, bs, qui leur ſont conguées; avec cette difference que le premier diametre Mm devient le ſecond, & qu'au contraire le ſecond Ss devient le premier.

* *Art.* 114.

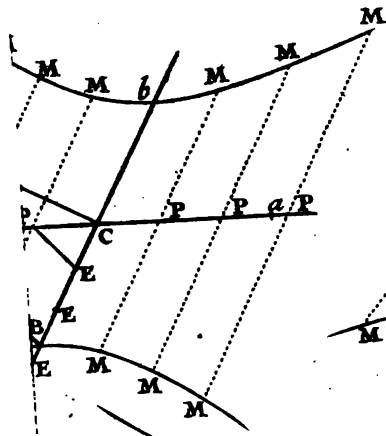
COROLLAIRE II.

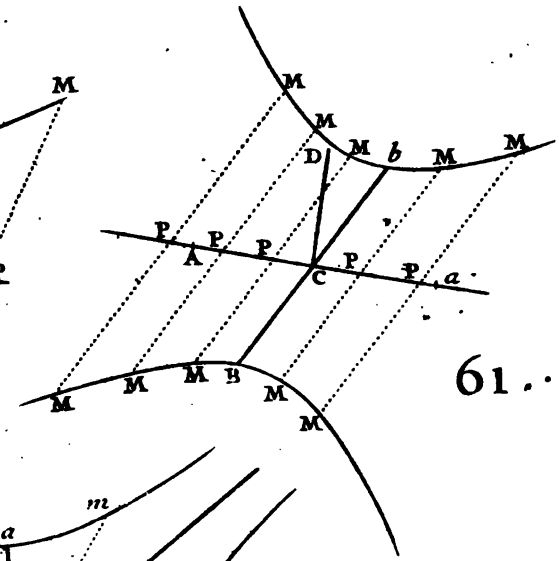
135. DE LA il eſt manifeſte que les Hyperboles conjuguées BS, bs, aux deux AM, am, paſſent par les extremités S, s, de tous les ſeconds diametres SCs de ces Hyperboles: & réciproquement que les Hyperboles AM, am, paſſent par les extremités M, m, de tous les ſeconds diametres MCm des deux Hyperboles BS, bs, qui leur ſont conjuguées.


M
a
H
K
C
b
g
A

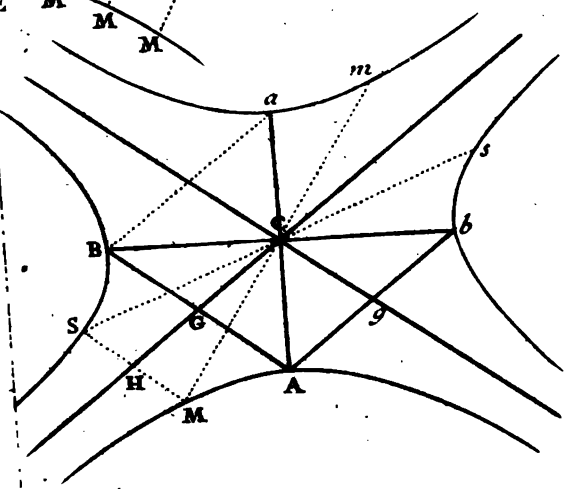

M
M
M
M
D
E
E
E
C
D
E
D
D
E
M
D
D
M
E
D
A
M
E

59.


M
M
M
b
M
M
P
P
P
a
P
C
E
E
B
E
M
M
M


M
M
D
M
b
M
M
P
P
P
A
C
P
P
a
M
M
M
B
M
M

61.


m
a
s
C
b
B
S
G
g
H
A
M

LIVRE QUATRIE'ME.

Des trois Sections Coniques.

DE'FINITION.

ON entend par le terme general de *Section Conique*, chacune des trois lignes Courbes dont l'on vient de parler dans les Livres précedens; ſçavoir, la *Parabole*, l'*Ellipſe*, l'*Hyperbole* ou les *Hyperboles oppoſées*.

PROPOSITION I.

Theorême.

136. SI *par l'extremité* A *d'un diametre quelconque* A a *d'une Ellipſe, ou d'un premier diametre* A a *d'une Hyperbole, l'on mene une parallele* A G *à ſes ordonnées* P M, *qui ſoit égale à ſon parametre; & qu'on tire de l'autre extremité* a, *la droite* a G, *qui coupe en* O *une ordonnée quelconque* P M *prolongée s'il eſt neceſſaire: je dis que le quarré de l'ordonnée* P M *eſt égal au rectangle de* A P *par* P O. Fig. 63. & 64.

Il faut prouver que $\overline{PM}^2 = AP \times PO$.

Selon les articles 41 & 55. du ſecond Livre, 81. & 118. du troiſiéme, on aura $Aa. AG :: AP \times Pa. \overline{PM}^2$. Or à cauſe des triangles ſemblables aAG, aPO, il vient $Aa. AG :: Pa. PO :: AP \times Pa. AP \times PO$. Donc $\overline{PM}^2 = AP \times PO$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

137. DE-LA il eſt évident que le quarré d'une ordonnée quelconque PM à un diametre Aa, eſt toûjours moindre dans l'Ellipſe, & toûjours plus grand dans l'Hyperbole, que le rectangle fait du parametre AG

par la partie AP de ce diametre, prise entre son origine ou extremité A, & la rencontre P de l'ordonnée; au lieu que dans la Parabole * ils sont égaux. Or c'est à cause de cette proprieté, que Apollonius, surnommé le *Grand Geometre*, a imposé aux Sections Coniques les noms que nous avons marqués: car il a voulu donner à entendre par celui de *Parabole*, la justesse ou exactitude; par celui d'*Ellipse*, le défaut ou manquement; & par celui d'*Hyperbole*, l'excès qui se trouve dans la comparaison des quarrés des ordonnées PM avec les rectangles correspondans $AP * AG$.

* *Art.* 7. & 20.

FIG. 65.

PROPOSITION II.

Theorême.

FIG. 66. & 67.

138. DANS *une Ellipse tout diametre* A a, *& dans les Hyperboles opposées tout premier diametre* A a *est divisé en deux également par le centre* C, *& ne rencontre la Section qu'en deux points.*

On a démontré cette Proposition dans les articles 50 du second Livre; 96 & 103 du troisiéme.

PROPOSITION III.

Théorême.

139. IL *ne peut y avoir qu'une seule tangente* L A L *qui passe par un point donné* A *sur une Section Conique.*

Cette Proposition se trouve démontrée dans les articles 21 du Livre premier; 56 du Livre second; & 107 du troisiéme.

PROPOSITION IV.

Theorême.

140. LES *tangentes* L A L, l a l, *qui passent par les extremités* A, a, *d'un diametre quelconque d'une Ellipse, ou de deux*

deux Hyperboles oppoſées ; ſont paralleles entr'elles.

Ceci a été démontré dans les articles 44 & 55 du Livre ſecond, & 110 du Livre troiſiéme.

PROPOSITION V.

Theorême.

141. UN *diametre quelconque étant donné dans l'Ellipſe ou dans les Hyperboles oppoſées ; je dis que la poſition du diametre qui lui eſt conjugué, eſt déterminée de maniere qu'il ne peut y en avoir qu'une ſeule.*

Car 1°. Si la Section eſt une Ellipſe, ou qu'étant les Hyperboles oppoſées le diametre donné *Aa* ſoit un premier diametre ; il eſt clair ſelon l'article 56 du Livre ſecond, & la définition 13e du troiſiéme Livre, que ſon conjugué *B b* ſera parallele à la tangente *LAL*, qui paſſe par l'une de ſes extremités *A*. Donc * &c. * *Art.* 139.

2°. Si la Section étant les deux Hyperboles oppoſées, le diametre donné *B b* eſt un ſecond diametre ; la choſe a été démontré dans l'article 115 du troiſiéme Livre.

COROLLAIRE.

142. IL eſt donc évident qu'une Section Conique étant donnée avec un de ſes diametres, la poſition des ordonnées à ce diametre, ſera déterminée de maniere que chacune n'en peut avoir qu'une ſeule, & qu'elles ſont toutes paralleles entr'elles. Car elles doivent être paralleles dans la Parabole * à la tangente qui paſſe par l'origine du diametre donné ; & dans les autres * Sections au diametre conjugué au diametre donné. * *Art.* 21. * *Def.* 12, II. & 14, III.

PROPOSITION VI.

Theorême.

143. DANS *une Ellipſe tout diametre* A a, *& dans les Hyperboles oppoſées tout premier diametre* A a, *diviſe la Section en des portions* A M, a m, *qui étant priſes de part*

M.

& d'autre de ce diametre dans des positions contraires ; sont parfaitement semblables & égales entr'elles.

Car ayant pris sur le diametre Aa (prolongé lorsqu'il s'agit des Hyperboles opposées,) de part & d'autre du centre C deux parties quelconques CP, Cp, égales entr'elles ; & mené de part & d'autre les ordonnees PM, pm, il est clair que ces ordonnées sont * égales entr'elles, & que les angles CPM, Cpm, sont * egaux. Si donc l'on conçoit que le plan Cpm separé de celui qu'on voit ici, soit placé de l'autre côté du diametre Aa dans une position contraire, en sorte que la droite Cp tombe sur CP, & pm, sur PM ; il est visible que le point a tombera * sur le point A, & le point m sur le point M. Et comme cela arrivera toûjours de quelque grandeur qu'on puisse prendre les parties CP, Cp ; il s'ensuit que tous les points m de la portion am, tomberont exactement sur tous les points M de la portion AM ; & qu'ainsi ces deux portions se confondront l'une avec l'autre. *Ce qu'il falloit démontrer.*

*Art.45.55. 85. & 118.

*Art. 142.

*Art. 138.

PROPOSITION VII.

Theorême.

Fig. 68. 69. 70. 71. 144. SI *l'on mene par un point quelconque* P *d'un diametre* A a *d'une Section Conique (prolongé lorsque la Section étant une Hyperbole, c'est un premier diametre) une parallele* M P M *aux ordonnées à ce diametre ; je dis qu'elle rencontrera la Section en deux points* M, M, *également éloignés de part & d'autre du point* P, *& non en davantage : Et reciproquement que si une ligne* M M *terminée par une Section Conique, est coupée en deux également par un diametre* A a *en un point* P, *autre que le centre, elle sera parallele aux ordonnées à ce diametre.*

Ceci a été démontré dans les articles 9, 11 & 20 du Livre premier ; 43, 45 & 55 du Livre second ; 83, 85 & 118 du Livre troisiéme.

COROLLAIRE I.

145. DE LA il eſt manifeſte que ſi une ligne quelconque MM terminée par une Section Conique, eſt coupée en deux également par un diametre Aa en un point P autre que le centre; toutes les paralleles à cette ligne terminées par la Section, le ſeront auſſi.

PROPOSITION VIII.

Problême.

146. UNE *Section Conique étant donnée, en trouver un diametre.*

Ayant mené deux droites MM, NN, paralleles entr'elles, & terminées par la Section; on tirera par leurs points de milieu P, Q, une ligne droite Aa qui ſera un diametre.

Car * le diametre qui paſſe par le point P milieu de MM, doit auſſi paſſer par le point Q milieu de NN. * *Art.* 145.

COROLLAIRE I.

147. SI l'on mene en même ſorte un autre diametre quelconque Dd; il eſt clair que la Section Conique ſera une parabole * lorſque Dd eſt parallele à Aa; une Ellipſe * lorſque Dd rencontre Aa au dedans de la Section; & enfin une Hyperbole * ou les Hyperboles oppoſées lorſque les diametres Dd, Aa, ſe rencontrent en un point C hors de la Section; & dans ces deux derniers cas que le point de rencontre C eſt le centre. Cela eſt une ſuite des définitions des diametres de ces trois lignes courbes. * *Def.* 7, I. * *Def.* 9, II. * *Def.* 9, III.

Lorſque l'Ellipſe eſt donnée toute entiere, il ſuffit pour avoir le centre de mener un diametre Aa; car ſa grandeur étant déterminée par la rencontre de l'Ellipſe, il n'y a * qu'à le diviſer par le milieu en C. Il en eſt de même lorſque * les Hyperboles oppoſées ſont données. * *Art.* 50. * *Art.* 96.

COROLLAIRE II.

148. DE-LA il ſuit qu'une Section Conique étant donnée, avec un point O ſur le même plan, on peut toûjours mener un diametre *D d* qui paſſe par ce point Car il ne faut dans la Parabole que mener par le point donné, O une parallele *D d* à un diametre quelconque *A a*; & dans l'Ellipſe, ou dans l'Hyperbole, ou dans les Hyperboles oppoſées, une ligne droite *D d* qui paſſe par le point donné O, & par le centre C que l'on aura trouvé par le Corollaire precedent.

COROLLAIRE III.

149. DE LA il eſt évident qu'une ligne droite *M M*, ne peut rencontrer une Section Conique qu'en deux points *M*, *M*; & jamais en davantage. Car ſi l'on mene par le point de milieu *P* de la ligne *M M* un diametre *A a*, il eſt clair ſelon l'article 144, qu'elle ſera parallele aux ordonnées à ce diametre; d'où il ſuit ſelon le même article qu'elle ne peut rencontrer la Section qu'aux deux points *M*, *M*.

Si la ligne droite paſſoit par le centre C; on auroit recours à l'article 138. où cela a déja été démontré.

COROLLAIRE IV.

150. UNE Ellipſe ou une Hyperbole (*fig.* 69 70) étant donnée; trouver deux de ſes diametres conjugués *A a*, *B b*; & de plus mener les aſymptotes *C G*, *C g*, lorſque c'eſt une Hyperbole.

Ayant trouvé un diametre *A a* par le moyen des deux paralleles *M M*, *N N*, & mené par le centre C une parallele *B b*, à ces deux lignes: il eſt clair * que les diametres *A a*, *B b*, ſeront conjugués; puiſque les lignes *M M*, *N N*, étant coupées en deux également par le diametre *A a* aux points *P*, *Q*, ſeront * ordonnées de part & d'autre à ce diametre.

* *Def.* 12, II. & 14, III.

* *Art.* 144.

Maintenant pour mener (*fig.* 70.) les asymptotes CG, Cg; on fera $AP * Pa. \overline{PM}^2 :: \overline{CA}^2. \overline{CB}^2$ ou $\overline{Cb}^2$. ou (ce qui est la même chose) comme la moyenne proportionnelle entre AP, Pa, est à PM, de même CA est à CB ou Cb. Et ayant tiré les droites AB, Ab, on leur menera par le centre C les paralleles indéfinies Cg, CG, qui seront les asymptotes cherchées. Car il est clair que Bb sera * la grandeur du second diametre conjugué au premier Aa; & le reste est évident selon les définitions 13 & 14 du troisiéme Livre. * *Art.* 81. & 118.

PROPOSITION IX.

Problême.

151. UNE *Section Conique étant donnée, avec un de ses diametres* A a; *trouver la position des ordonnées* P M *à ce diametre.*

Ayant mené deux paralleles au diametre donné Aa, qui en soient également éloignées de part & d'autre, & qui rencontrent la Section en des points M, M; je dis que la ligne MM qui coupe le diametre donné au point P, est ordonnée de part & d'autre à ce diametre, pourvû que le point P ne tombe point sur le centre. Fig. 68. 69. 70. 71.

Car par la construction la ligne MM sera coupée en deux également par le diametre Aa au point P; & par conséquent elle sera * ordonnée de part & d'autre à ce diametre. * *Art.* 144.

On peut toûjours par cette maniere trouver la position d'une ordonnée PM à un diametre donné Aa. Car 1°. Dans la Parabole & l'Hyperbole (*fig.* 68. & 70.) lorsque le diametre donné Aa est un premier diametre; il est clair qu'à quelque distance qu'on mene de part & d'autre les deux paralleles au diametre Aa, elles rencontreront chacune la Section en un point M; puisque * la Section s'eloigne toûjours de plus en plus à l'infini du diametre Aa. 2°. Dans l'Ellipse (*fig.* 69.), & dans les Hyperboles opposées (*fig.* 71.) lorsque le diametre donné * *Art.* 10. 20. 84. & 118.

Aa eſt un ſecond diametre : il eſt clair qu'on peut toûjours mener deux paralleles de part & d'autre du diametre Aa, qui coupent la Section chacune en un point M, en ſorte que la ligne MM rencontre le diametre donné Aa en un point P autre que le centre ; puiſque dans l'Ellipſe * les ordonnées du diametre Aa vont toûjours en diminuant depuis le centre C juſqu'en A, & qu'au contraire dans les Hyperboles oppoſées * elles vont toûjours en augmentant à meſure qu'elles s'éloignent du centre C.

* *Art.* 44. & 55.
* *Art.* 84. & 118.

COROLLAIRE I.

152. DE-LA on tire (*fig.* 68,69,70.) une nouvelle maniere de mener une tangente par un point donné A ſur une Section Conique donné. Car * ayant mené par ce point un diametre Aa, & trouvé une double ordonnée MPM à ce diametre ; il eſt clair * que ſi l'on mene par le point A une parallele à MM, elle ſera tangente en A.

* *Art.* 148.
* *Art.* 10,20, 44,55.84. 118. & *Def.* 9, I. 12, II. 7, III.

COROLLAIRE II.

153. DE-LA on voit encore comment une Ellipſe ou les Hyperboles oppoſées (*fig.* 69, 70, 71.) étant données avec un de leurs diametres quelconques Aa ; on peut trouver le diametre Bb qui lui eſt conjugué. Car il n'y a qu'à mener par le centre C une parallele Bb aux ordonnées à ce diametre.

Ou bien ; ſoit Bb le diametre donné, & qu'il faille trouver ſon conjugué Aa. Ayant tiré MM parallele à Bb & terminée par la Section, on menera par ſon point de milieu P, & le milieu C de Bb, le diametre cherché Aa.

COROLLAIRE III.

154. UNE Hyperbole MAM (*fig.* 70.) étant donnée, avec un de ſes ſeconds diametres Bb de poſition ; en terminer la grandeur, & trouver en même temps la poſition de ſes ordonnées.

On cherchera le premier diametre Aa conjugué au ſecond Bb, par le moyen de la ſeconde maniere du Corollaire précedent ; & ayant fait $AP * Pa$, $\overline{PM}^2 :: \overline{CA}^2 . \overline{CB}^2$ ou $\overline{Cb}^2$. Il eſt clair * que Bb ſera la grandeur du ſecond diametre Bb, & que ſes ordonnées ſeront paralleles au diametre Aa. * *Art.* 82. & 118.

PROPOSITION X.

Problême.

155. D'UN *point donné* T *hors une Section Conique donnée, mener deux tangentes* TM, TM, *à cette Section.* FIG. 72. 73. 74.

POUR LA PARABOLE.

Ayant mené (*fig.* 72.) par le point donné T * un diametre qui rencontre la Parabole au point A, & pris ſa partie AP égale à AT ; on tirera par le point P * une parallele aux ordonnées qui rencontrera * la Parabole en deux points M, M ; par leſquels & par le point donné T on tirera les droites TM, TM, qui ſeront * les tangentes cherchées. * *Art.* 148. * *Art.* 151. * *Art.* 144. * *Art.* 22. & 23.

POUR L'ELLIPSE.

Ayant mené (*fig.* 73.) par le point donné T * le diametre Aa, & pris CP troiſiéme proportionnelle à CT, CA ; on menera par le point P, une parallele aux ordonnées qui rencontrera * l'Ellipſe en deux points M, M ; par leſquels & par le point donné T on tirera les droites TM, TM, qui ſeront * les tangentes cherchées. * *Art.* 148. * *Art.* 144. * *Art.* 57. & 58.

POUR L'HYPERBOLE & LES HYPERBOLES OPPOSÉES.

Ayant mené (*fig.* 74.) par le point donné T, * le diametre Aa, dont on déterminera la grandeur † s'il eſt un ſecond diametre ; on prendra CP troiſiéme proportion- * *Art.* 148. † *Art.* 154.

nelle à CT, CA (du même côté du point donné T, par rapport au centre, lorsque ce point tombe dans l'un des angles faits par les asymptotes ; & du côté opposé, lorsqu'il tombe dans l'un des angles à côté) : & l'on menera par le point P une parallele aux ordonnées qui rencontrera * l'Hyperbole ou les Hyperboles opposées en deux points M, M ; par lesquels & par le point donné T, on tirera les droites TM, TM, qui seront * les tangentes cherchées.

* *Art.* 144.

* *Art.* 121.

Si le point donné tomboit sur le centre C, les deux tangentes seroient alors * les asymptotes CG, Cg, & on les tireroit comme l'on a enseigné dans l'art. 150. Et enfin si le point donné tomboit sur une asymptote comme en S, on tireroit par le point H milieu de CS, une parallele HM à l'autre asymptote CG, laquelle rencontreroit * l'Hyperbole en un point M, par où & par le point donné S, on tireroit une droite SM qui seroit * une des tangentes cherchées ; & l'autre seroit l'asymptote même Cg sur laquelle se trouve le point donné S.

* *Art.* 108.

* *Art.* 104.

* *Art.* 107.

COROLLAIRE I.

156. COMME la ligne MPM parallele aux ordonnées rencontre toûjours * la Section en deux points M, M, également éloignés de part & d'autre du point P, & non en davantage ; il s'ensuit qu'on ne peut mener d'un point donné T hors une Section Conique que les deux tangentes TM, TM. D'où il est évident que le diametre qui passe par le point de rencontre T de deux tangentes, coupe par le milieu en P la ligne MM qui joint les points touchans ; & réciproquement que le diametre qui coupe par le milieu en P une ligne droite MM qui joint les points touchans de deux tangentes MT, MT, passe par leur point de rencontre T.

* *Art.* 144.

COROL. II.

COROLLAIRE II.

157. TOUTES les tangentes de la Parabole (*fig.* 72.) ſe rencontrent deux à deux, étant prolongees autant qu'il eſt neceſſaire. Car ſi l'on joint deux points touchans quelconques M, M, par une ligne droite, & qu'après l'avoir coupee par le milieu en P, on prenne ſur le diametre qui paſſe par ce point, & qui rencontre la Parabole en A, la partie AT égale à AP; il eſt clair que les deux tangentes MT, MT, qui paſſent par les points M, M, ſe rencontreront en ce point T.

COROLLAIRE III.

158. IL eſt encore évident (*fig.* 74.) que toutes les tangentes d'une Hyperbole ſe rencontrent deux à deux, étant prolongées autant qu'il eſt neceſſaire; & toûjours au dedans de l'angle fait par les aſymptotes. Car ſi l'on joints deux points touchans quelconques M, M, par une ligne droite, & qu'après l'avoir coupée par le milieu en P, on prenne ſur le diametre qui paſſe par ce point & qui rencontre l'Hyperbole en A, la partie CT troiſiéme proportionnelle à CP, CA; il eſt clair que les deux tangentes MT, MT, ſe rencontreront en ce point T, lequel ſera toûjours * au dedans de l'angle fait par les aſymptotes, puiſque le demi-diametre CA tombe au dedans de cet angle.

* *Art.* 103.

COROLLAIRE IV.

159. TOUTES les tangentes d'une Ellipſe ou des Hyperboles oppoſées (*fig.* 73. 74.) ſe rencontrent deux à deux, lorſque la ligne qui joint les deux points touchans ne paſſe point par le centre: ſçavoir, celles de l'Ellipſe du même côté du centre par rapport à cette ligne, & celles des Hyperboles oppoſées de l'autre côté. Cela ſe prouve par le moyen de la Propoſition cy-deſſus,

comme l'on vient de faire voir dans les deux Corollaires précédens.

PROPOSITION XI.

Problême.

160. UNE *Section Conique étant donnée, en trouver un diametre qui faſſe de part ou d'autre avec ſes ordonnées des angles égaux à un angle donné.*

POUR LA PARABOLE.

* *Art.* 146. Fig. 75. 76. Ayant trouvé * un de ſes diametres AP, on menera par ſon origine A, la ligne AN, qui faſſe avec AP de part ou d'autre l'angle PAN égal à l'angle donné, & qui rencontre la Parabole au point N. Ayant diviſé AN par le milieu en O, & tiré OM parallele à AP ; je dis que la ligne MO eſt le diametre qu'on cherche.

Car 1°. Tous les diametres d'une Parabole devant être paralleles entr'eux, ſelon la définition ſeptiéme du premier Livre, il s'enſuit que MO ſera un diametre ; puiſque AP en eſt un.

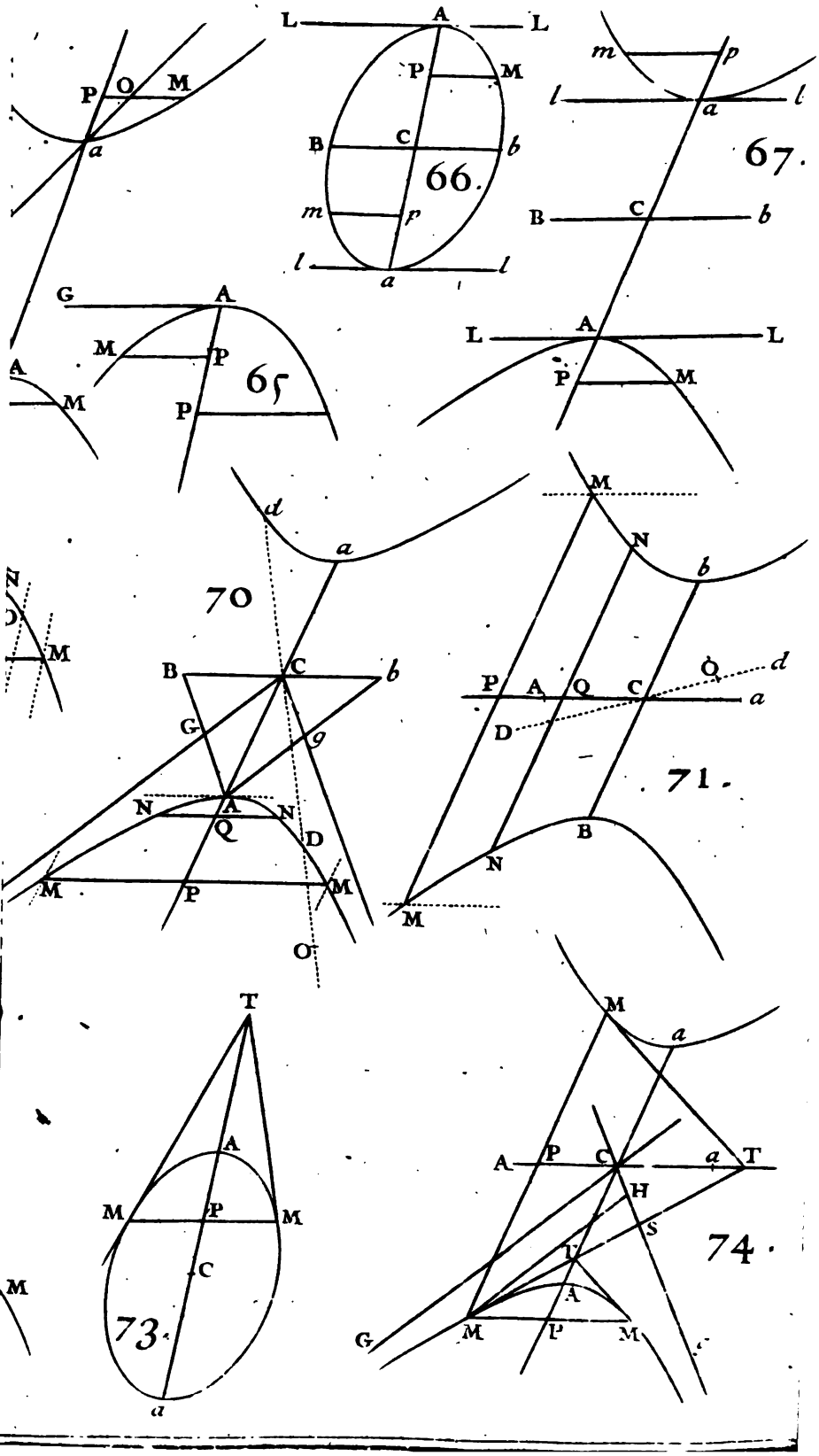
2°. La ligne AN terminée par la Parabole étant coupée en deux parties égales par le diametre MO, elle lui ſera * ordonnée de part & d'autre. * *Art.* 144.

3°. A cauſe des paralleles MO, AP, l'angle MOA que fait le diametre MO avec ſon ordonnée OA, ſera égal à l'angle PAN qui a été fait égal à l'angle donné. Donc &c.

Si l'angle donné eſt droit, il eſt manifeſte que le diametre MO qu'on trouvera par cette methode ſera * l'axe de Parabole. * *Art.* 23.

POUR LES AUTRES SECTIONS.

* *Art.* 146. Fig. 77. 78. 79. 80. Ayant trouvé * un de leurs diametres Aa, & décrit ſur ce diametre de part ou d'autre un arc de cercle ANa capable de l'angle donné ou de ſon complement à deux droits ; on menera du point N où il rencontre la Sec-


P O M
a
L A L
P M
B C b
66.
m p
l a l
G A
M P
A M
P
65
m p
l a l
67.
B C b
L A L
P M
d
a
70
N
M
B C b
G
g
N A N
Q D
M P M
O
M
N
b
P A Q C Q d
a
D
71.
B
N
M
T
A
M P M
C
73.
a
M
a
A P C a T
H
S
74.
G
M P M

tion aux deux extremités A, a, du diametre Aa, les lignes NA, Na; par les milieux desquelles O, Q, & par le centre C, on tirera deux diametres, Mm, Ss. Je dis que chacun de ses diametres sera de part ou d'autre avec ses ordonnées des angles égaux à l'angle donné.

Car la ligne AN terminée par la Section, étant coupée en deux également au point O par le diametre Mm, elle sera * ordonnée de part & d'autre à ce diametre. Or le diametre Mm est parallele à la ligne Na, puisqu'il divise par le milieu aux points C, O, les lignes Aa, AN; & partant l'angle mOA que fait le diametre Mm avec son ordonnée AO, sera égal à l'angle ANa, qui par la construction est égal à l'angle donné, ou à son complement à deux droits. On prouvera de même que le diametre Ss fait avec son ordonnée QN un angle égal à l'angle donné, ou à son complement à deux droits. Donc &c. * *Art.* 144.

Il est visible 1°. Que le diametre Ss est * conjugué au diametre Mm; puisqu'il est parallele à son ordonnée ON. 2°. Que les diametres conjugués Mm, Ss, deviennent * les deux axes, lorsque l'angle donné est droit. * *Def.* 12. II. & 14. III. * *Art.* 58. & 128.

PROPOSITION XII.

Problême.

161. UN *diametre d'une Section Conique étant donné, avec son parametre, & la position de ses ordonnées, & sçachant de plus si c'est un premier ou second diametre lorsqu'il s'agit de l'Hyperbole; décrire la Section par une methode uniforme pour toutes les trois.*

PREMIERE MANIE'RE.

Pour la Parabole. Ayant trouvé * l'axe AP, son origine A, & son parametre AG que l'on prendra sur l'axe prolongé du côté de son origine; on menera par le point G une ligne droite indéfinie DD perpendiculaire à PG. * *Art.* 27. FIG. 81.

On fera mouvoir enſuite une ligne droite indéfinie DM le long de GD toûjours parallelement à AG, en entraînant par ſon extremité D le côté DA de l'angle droit DAM, mobile ſur ſon ſommet A autour de l'origine A de l'axe AP. Je dis que l'interſection continuelle M de la ligne DM & du côté AM, décrira dans ce mouvement la Parabole qu'on demande.

Car menant MP perpendiculaire à l'axe, les triangles rectangles AGD, MPA, ſeront ſemblables; puiſque chacun des angles GAD, PMA, étant joint à l'angle PAM, vaut un droit. On aura donc $AG.GD$ ou $PM :: PM.AP$. D'où il ſuit que $\overline{PM}^2 = GA \times AP$; & qu'ainſi PM eſt une * ordonnée à l'axe AP.

* *Art.* 7.

On a déja donné cette conſtruction dans le Livre premier article 29, d'une maniere qui convient à tous les diametres : On ne la repete ici, & on ne la reſtraint à l'axe, que pour en faire voir la liaiſon & le rapport qu'elle a avec celle qu'on va donner pour les autres Sections.

Pour les autres Sections. Ayant trouvé entre le diametre donné & ſon parametre une moyenne proportionnelle, & l'ayant placée en ſorte qu'elle ſoit parallele aux ordonnées, & coupée en deux également par le centre; il eſt clair * qu'on aura deux diametres conjugués; par le moyen deſquels on cherchera * les deux axes, & enſuite le parametre de celui des deux qu'on voudra dans l'Ellipſe, & du premier dans l'Hyperbole. Cela fait.

* *Def.* 13. II. & 15. III.
* *Art.* 64. & 128.

FIG. 82. 83. On prolongera dans l'Ellipſe, & on coupera dans l'Hyperbole l'axe Aa en G; en ſorte que aG ſoit à GA, comme l'axe Aa eſt à ſon parametre. Ayant tiré par le point G une perpendiculaire indéfinie DD à l'axe Aa, on fera mouvoir le point D le long de cette ligne, en entraînant avec lui la ligne droite Da mobile autour de l'extremité a de l'axe Aa, & le côté DA de l'angle droit DAM mobile ſur ſon ſommet A autour de l'autre extremité A de l'axe Aa. Je dis que l'interſection

continuelle M des lignes AM, aD, décrira dans ce mouvement la Section requiſe.

Car menant MP perpendiculaire ſur l'axe Aa, les triangles ſemblables aPM, aGD, donnent $aP.PM :: aG.GD$. Or les triangles rectangles AGD, MPA, ſont ſemblables ; puiſque chacun des angles GAD, PMA, étant joint à l'angle PAM, vaut un droit ; Et partant $AP.PM :: GD.GA$. Si donc l'on multiplie les Antecedens & les Conſequens des deux premieres raiſons, par ceux de ces deux dernieres ; on aura $aP \times PA.\overline{PM}^2 :: aG \times GD.GD \times GA :: aG.GA$, c'eſt à dire, comme l'axe Aa eſt à ſon parametre. Donc * &c.

* *Art.* 41. & 81.

Il eſt à remarquer que plus le point D s'éloigne du point G ſur la ligne DD, plus l'angle PaM augmente, & plus au contraire l'angle PAM diminuë ; de ſorte que les lignes aM, AM, deviennent paralleles dans l'Hyperbole, & ſe coupent enſuite de l'autre côté de la ligne DD, où elles décrivent par leur interſection continuelle l'Hyperbole oppoſée.

Si l'on conçoit dans l'Ellipſe & dans l'Hyperbole, que le point a s'éloigne à l'infini du point A, ou (ce qui eſt la même choſe) que l'axe Aa devienne infiniment grand ; les lignes GA, Da, qui ne ſe rencontrent que dans l'infini, peuvent être regardées comme paralleles : ainſi cette derniere conſtruction retombe dans le cas de la précédente. C'eſt pourquoi l'Ellipſe ou l'Hyperbole deviendroit alors une Parabole qui auroit pour parametre la ligne AG ; & par conſequent on peut regarder une Parabole, comme une Ellipſe ou une Hyperbole dont l'axe eſt infini : ſçavoir, le premier dans l'Hyperbole, & celui des deux qu'on voudra dans l'Ellipſe.

SECONDE MANIE'RE.

Pour la Parabole. Soit un triangle iſoſcelle HAL, dont l'un des côtés AH ſoit ſitué ſur le diametre donné AP prolongé indéfiniment de part & d'autre de ſon

FIG. 84.

origine A, & l'autre côté AL ſur la tangente indéfinie LAL qui paſſe par le point A. Soit conçûë ſa baſe HL ſe mouvoir toûjours parallelement à elle même en entraînant par l'une de ſes extremités L la ligne indefinie LM parallele à AP, & par l'autre extremité H la ligne HF parallele à AL & égale au parametre donné du diametre AP, laquelle entraîne auſſi par ſon extremité F la droite FA mobile autour du point fixe A. Je dis que l'interſection continuelle M des deux droites FA, LM, décrit pendant que la ligne HL ſe meut dans l'angle HAL & ſon oppoſé ou ſommet, la Parabole MAM qu'on demande.

Car menant l'ordonnée MP au diametre AP, les triangles ſemblables AHF, APM, donnent AH ou AL ou PM. $HF :: AP. PM$, & prenant $\overline{PM}^2 =$ $AP * HF$. Donc * &c.

*Art. 7. & 20.

On doit obſerver que le point H doit tomber au delà de l'origine A du diametre AP ; lorſque les points F, L, tombent de part & d'autre de ce diametre.

FIG. 85 86. *Pour les autres Sections.* La conſtruction eſt la même que pour la Parabole, à l'exception que la ligne LM doit tourner autour de l'autre extremité a du diametre donné Aa ; au lieu que dans la Parabole elle lui eſt parallele. On ſuppoſe dans l'Hyperbole que le diametre donné eſt un premier diametre ; car ſi c'étoit un ſecond, on trouveroit ſelon l'article 115 du Livre troiſiéme, le premier qui lui eſt conjugué & ſon parametre.

Car menant MP ordonnée au diametre Aa, les triangles ſemblables aPM, aAL, & APM, AHF, donnent $aP. PM :: aA. AL$ ou AH. Et $AP. PM :: AH. HF$. Et partant, ſi l'on multiplie les Antecedens & les Conſequens des deux premieres raiſons par ceux des deux ſecondes, on aura $aP * PA. \overline{PM}^2 :: aA * AH.$ $AH * HF :: aA. HF$. Donc * &c.

*Art. 41. 55. 81. & 118.

Il faut obſerver que les points H, a, doivent tomber de part & d'autre du point A dans l'Ellipſe, & du même côté dans l'Hyperbole, lorſque les points F, L, tom-

bent de part & d'autre du diametre Aa.

COROLLAIRE I.

162. DE LA on voit comment un diametre Aa étant donné avec une de ſes ordonnées PM ; on peut trouver ſon parametre HF. Car 1°. Dans la Parabole on prendra ſur le diametre AP la partie AH égale à PM ; & ayant tiré la ligne HF parallele à PM, & terminée en F par la ligne AM tirée de l'origine A du diametre par l'extremité M de l'ordonnée ; il eſt clair que cette ligne HF ſera le parametre du diametre AP. FIG. 84.

2°. Dans les autres Sections, on menera par l'une des extremités a du diametre donné Aa la ligne aM qui rencontre la tangente AL, qui paſſe par l'autre extremité A, au point L ; & ayant pris ſur le diametre Aa la partie AH égale à AL, on tirera HF parallele à PM, laquelle rencontrant en F la ligne AM, ſera le parametre du diametre Aa. FIG. 85. 86.

COROLLAIRE II.

163. ON tire de la ſeconde maniere qu'on vient d'expliquer, une methode uniforme & trés-exacte dans la pratique de décrire une Section Conique par pluſieurs points. La voici dans l'Ellipſe : & elle ſervira de Regle pour les autres Sections.

Ayant pris ſur la tangente AL, qui paſſe par l'une des extremités A du diametre donné Aa, la partie AG égale à ſon parametre, & mené une parallele indéfinie GF à Aa ; on tirera librement par le point A autant de lignes droites AF, AF, &c. qu'on voudra. Ayant pris ſur la tangente indéfinie AL, les parties AL, AL, &c. égales aux correſpondantes GF, GF, &c. & mené les droites aL, aL, &c ; je dis que les interſections M, M, &c. des droites correſpondantes FA, La, FA, La, &c. ſeront des points de l'Ellipſe qui a pour diametre la ligne Aa, pour tangente la ligne AL, & pour parametre du FIG. 87.

diametre Aa la ligne AG. Cela eſt viſible en menant FH parallele à AG, & tirant la ligne HL par le point L correſpondant au point F. Car le triangle HAL ſera iſoſcelle ; puiſque * AL eſt égale à GF ou AH, & HF ſera égale au parametre du diametre Aa : c'eſt pourquoi cette conſtruction retombe dans celle de la ſeconde des deux maniéres précedentes.

* *Hyp.*

Comme les lignes GF, AL, deviennent fort grandes, lorſqu'il s'agit de trouver des points M qui ſoient proches du point a ; on pourra ſe ſervir, pour trouver ces points, de la tangente al qui paſſe par l'autre extremité a du diametre Aa, & de la ligne gf parallele à Aa, comme l'on voit dans cette figure.

Si l'on mene les ordonnées MP, MP, &c. paralleles à la tangente AL, & qu'on les prolonge de l'autre côté du diametre Aa en M, M, &c. en ſorte qu'elles ſoient coupées chacune en deux également par ce diametre ; il eſt clair * que ces nouveaux points M, M, &c. ſeront encore à la même Ellipſe.

* *Art.* 43.

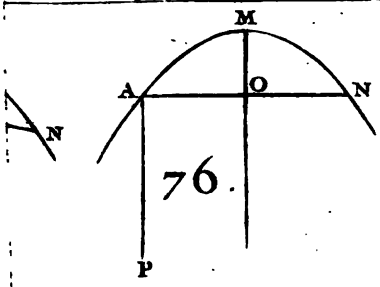
On pourroit ſe ſervir d'une même ouverture de compas GF ou AL pour marquer ſur les lignes GF, AL, autant de points F, F, &c, L, L, &c, qu'on voudra ; car par ce moyen toutes ces petites parties étant égales entr'elles, chaque GF ſeroit égale à la correſpondante AL ; ce qui eſt le fondement de la démonſtration.

PROPOSITION XIII.

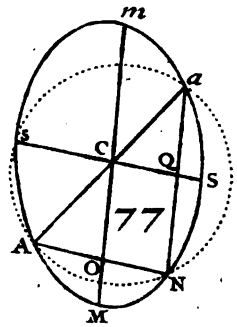
Theorême.

FIG. 88. 89. 90. 91. 164. S'IL *y a deux droites* MN, AR, *terminées par une Section Conique, leſquelles ſe rencontrent en un point* P, *& qui ſoient paralleles à deux droites données de poſition ; je dis que le rectangle* MP * PN *ſera toûjours au rectangle* AP * PR *en raiſon donnée en quelque endroit de la Section que puiſſent tomber les droites* MN, AR.

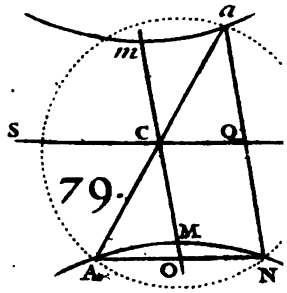
POUR



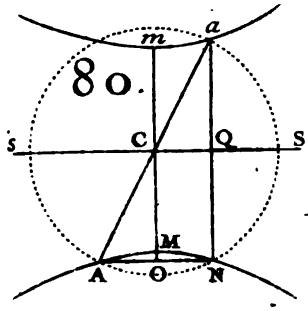
76.



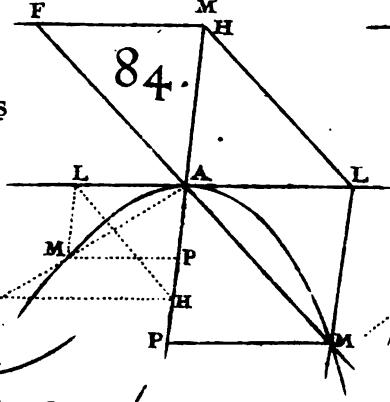
77.



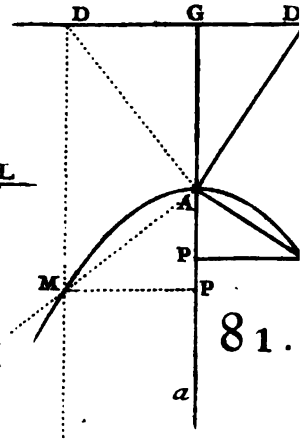
79.



80.

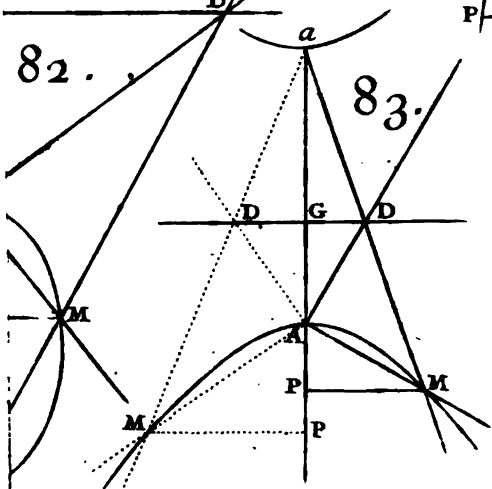


84.

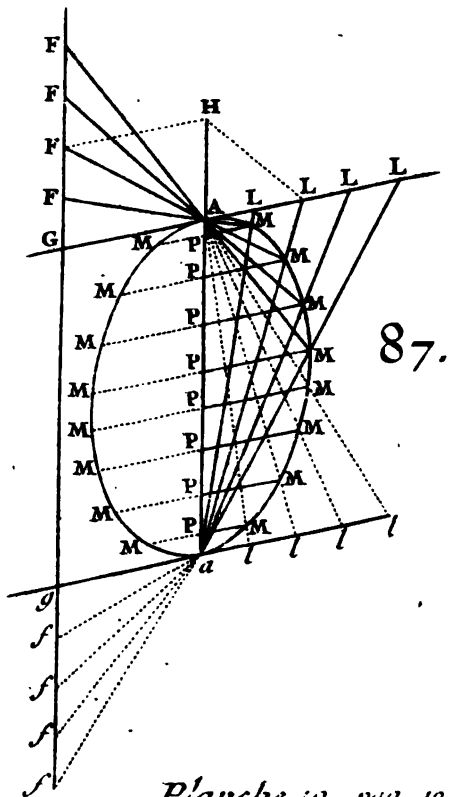


81.

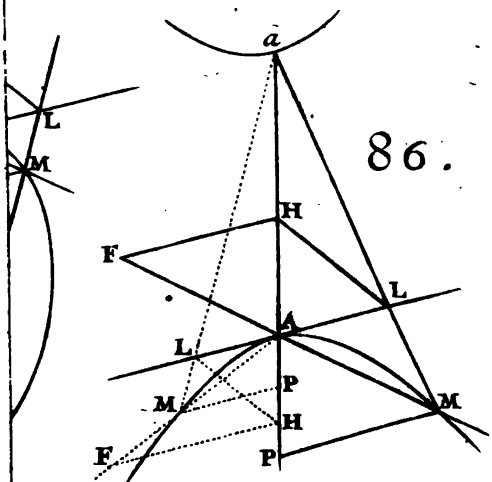
82.



83.



87.



86.

Planche 10. pag 104

POUR LA PARABOLE.

Soient (*fig.* 88.) les tangentes CB, EB, qui se rencontrent au point B, paralleles aux droites MN, AR: je dis que $MP * PN . AP * PR :: \overline{CB}^2 . \overline{EB}^2$.

Car ayant mené * par le point G milieu de MN le diametre CG, & tiré par son origine C la parallele CB à MN; il est clair * qu'elle sera tangente en C. On menera de la même sorte la tangente EB parallele à AR, que l'on prolongera jusqu'à ce qu'elle rencontre le diametre CG au point K; & tirant par le point touchant E l'ordonnée EL, on aura * $KC = CL$; & par consequent $KB = BE$. On tirera ensuite AD ordonnée, & AF parallele au diametre CG, & on nommera les données KB ou BE, m; BC, n; CK, e; le parametre CH du diametre CG, p; & les indéterminées AP, x; PM, y; AD, r; CD, s.

* *Art.* 148.

* *Art.* 10. & 21.

* *Art.* 22. & 23.

Cela posé, les triangles semblables KBC, APF, donneront $PF = \frac{nx}{m}$, AF ou $DG = \frac{ex}{m}$: Et par consequent $CG = \frac{ex}{m} + s$, GM ou $GN = y + \frac{nx}{m} + r$, PN ou $GN + GP = y + \frac{2nx}{m} + 2r$; $MP * PN = yy + \frac{2nx}{m}y + 2ry$, $\overline{GM}^2 = yy + \frac{2nx}{m}y + 2ry + \frac{nn}{mm}xx + \frac{2nr}{m}x + rr$. Or * $CD\ (s) . CG\ (\frac{ex}{m} + s) :: \overline{AD}^2\ (rr) . \overline{GM}^2 = rr + \frac{err}{ms}x = rr + \frac{ep}{m}x$, puisque $\overline{AD}^2\ (rr) = CD * CH\ (ps)$. Et comparant ensemble ces deux valeurs de $\overline{GM}^2$, on formera l'équation $yy + \frac{2nx}{m}y + 2ry + \frac{nn}{mm}xx + \frac{2nr}{m}x - \frac{ep}{m}x = o$, qui convient également à tous les points de la Parabole, lorsque la ligne AR tombe au dessus du diametre CG, & que le point d'intersection P tombe entre les points A, R.

* *Art.* 8. & 20.

Maintenant si l'on fait dans cette équation $y = o$, on aura (en effaçant tous les termes où y se rencontre)

$\frac{nn}{mm}xx + \frac{2nr}{m}x - \frac{ep}{m}x = o$. D'où l'on tire $x = \frac{emp}{mn} - \frac{2mr}{n} = AR$; puiſque PM (y) devenant nulle ou zero, il eſt clair que AP (x) devient AR. Donc $AP \times PR = \frac{emp}{nn}x - \frac{2mr}{n}x - xx$; & par conſequent $MP \times PN$ $(yy + \frac{2nx}{m}y + 2ry)$. $AP \times PR$ $(\frac{emp}{nn}x - \frac{2mr}{n}x - xx$ $:: \overline{CB}^2$ (nn). $\overline{EB}^2$ (mm). puiſqu'en multipliant les extrêmes & les moyens, on retrouve l'équation précedente. Or comme les tangentes CB, BE demeurent toûjours les mêmes, en quelque endroit de la Parabole que tombent leurs paralleles MN, AR, il s'enſuit &c.

Il peut arriver differens cas, ſelon les differentes poſitions des droites MN, AR ; mais comme la démonſtration demeure toûjours la même, & qu'il ne peut y avoir de changement que dans quelques lignes, ou dans quelques termes qui s'évanoüiſſent, je ne m'arrêterai point à les expliquer en détail. On doit obſerver la même choſe dans les deux autres Sections.

POUR LES AUTRES SECTIONS.

Ayant mené (*fig.* 89. 90. 91.) les deux demi-diametres CO, CB, paralleles aux droites MN, AR ; je dis que $MP \times PN . AP \times PR :: \overline{CO}^2 . \overline{CB}^2$.

Soit mené le diametre CG qui ait pour double ordonnée MN, ſur lequel ſoient abaiſſées les droites BE, AD, paralleles à MN ; & ayant tiré AF parallele à CG, ſoient nommées les données CB, m ; BE, n ; CE, e ; & le demi-diametre CK, s ; ſon demi-conjugué CO, c ; & les interminées AP, x ; PM, y ; AD, r ; CD, s.

Cela poſé, les triangles ſemblables CBE, APF, donneront $PF = \frac{nx}{m}$, AF ou $DG = \frac{ex}{m}$. Par conſéquent dans l'Hyperbole ou les Hyperboles oppoſées (*fig.* 90. & 91.) on aura $CG = \frac{ex}{m} \pm s$, GM ou $GN = y + \frac{nx}{m} - r$, PN ou $GN + GP = y + \frac{2nx}{m} - 2r$; $MP \times PN$

$= yy + \frac{2nx}{m}y - 2ry$, $\overline{GM}^2 = yy + \frac{2nx}{m}y - 2ry + \frac{nn}{mm}xx - \frac{2nr}{m}x + rr$. Or * $\overline{CD}^2 + \overline{CK}^2 (ss + tt). \overline{CG}^2 + \overline{CK}^2$ * Art. 82. & 118. $(\frac{eexx}{mm} + \frac{2esx}{m} + ss + tt) :: \overline{AD}^2 (rr). \overline{GM}^2 = rr + \frac{eerrxx + 2emrrsx}{mmss + mmtt} = rr + \frac{eeccxx + 2eecmsx}{mmtt}$, en mettant pour $\frac{rr}{ss+tt}$ ſa * valeur $\frac{cc}{tt}$. Et comparant enſemble ces deux valeurs de $\overline{GM}^2$, on formera l'équation $yy + \frac{2nx}{m}y - 2ry + \frac{nntt - ccee}{mmtt}xx - \frac{2nrtt + 2ccesx}{mtt} = o$, dans laquelle mettant à la place de $nntt - ccee$ ſa valeur $cctt$ (il faut imaginer l'Hyperbole conjuguée qui paſſe * par l'extremité B, (lorſque CB eſt la moitié d'un ſecond diametre) tirée de ce que * $\overline{CE}^2 + \overline{CK}^2 (ee + tt). \overline{EB}^2 (nn) :: \overline{CK}^2 (tt). \overline{CO}^2 (cc)$. on aura celle-ci $yy + \frac{2nx}{m}y - 2ry + \frac{cc}{mm}xx - \frac{2nrtt + 2ccesx}{mtt} = o$, qui convient à tous les points de la Section, lorſque les points A, R, tombent de part & d'autre du diametre CG, & que le point d'interſection P tombe entre les points A, R. * Art. 134. * Art. 81. & 108. * Art. 82. & 118.

Maintenant ſi l'on fait dans cette équation $y = o$, on aura (en effaçant tous les termes où y ſe rencontre) $\frac{cc}{mm}xx - \frac{2nrtt + 2ccesx}{mtt} = o$, d'où l'on tire $x = \frac{2mnrtt + 2mccesx}{cctt} = AR$; puiſque PM (y) devenant nulle ou zero, il eſt clair que AP (x) devient AR. Donc $AP \times PR (\frac{2mnrtt + 2mccesx}{cctt} - xx). MP \times PN (yy + \frac{2nx}{m}y - 2ry) :: \overline{CB}^2 (mm). \overline{CO}^2 (cc)$. Car multipliant les extrêmes & les moyens de cette proportion, on retrouve l'équation précédente. Or comme les demi-diametres CO, CB, demeurent toûjours les mêmes en quelque endroit de la Section que tombent leurs paralleles MN, AR; il s'enſuit &c.

Je ne mets point ici en particulier le calcul pour l'Ellipſe,

parce qu'il ne differe de celui de l'Hyperbole qu'en quelques lignes.

COROLLAIRE I.

FIG. 92. 165. S'IL y a deux lignes droites MN, AR, terminées par une Section Conique, leſquelles ſe rencontrent en un point P; & qu'on mene par tout où l'on voudra deux autres droites FG, HD, paralleles aux deux premieres, & terminées auſſi par la Section, leſquelles ſe rencontrent en un point Q: il eſt clair que $MP * PN. AP * PR :: FQ * QG. BQ * QD$. Car les deux droites AR, BD, étant paralleles entr'elles, ſeront paralleles à la même droite CZ donnée de poſition; comme auſſi les deux droites MN, FG, à la même droite CY donnée pareillement de poſition.

COROLLAIRE II.

166. S'IL y a deux paralleles AR, BD, terminées par une Section Conique, leſquelles rencontrent aux points E, Q, une ligne droite FG terminée par la même Section; je dis que $FE * EG. AE * ER :: FQ * QG. EQ * QD$. Car concevant dans le premier Corollaire que MN tombe ſur FG, il eſt clair que les rectangles $MP * PN$, $AP * PR$, deviennent $FE * EG$, $AE * ER$.

COROLLAIRE III. POUR LE CERCLE.

FIG. 93. 167. ON peut tirer de ce Theorême la proprieté du Cercle, qui eſt ſi connuë de tous les Geometres; ſçavoir que ſi par un point quelconque P pris au dedans ou au dehors d'un cercle, on mene autant de lignes qu'on voudra AR, MN, HL, &c. terminées par la circonference, les rectangles $AP * PR$, $MP * PN$, $HP * PL$, &c. ſeront tous égaux entr'eux. Car menant les demi-diametres CB, CO, CD, &c. paralleles à ces lignes, il eſt clair par le Theorême, que tous rectangles ſeront entr'eux, comme les quarrés de ces demi-diametres ou rayons, leſquels par la proprieté eſſentielle du cercle ſont tous égaux entr'eux.

COROLLAIRE IV. POUR LA PARABOLE.

168. S'IL y a une ligne droite MN terminée par une Parabole, & qu'on mene par un des points quelconques A de la Parabole un diametre AF qui rencontre cette ligne au point F : je dis que le rectangle $MF * FN$ eſt égal au rectangle de AF par le parametre CH du diametre CG, qui paſſe par le milieu de MN. FIG. 94.

Car concevant dans le Theorême que AP tombe ſur AF, il eſt clair que la ligne $PF\left(\frac{n}{m}x\right)$ devient nulle ou zero, & qu'ainſi $\frac{n}{m}=o$. C'eſt pourquoi effaçant dans l'équation à la Parabole $yy+\frac{2nx}{m}y+2ry+\frac{nn}{mm}xx+\frac{2nr}{m}x-\frac{ep}{m}x=o$, tous les termes ou $\frac{n}{m}$ ſe rencontre, on en formera celle-ci $yy+2ry-\frac{ep}{m}x=o$. Or $AF=\frac{ex}{m}$, $CH=p$, & $MF * FN=yy+2ry$. Donc &c.

Ce n'eſt que pour faire voir la généralité du Theorême, que j'en déduis cette proprieté ; car on la peut démontrer plus aiſément ſans y avoir recours, en cette ſorte. $\overline{GM}^2=GC * CH$, $\overline{AD}^2$ ou $\overline{GF}^2=DC * CH$, & partant $\overline{GM}^2-\overline{GF}^2$ ou $MF * FN=\overline{GC-DC} * CH=AF * CH$.

COROLLAIRE V. POUR LA PARABOLE.

169. DE-LA il eſt évident,

1°. Que s'il y a deux droites MN, EL, terminées par une Parabole, & paralleles entr'elles ; & qu'on mene par deux points quelconques A, B, de cette Parabole, deux diametres AF, BP, qui rencontrent ces lignes aux points F, P : il eſt évident, dis-je, que $MF * FN.EP * PL :: AF.BP$. Car le diametre CG qui paſſe par le milieu de MN, paſſe auſſi par le milieu

de EL ; & par conſequent le rectangle $EP \times PL = BP \times CH$, de même que $MF \times FN = AF \times CH$.

2°. Que s'il y a une ligne droite MN terminée par une Parabole, & qui rencontre deux de ſes diametres AF, BK, aux points F, K ; on aura $MF \times FN . MK \times KN :: AF . BK$.

3°. Que s'il y a deux lignes droites MN, EL, terminées par une Parabole, & paralleles entr'elles, qui rencontrent un de ſes diametres quelconques BP aux points K, P ; on aura $MK \times KN . EP \times PL :: BK . BP$.

COROLLAIRE VI. POUR LA PARABOLE.

170. DE-LA on voit comment on peut décrire une Parabole qui paſſe par trois points donnés A, M, N, & dont les diametres AF, CG, ſoient paralleles à une ligne droite donnée de poſition ; & démontrer qu'il ne peut y en avoir qu'une ſeule.

Car ayant mené une ligne MN qui joigne deux des points donnés M, N ; on tirera par le troiſiéme A un diametre AF parallele à la ligne donnée de poſition, & qui rencontre la ligne MN au point F, & par le point de milieu G de MN une parallele GC à AF. On fera enſuite $MF \times FN . MG \times GN$. ou $\overline{GM}^2 :: AF . GC$. Et ayant pris CH troiſiéme proportionnelle à CG, GM, on décrira * du parametre CH, & du diametre CG dont l'origine eſt en C, une Parabole dont les ordonnées ſoient paralleles à MN ; elle ſatisfera à la queſtion.

* *Art.* 29. & 30.

Car 1°. Elle paſſera * par les points M, N ; puiſque par la conſtruction $CH \times CG = \overline{GM}^2$ ou $\overline{GN}^2$. 2°. Elle paſſera par le point A ; puiſque $MG \times GN . MF \times FN :: CG . FA$. 3°. Les diametres AF, CG, ſeront paralleles à la droite donnée de poſition.

* *Art.* 7. & 30.

Comme la Parabole qui ſatisfait au Problême, a néceſſairement pour diametre la ligne CG, qui a pour origine le point C, & pour parametre la ligne déterminée CH ; il s'enſuit qu'il ne peut y en avoir qu'une ſeule.

COROLLAIRE VII. POUR LA PARABOLE.

171. S'IL y a deux droites AR, MN, terminées par une Parabole, lesquelles se rencontrent en un point P; & qu'ayant fait $AP \times PR. MP \times PN :: \overline{AP}^2. \overline{PF}^2$. on tire la ligne AF: je dis que cette ligne sera un diametre. Car ayant mené les tangentes CB, EB, paralleles aux droites MN, AR, & par le point touchant C le diametre CG qui rencontre EB prolongée en K; on aura $\overline{EB}^2$ ou $\overline{KB}^2 . \overline{BC}^2 :: AP \times PR. MP \times PN :: \overline{AP}^2. \overline{PF}^2$, & par conſequent $KB. CB :: AP. PF$. Les triangles KBC, APF ſeront donc ſemblables, & leurs côtes AF, KC, paralleles entr'eux : d'où il ſuit que la ligne AF qui ſe trouve ainſi parallele au diametre CG, ſera un diametre; puiſque dans la Parabole * tous les diametres ſont paralleles entr'eux. FIG. 88. * *Def.* 7, L.

COROLLAIRE VIII. POUR LA PARABOLE.

172. ON tire du Corollaire précédent une maniére de décrire une Parabole qui paſſe par quatre points donnés A, M, R, N.

Car ayant joint ces quatre points par deux droites AR, MN, qui s'entrecoupent en un point P, & fait $AP \times PR. MP \times PN :: \overline{AP}^2. \overline{PF}^2$; on tirera la ligne AF, & on décrira * une Parabole qui paſſe par les trois points A, M, N, & dont les diametres ſont paralleles à la ligne AF. Elle ſera celle qu'on demande; car ſelon le Theorême la ligne AP doit rencontrer cette Parabole en un point R, tel que $AP \times PR. MP \times PN :: \overline{EB}^2.$ ou $\overline{KB}^2. \overline{BC}^2 :: \overline{AP}^2. \overline{PF}^2$. * *Art.* 170.

Si l'on eut pris le point F de l'autre côté du point P, on auroit décrit une autre Parabole qui auroit encore paſſé par les quatre points donnés. Mais l'on doit remarquer que lorſqu'un de ces points F tombe ſur l'un des FIG. 95.

points donnés M ou N, il ne peut y avoir qu'une Parabole qui satisfasse ; & que lorsque tous les deux tombent sur les points M, N, il n'y en peut avoir aucune : puisqu'alors le diametre AF de la parabole passeroit par deux de ses points, ce que l'on a démontré * être impossible.

* *Art.* 10.

COROLLAIRE IX.

POUR L'HYPERBOLE OU LES HYPERBOLES OPPOSE'ES.

FIG. 96. 97. 173 S'IL y a une ligne droite MN terminée par une Hyperbole ou par des Hyperboles oppofées, laquelle rencontre une asymptote CB au point Q, & qui soit parallele à une ligne donnée de position ; & qu'on tire par un point quelconque A de la Section une droite AP parallelle à cette asymptote, & qui rencontre au point P la ligne MN : je dis que le rectangle $MP * PN$ sera toûjours au rectangle $2AP * PQ$ en raison donnée, en quelque endroit de la Section que tombent les droites MN, AP.

Car concevant dans le Theorême (*fig.* 90. 91.) que le demi-diametre CB devienne une asymptote, il est clair * qu'alors les trois côtés du triangle CBE deviennent chacun infini. C'est pourquoi menant (*fig.* 96. 97.) par l'extremité K du diametre LK qui passe par le milieu de MN, une parallele KS à MN, qui rencontre l'asymptote CB en S, on formera un triangle CKS dont tous les côtés seront finis, & qui sera semblable au triangle CBE ; & partant on aura $CK(t).KS$ ou $*CO(c) :: CE(e).EB(n)$. Ce qui donne $ce = nt$. Si l'on met à la place de ce sa valeur nt dans l'équation à l'Hyperbole $yy + \frac{2nx}{m}y - 2ry + \frac{2nrt - eeee}{mmtt}xx - \frac{2nrtt + 2eecs}{mtt}x = 0$ que l'on a trouvée dans le Theorême, on en formera celle-ci $yy + \frac{2nx}{m}y - 2ry - \frac{2nrt + 2ncs}{mt}x = o$ ou $yy + \frac{2nx}{m}y - 2ry = \frac{2nrt + 2ncs}{mt}x$. Or en prolongeant AD, s'il est ne-

* *Art.* 102.

* *Art.* 113.

ceſſaire,

ceſſaire, juſqu'à ce qu'elle rencontre l'aſymptote CB en H, les triangles ſemblables CKS, CDH, donneront $CK\ (t).\ KS\ (c) :: CD\ (s).\ DH = \frac{cs}{t}$. Et partant AH ou $PQ = \frac{rt + cs}{t}$. On aura donc $MP \times PN\ (yy + \frac{2nx}{m}y - 2ry).\ 2AP \times PQ\ (\frac{2rt + 2cs}{t}x) :: EB\ (n).\ CB\ (m) :: KS.\ CS$. Puiſqu'en multipliant les extrêmes & les moyens on retrouve l'équation précédente. Or les lignes KS, CS, demeurent toûjours les mêmes en quelque endroit de la Section que tombent les droites MN, AP; parce que le diametre LK qui paſſe par le milieu de MN, paſſe auſſi * par le milieu de toutes les paralleles à MN terminées par la Section, en quelque endroit qu'elles ſe rencontrent. Donc &c. * Art. 144.

On peut démontrer ce Corollaire immédiatement, & ſans avoir recours au Theorême, en cette ſorte. Soient les données $CK = t$, KS ou $CO = c$, $CS = m$, & les indéterminées $CD = s$, AD ou $DI = r$, $AP = x$, $PM = y$. Les triangles ſemblables CSK, APF, donnent $PF = \frac{cx}{m}$, AF ou $DG = \frac{tx}{m}$; Et partant GM ou $GN = y + \frac{cx}{m} - r$, $CG = \frac{rx}{m} + s$. Or à cauſe des triangles ſemblables CKS, CDH, CGQ, on aura $CK\ (t).\ KS\ (c) :: CD\ (s).\ DH = \frac{cs}{t} :: CG\ (\frac{tx}{m} + s).\ GQ = \frac{cx}{m} + \frac{cs}{t}$. Et partant $MQ \times QN$ ou $\overline{GQ}^2 - \overline{GM}^2 = \frac{2ccsx}{mt} + \frac{ccss}{tt} - yy - \frac{2cxy}{m} + 2ry + \frac{2crx}{m} - rr = {}^*AH \times HI$ ou $\overline{DH}^2 - \overline{DI}^2 = \frac{ccss}{tt} - rr$; d'où l'on tire (en effaçant de part & d'autre $\frac{ccss}{tt} - rr$, & tranſpoſant d'une part tous les termes où y ſe rencontre) cette équation $yy + \frac{2cxy}{m} - 2ry = \frac{2ccsx}{mt} + \frac{2crx}{m}$, laquelle étant reduite en proportion, donne $MP \times PN\ (yy + \frac{2cxy}{m} - 2ry).\ 2AP \times PQ$ * Art. 97. FIG. 96.

$(\frac{2csx}{s}+2rx) :: KS\ (c).\ CS\ (m)$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

La démonſtration eſt la même pour les Hyperboles oppoſées à quelques ſignes près.

COROLLAIRE. X.

POUR L'HYPERBOLE OU LES HYPERBOLES OPPOSE'ES.

FIG. 98. 174. IL ſuit du Corollaire précédent.

1°. Que s'il y a deux droites paralleles entr'elles MN, HG, terminées par une Hyperbole ou par des Hyperboles oppoſées, & qui rencontrent une aſymptote CS aux points Q, I; & qu'on mene par deux points quelconques A, B, de la Section deux paralleles AP, BD, à l'aſymptote CS, qui rencontrent ces lignes aux points P, D: les rectangles $MP*PN$, $2AP*PQ$ ſeront entr'eux, comme les rectangles $HD*DG$, $2BD*DI$; & partant on aura $MP*PN.\ HD*DG :: AP*PQ.\ BD*DI$.

2°. Que s'il y a deux droites paralleles entr'elles MN, HG, terminées par une Hyperbole ou par des Hyperboles oppoſées, & qui rencontrent une aſymptote CS aux points Q, I; & qu'on mene par un point quelconque A de la Section, une parallele AO à CS, qui rencontre ces lignes aux points P, O: on aura (en concevant dans le cas précédent que BD tombe ſur AP) cette proportion, $MP*PN.\ HO*OG :: AP*PQ.\ AO*OI :: AP.\ PO$. puiſque $PQ=OI$.

3°. Que s'il y a une ligne droite HG terminée par une Hyperbole ou par des Hyperboles oppoſées; & qui rencontre une aſymptote CS en I; & qu'on mene par deux points quelconques de la Section A, B, deux paralleles AO, BD, à CS, qui rencontrent cette ligne aux points O, D: on aura $HO*OG.\ HD*DG :: AO*OI.\ BD*DI$. Cela eſt encore une ſuite du premier cas, en concevant que la ligne MN tombe ſur HG.

COROLLAIRE XI.

175. Si l'on conçoit qu'une ligne droite BD qui rencontre une Section Conique en deux points B, D, se meuve parallelement à elle-même jusqu'à ce qu'elle rase la Section, c'est à dire, jusqu'à ce qu'elle devienne la tangente LS : il est clair que les deux points d'intersection B, D, se réünissent alors au point touchant L ; & qu'ainsi on peut considerer un point touchant comme deux points d'intersection qui tombent l'un sur l'autre. Or cela posé, on voit naître des Corollaires 1, 2, 5, 10, plusieurs cas dont voici les principaux. FIG. 92.

1°. S'il y a deux tangentes KS, LS, qui se rencontrent en un point S, & deux autres droites MN, AR, paralleles à ces tangentes & terminées par la Section, lesquelles se rencontrent en un point P ; je dis que $MP \times PN . AP \times PR :: \overline{KS}^2 . \overline{LS}^2$. Ceci a été démontré dans le Theorême à l'égard de la Parabole : mais pour les autres Sections, concevant dans le premier Corollaire que FG tombe sur la tangente KS, & BD sur LS ; il est clair que les deux points d'intersection F, G, se réünissent au point touchant K, comme aussi les deux B, D, au point touchant L ; & qu'ainsi les rectangles $FQ \times QG$, $BQ \times QD$, deviennent les quarrés $\overline{KS}^2 . \overline{LS}^2$.

2°. Si dans une Ellipse ou dans des Hyperboles opposées, l'on mene une tangente TX parallele à KS, & qui rencontre SL au point X, on prouvera comme dans le nombre précédent, que $MP \times PN . AP \times PR :: \overline{TX}^2 . \overline{LX}^2$. D'où il suit que $\overline{KS}^2 . \overline{LS}^2 :: \overline{TX}^2 . \overline{LX}^2$. Et $KS . SL :: TX . LX$. C'est à dire, que si deux tangentes paralleles KS, TX, rencontrent une troisiéme tangente LS aux points S, X, on aura $KS . LS :: TX . LX$. ou $KS . TX :: LS . LX$.

3°. Si dans une Ellipse, dans une Hyperbole ou dans des Hyperboles opposées, il y a deux tangentes KS, LS, qui se rencontrent en un point S, & qu'on mene

deux demi-diametres CY, CZ paralleles à ces tangentes ; je dis quels ſeront entr'elles comme ces deux demi-diametres. Car ſelon le Theorême $\overline{CY}^2 . \overline{CZ}^2 :: MP \times PN . AP \times PR :: \overline{KS}^2 . \overline{LS}^2$, ſelon le nombre premier. Et par conſéquent $CY . CZ :: KS . LS$.

4°. S'il y a deux droites AR, FG, terminées par une Section Conique, leſquelles rencontrent deux tangentes KI, LO, qui leur ſoient paralleles, aux points I, O ; je dis que $FO \times OG . \overline{LO}^2 :: \overline{KI}^2 . AI \times IR$. Ce qui eſt évident en concevant dans le premier Corollaire que BD devient la tangente LO ; & MN, la tangente KI.

5°. S'il y a deux paralleles AR, BD, terminées par une Section Conique, leſquelles rencontrent une tangente KH aux points I, H ; je dis que $\overline{KI}^2 . AI \times IR :: \overline{KH}^2 . BH \times HD$, ou $\overline{KI}^2 . \overline{KH}^2 :: AI \times IR . BH \times HD$. Ce qui eſt une ſuite du ſecond Corollaire, en concevant que la ligne FG tombe ſur la tangente KH.

6°. Si l'on ſuppoſe dans le nombre précédent que la Section Conique ſoit une Hyperbole, & que la tangente HK en ſoit une aſymptote ; les rectangles $BH \times HD$, $AI \times IR$ deviendront égaux entr'eux. Car le point touchant K ſera * alors infiniment éloigné des points H, I ; & par conſéquent les droites infinies HK, IK, qui ne different entr'elles que d'une grandeur finie HI, doivent être regardées comme égales. Ceci a déja été démontré dans l'article 97. & on ne le repete ici que pour ſervir de preuve à ce que l'on vient de dire, & pour faire voir qu'on arrive ſouvent aux mêmes verités par des routes bien differentes.

* Art. 108.

7°. S'il y a deux tangentes KS, LS, qui ſe rencontrent en un point S, avec une ligne droite AR terminée par la Section, parallele à l'une d'elles LS, & qui rencontre l'autre KS en un point I ; je dis que $\overline{KI}^2 . AI \times IR :: \overline{KS}^2 . \overline{LS}^2$. Cela eſt viſible en concevant dans le ſecond Corollaire que les lignes FG, BD, tombent ſur les tangentes KS, LS.

8°. S'il y a dans une Ellipſe ou dans les Hyperboles oppoſées deux tangentes paralleles KI, TV, qui rencontrent aux points I, V, une ligne AR terminée par la Section aux points R, A ; je dis que $\overline{KI}^2 . AI \times IR :: \overline{TV}^2 . RV \times VA$. Cela ſuit encore du ſecond Corollaire en imaginant que les paralleles MN, FG, tombent ſur les tangentes TV, KI.

9°. S'il y a dans une Parabole deux paralleles MN, CH, dont l'une ſoit tangente en C, & l'autre ſoit terminée par la Parabole ; & qu'on mene par deux points quelconques A, B, de la Section, deux diametres AF, BO qui rencontrent ces lignes aux points F, O : il eſt clair en concevant dans les deux premiers nombres du Corollaire ſixiéme que EL tombe ſur la tangente CH ; 1°. Que $MF \times FN . \overline{CO}^2 :: AF . BO$. 2°. Que ſi l'on prolonge FA juſqu'à ce quelle rencontre la tangente CH en Q, on aura $MF \times FN . \overline{CQ}^2 :: AF . AQ$. Fig. 94.

10°. S'il y a deux paralleles MN, KT, dont l'une KT touche une Hyperbole en K & rencontre une de ſes aſymptotes en S, & l'autre MN eſt terminée par l'une ou par l'autre des Hyperboles oppoſées, & rencontre la même aſymptote en Q ; & qu'on mene par deux points quelconques A, B, de la Section, deux paralleles AP, BT, à l'aſymptote CS, leſquelles rencontrent ces lignes aux points P, T ; on aura (en concevant dans les trois nombres du Corollaire dixiéme, que la ſécante GH tombe ſur la tangente RT) 1°. Le rectangle $MP \times PN . \overline{KT}^2 :: AP \times PQ . BT \times TS$. 2°. En prolongeant PA juſqu'à ce qu'elle rencontre KT en R, le rectangle $MP \times PN . \overline{KR}^2 :: AP . AR$. 3°. Le quarré $\overline{KT}^2 . \overline{KR}^2 :: BT \times TS . AR \times RS$. Fig. 98.

11°. S'il y a dans les Hyperboles oppoſées deux tangentes paralleles KR, LF ; qui rencontrent une aſymptote CS aux points S, V ; & qu'on mene par deux points quelconques A, B, de la Section, deux paralleles AR, BF à l'aſymptote CS leſquelles rencontrent ces tangentes

aux points R, F : on aura (en concevant dans les deux premiers nombres du Corollaire dixiéme, que les deux Secantes MN, GH, tombent sur les deux tangentes KR, LF) 1°. Le quarré $\overline{KR}^2 . \overline{LF}^2 :: AR \times RS . BF \times FK$. 2°. Le quarré $\overline{KR}^2 . \overline{LE}^2 :: AR . AE$.

PROPOSITION XIV.

Problême.

FIG. 99. 100. & 101. 176. DE'CRIRE *une Ellipſe ou deux Hyperboles oppoſées autour d'un parallelogramme donné* FGHK, *& dont l'un de ſes diametres* AB *parallele aux deux côtez* FK, GH, *ſoit à ſon conjugué* DE, *en la raiſon donnée de* m *à* n.

Ayant mené les lignes AB, DE, qui coupent par le milieu les côtés oppoſés du parallelogramme donné $FGHK$, il eſt clair * qu'elles ſeront ſur deux diametres conjugués de la Section qu'on demande, & qu'ainſi leur point d'interſection en ſera le centre ; puiſque ſelon l'une des conditions du Problême, les paralleles FG, KH, doivent être terminées par la Section, auſſi bien que les deux autres paralleles FK, GH. Or cela poſé, ſi l'on prend AB, DE, pour ces deux diametres conjugués, & qu'on nomme (les points L, O, coupant en deux parties égales les lignes FG, KH,) les données CL ou CO, a ; LF ou OK, b ; & l'inconnuë CA ou CB, t ; on aura

* *Art.* 146.

* *Art.* 41. & 55. 1°. Lorſque * la Section eſt une Ellipſe, $BL \times LA$ $(tt - aa)$. $\overline{LF}^2$ $(bb) :: \overline{AB}^2 . \overline{DE}^2 :: mm . nn$. Et partant $tt = aa + \frac{mmbb}{nn}$. 2°. Lorſque * la Section doit être deux Hyperboles oppoſées, $\overline{CL}^2 + \overline{CA}^2$ $(aa + tt)$. $\overline{LF}^2$ $(bb) :: \overline{AB}^2 . \overline{DE}^2 :: mm . nn$, ce qui donne $tt = aa - \frac{mmbb}{nn}$ ou $tt = \frac{mmbb}{nn} - aa$; ſçavoir $tt = aa - \frac{mmbb}{nn}$ lorſque la ligne AB eſt un premier diametre, & $tt = \frac{mmbb}{nn} - aa$ lorſque c'eſt un ſecond. D'où l'on tire la conſtruction ſui-

* *Art.* 81. & 118.

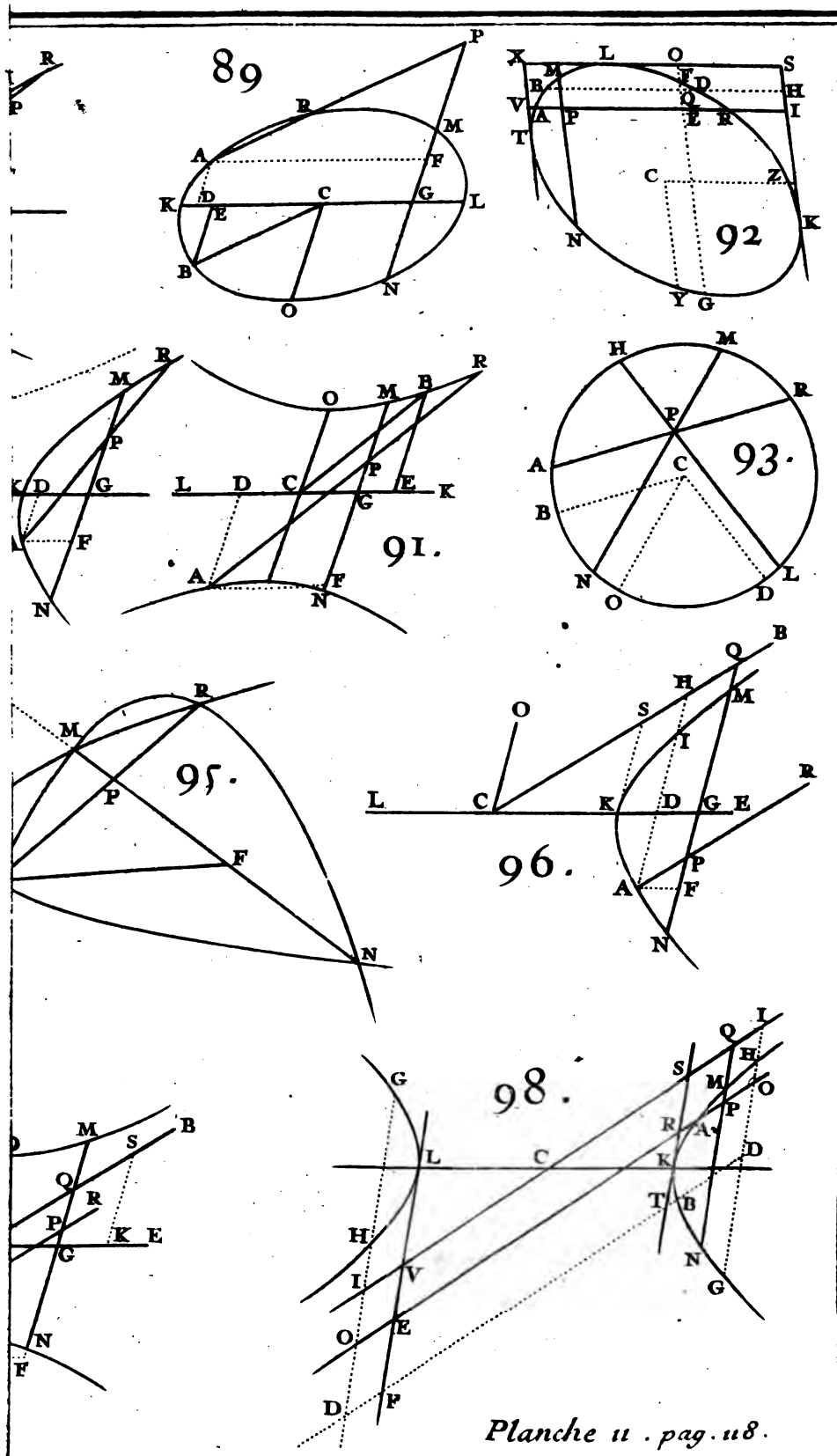


Planche 11 . pag. 118.

vante que je distingue en trois differens cas.

Premier cas. Lorsque la Section est une Ellipse ; soit fait un triangle rectangle VST dont l'un des côtés $ST = CL$, & l'autre $SV = \frac{m}{n} LF$; & soit décrit du demi-diametre $CA = TV$, qui soit à son demi-conjugué CD, comme m est à n, une Ellipse : Je dis qu'elle satisfera au Problême. Car 1°. Le diametre AB parallele aux côtés FK, GH, est à son conjugué DE, en la raison donnée de m à n. 2°. A cause du triangle TSV rectangle en S, le quarré $\overline{TV}^2$ ou $\overline{CA}^2$ $(tt) = \overline{TS}^2$ $(aa) + \overline{SV}^2 \left(\frac{mmbb}{nn}\right)$; & partant $BL \times LA\,(tt - aa) = \frac{mmbb}{nn}$: c'est pourquoi l'on aura $BL \times LA \left(\frac{mmbb}{nn}\right) \cdot \overline{LF}^2\,(bb) :: mm . nn :: \overline{AB}^2 . \overline{DE}^2$. D'où l'on voit que LF est une ordonnée au diametre AB ; & qu'ainsi la Section passe par le point F. On prouvera de même que la Section passera par les points G, H, K ; puisque $GL = LF = OK = OH$, & que $CO = CL$.

Second cas. Lorsque la Section doit être deux Hyperboles opposées, & que CL est plus grande que $\frac{m}{n} LF$: soit formé un triangle TSV rectangle en S, dont l'un des côtés $SV = \frac{m}{n} LF$, & l'hypothenuse $VT = CL$; & soient décrites du premier demi diametre $CA = TS$, qui soit à son demi-conjugué CD, comme m est à n, deux Hyperboles opposées.

Troisiéme cas. Lorsque la Section doit être deux Hyperboles opposées, & que CL est plus petite que $\frac{m}{n} LF$: on formera un triangle TSV rectangle en T dont l'un des côtés $TS = CL$, & l'hypothenuse $SV = \frac{m}{n} LF$. On décrira ensuite du second demi-diametre $CA = TV$, qui soit à son demi-conjugué CD ; comme m est à n, deux Hyperboles opposées.

La démonstration de ces deux derniers cas est sem-

blable à celle du premier, mais il faut remarquer que lorſque $CL = \frac{m}{n} LF$, le Problême eſt impoſſible.

COROLLAIRE I.

177. COMME la poſition des deux diametres conjugués AB, DE, eſt déterminée, auſſi bien que leur grandeur; puiſque ſelon les conditions du Problême ils doivent couper par le milieu les côtés oppoſés du parallelogramme, & qu'on ne trouve pour le demi-diametre CA ou CB qu'une ſeule valeur : il s'enſuit qu'il ne peut y avoir qu'une ſeule Section qui ſatisfaſſe.

COROLLAIRE II.

178. DE-LA on voit comment on peut décrire une Section Conique autour d'un parallelogramme donné $FGHK$, & qui paſſe par un point donné M.

Car ayant mené les deux diametres conjugués AB, DE, qui coupent par le milieu les côtés oppoſés du parallelogramme, & du point donné M l'ordonnée MP au diametre AB, laquelle rencontre les côtés oppoſés FK, GH, aux points R, Q, & la Section (que je ſuppoſe décrite) au point N; il eſt clair que $PN = PM$, & qu'ainſi $RN = QM$, puiſque $PR = PQ$. Le rectangle $RM \times MQ$ ſera donc égal au rectangle $RM \times RN$. Or* $FR \times RK . MR \times RN$ ou $RM \times MQ :: \overline{AB}^2 . \overline{DE}^2$. Et par conſequent la raiſon du diametre AB parallele aux côtés FK, GH, à ſon conjugué DE, eſt donnée; puiſque les rectangles $FR \times RK$, $RM \times MQ$, ſont donnés. De plus la Section ſera une Ellipſe, lorſqu'entre les deux ordonnées MP, KO, au diametre AB, qui tombent du même côté du centre C, celle qui eſt la plus proche du centre eſt plus grande que la plus éloignée; & au contraire deux Hyperboles oppoſées, lorſqu'elle eſt plus petite. D'où l'on voit que cette queſtion ſe reduit au Problême précédent.

* *Art.* 164.

Si le point donné M tomboit sur l'un des côtés du parallelogramme, prolongé à discrétion ; il est clair que ce Problême seroit alors impossible, puisque ce côté rencontreroit la Section en trois differens points ; ce qui ne peut * être. *Art. 149.

COROLLAIRE III.

179. DE-LA on tire encore la maniére de décrire une Section Conique, qui ait pour diametre une ligne AB donnée de position, pour centre le point donné C, & pour deux ordonnées à ce diametre les droites MP, KO.

Car ayant pris sur le diametre AB la partie CL égale à CO, & mené LF parallele & égale à OK ; il est clair qu'elle sera * une ordonnée au diametre AB, & qu'ainsi prolongeant KO en H, & FL en G, en sorte que $OH = OK$, & $LG = LF$, les droites égales & paralleles KH, FG, seront * deux doubles ordonnées au diametre AB. D'où l'on voit que la Section doit être décrite autour du parallelogramme $FGHK$, & passer par le point donné M ; ce qui se fera par le moyen du Corollaire précédent. * *Art.* 45. 55 & 85. & 118. * *Art.* 144.

Comme cette question se réduit à celle du Corollaire précédent, qui se réduit au Problême ; & que selon le Corollaire premier, on ne peut trouver qu'une seule Section qui y satisfasse : il s'ensuit de même qu'on ne peut décrire qu'une seule Section qui rempliſſe les conditions de ce dernier Corollaire.

PROPOSITION XV.

Problême.

180. DE'CRIRE *une Section Conique qui passe par cinq points donnés* F, M, K, G, N ; *& démontrer qu'il n'y en peut avoir qu'une seule.* FIG. 102. & 103.

Ayant joint quatre des points donnés par deux lignes droites FG, MN, qui se rencontrent au point R, on menera par le cinquieme point donné K deux droites KD, KH, paralleles aux droites FG, MN, & qui les rencontrent aux points E, Q. On prendra sur ces deux lignes prolongées, s'il est necessaire, les points D, H, tels que $MR * RN. GR * RF :: ME * EN. KE * ED$. Et $FR * RG. MR * RN :: FQ * QG. HQ * QK$. en observant que les points K, D, ou K, H, doivent tomber de part & d'autre du point de rencontre E, ou Q, lorsque les points M, N, ou F, G, tombent aussi de part & d'autre de ce même point ; & au contraire. On menera ensuite par les points de milieu des paralleles DK, FG, & MN, KH, les droites LI, AB, qui s'entrecoupent au point C. On décrira enfin * la Section Conique qui a pour diametre la ligne AB donnée de position, pour centre le point donné C, & pour ordonnées les deux droites MP, KO. Je dis qu'elle satisfera au Problême, & qu'il ne peut y avoir que celle-là.

* *Art.* 179.

Car les deux points D, H, seront * à la Section qui passe par les cinq points donnés F, M, K, G, N ; & ainsi les lignes LI, AB, en seront * deux diametres, qui en détermineront par conséquent le centre par leur point d'intersection C. Il est donc évident que la Section Conique qui passe par les cinq points donnés, doit avoir nécessairement pour diametre la ligne AB donnée de position, pour centre le point C, & pour ordonnées au diametre AB les droites MP, KO. Or comme il n'y a qu'une seule Section Conique qui puisse remplir ces conditions, il s'ensuit que ce sera celle qu'on demande, & qu'il ne peut y avoir que celle-là.

* *Art.* 166.

* *Art.* 146. & 147.

S'il arrive que les diametres AB, LI, soient paralleles entr'eux ; la Section sera alors * une Parabole qu'on décrira par l'article 170.

* *Art.* 147.

LIVRE CINQUIE'ME.

De la comparaiſon des Sections Coniques entr'elles, & de leurs Segmens.

LEMME I.

181. SI *la difference de deux quantités diminuë continuellement, en ſorte qu'elle devienne enfin moindre qu'aucune grandeur donnée ; je dis que dans cet état, ces deux quantités ſeront égales.*

Car ſi elles ne l'étoient pas, on pourroit aſſigner entr'elles quelque difference ; ce qui eſt contre l'hypotheſe.

LEMME II.

182. SI *la raiſon de deux quantités eſt telle que l'antecedent demeurant toûjours le même, ſa difference avec ſon conſequent diminuë continuellement, en ſorte qu'elle devienne enfin moindre qu'aucune grandeur donnée ; je dis que dans cet état, ces deux quantités ſeront égales.*

Car par le Lemme * précédent, l'antecedent ſera égal à ſon conſequent ; & ainſi les quantités dont ils expriment le rapport, ſeront égales. * *Art.* 181.

LEMME III.

183. SI *l'on ſuppoſe ſur une ligne courbe quelconque* ABG FIG. 104. *un arc* MN *infiniment petit, c'eſt à dire, moindre qu'aucune grandeur donnée ; & qu'on imagine par les extremités de cet arc les ordonnées* MP, NQ, *à l'axe ou diametre* AC, *avec les paralleles* MR, NS, *à ce diametre : je dis que les parallelogrammes* PQRM, PQNS, *peuvent être pris chacun pour l'eſpace* PQNM *renfermé entre les ordonnées* PM, QN, *la petite droite* PQ, *& le petit arc de la courbe* MN.

Tous les points d'une ligne courbe ou s'éloignent

continuellement de plus en plus de ſon diametre, ou bien s'en approchent continuellement de plus en plus; ou enfin cette ligne courbe eſt compoſée de pluſieurs portions, dont les unes s'éloignent de plus en plus, & les autres s'approchent de plus en plus de ſon diametre. Car il eſt evident qu'il ne peut y avoir aucune portion dans une ligne courbe, dont tous les points ſoient également éloignés de ſon diametre; puiſqu'alors cette portion ne ſeroit plus courbe, mais une ligne droite parallele à ce diametre.

Suppoſons 1°. Que l'arc MN ſoit ſur une courbe AMB dont tous les points s'éloignent de plus en plus de ſon diametre AC. Si l'on prend du coté du point N l'arc MO d'une grandeur finie, & qu'ayant nommée l'ordonnée OF parallele à MP, on tire les droites OD, ME, paralleles au diametre AC; il eſt clair que l'eſpace Curviligne $PFOM$ ſera plus grand que le parallelogramme inſcrit $PFEM$, & moindre que le parallelogramme circonſcrit $PFOD$. Or ſi l'on imagine que le point O ſe meuve ſuivant la courbe vers le point M, il eſt viſible que le parallelogramme $MEOD$ qui eſt la difference des parallelogrammes inſcrits & circonſcrits à l'arc OM, diminuëra continuellement juſqu'à ce qu'enfin il devienne nul ou zero dans l'inſtant que le point O parvient en M. D'où il ſuit que lorſque le point O eſt arrivé en N, c'eſt à dire, infiniment près de M, le parallelogramme $MEOD$, qui devient $MRNS$, ſera moindre qu'aucune grandeur donnée. Il eſt donc évi-
* *Art.* 181, dent ſelon le Lemme * premier, que les parallelogrammes $PQRM$, $PQNS$, deviennent alors égaux entr'eux; & par conſéquent auſſi égaux chacun à l'eſpace curviligne $PQMN$. Donc &c.

Suppoſons 2°. Que le petit arc MN ſoit ſur une courbe BMG dont tous les points approchent de plus en plus de ceux de ſon diametre CG. Il eſt viſible que la démonſtration demeure la même que pour le premier cas, en obſervant ſimplement que le parallelogramme

circonſcrit $PQNS$ devient inſcrit en ce cas-ci.

Suppoſons 3°. Qu'une ligne courbe telle que ABG, ſoit compoſée de pluſieurs portions dont les unes, comme AB, s'éloignent de plus en plus du diametre AG; & les autres au contraire, comme BG, s'en approchent de plus en plus. Je dis que les points, comme B, qui ſéparent ces portions, ne peuvent tomber ſur les arcs MN; car ſi cela étoit le point B ſeroit plus près du point M que n'eſt le point N; ce qui eſt contre la ſuppoſition. Il eſt donc évident que ce dernier cas eſt neceſſairement renfermé dans l'un ou dans l'autre des deux premiers.

COROLLAIRE I.

184. DE LA il ſuit que ſi l'on mene par tout où l'on voudra une ordonnée CB parallele à PM, & qu'on imagine que la portion de courbe AB ſoit diviſée en une multitude infinie d'arcs infiniment petits, tels que MN; l'eſpace ACB renfermé par les droites AC, CB, & par la portion de courbe AB, ſera égal à la ſomme de tous les parallelogrammes tels que $PQRM$ ou $PQNS$. Il s'enſuit de même que l'eſpace $MPCB$ renfermé par les droites MP, PC, CB, & par la portion de courbe MB, ſera égal à la ſomme de tout ce qu'il y aura de ces parallelogrammes dans cet eſpace; & de même dans toute l'étenduë de la courbe ABG.

COROLLAIRE II.

185. S'IL y a une figure quelconque $CMDOC$ renfermée entre deux paralleles CE, DF, & qu'on imagine par tout où l'on voudra entre ces paralleles deux droites MO, NL, infiniment proches l'une de l'autre, & qui leur ſoient auſſi paralleles; je dis que l'eſpace $OMNL$ qu'elles couperont dans la figure $CMDOC$, ſera egal au rectangle d'une d'elles, comme de MO, par leur diſtance MR ou OS. Car menant la perpendicu- FIG. 105.

laire AB sur les paralleles CE, DF, laquelle rencontre les paralleles MO, NL, aux points P, Q; il est clair par le Lemme * que l'espace $PMNQ$ est égal au rectangle $PMRQ$, & l'espace $POLQ$ au rectangle $POSQ$, & par conséquent que l'espace $OMNL$ est égal au rectangle $OMRS$ ou $OM*PQ$.

* *Art.* 183.

COROLLAIRE III.

186. IL suit du Corollaire précédent, que s'il y a deux figures quelconques $CMDOC$, $EGFHE$ renfermées entre deux paralleles CE, DF, & qui soient telles qu'ayant mené entre ces paralleles par tout où l'on voudra une ligne MH parallele aux droites CE, DF; les parties MO, GH, de cette ligne compriſes dans les figures $CMDOC$, $EGFHE$, soient toûjours entr'elles en raiſon donnée : il suit, dis-je, que ces deux figures (j'entends les espaces qu'elles comprennent) sont auſſi entr'elles en raiſon donnée. Car imaginant une autre parallele NK infiniment proche de MH, & tirant une perpendiculaire AB sur les paralleles CE, DF, laquelle rencontre les paralleles MH, NK, aux points P, Q; il est clair par le Corollaire * précédent que l'espace $OMNL$ est égal au rectangle $OM*PQ$, & de même que l'espace $GHKI$ est égal au rectangle $GH*PQ$. Ces deux espaces seront donc entr'eux comme MO est à GH; & comme cela arrive toûjours en quelque endroit qu'on mene la droite MH, il s'ensuit que la somme de tous les petits espaces $MNLO$, c'est à dire, l'espace $CMDOC$ sera à la somme de tous les petits espaces $GHKI$, c'est à dire, à l'espace $EGFHE$, en la raiſon donnée.

* *Art.* 185.

On prouvera de même que la partie MDO de la figure $CMDOC$, est encore à la partie correspondante GFH de l'autre figure $EGFHE$, en la raiſon donnée : comme auſſi les parties restantes CMO, EGH.

Il est visible que si la raiſon donnée est celle d'égalité,

c'eſt à dire, que ſi les parties MO, GH, de la droite MH, ſont toûjours égales entr'elles ; les eſpaces $CMDOC$, $EGFHE$, & leurs parties correſpondantes MDO, GFH, & CMO, EGH, ſeront égales entr'elles.

LEMME IV.

187. SI *l'on ſuppoſe ſur une ligne courbe quelconque un arc infiniment petit* MN ; *& qu'on imagine les tangentes* MT, NT, *qui ſe rencontrent au point* T, *la ſoûtendante* MN, *& la droite* NS *perpendiculaire ſur* MT *prolongée : je dis qu'on peut prendre pour l'arc* MN *ſa ſoûtendante* MN, *ou la ſomme des deux tangentes* MT, NT, *ou enfin la droite* MS. FIG. 106.

Toute ligne courbe eſt néceſſairement ou toûjours concave vers un certain endroit, ou compoſée de pluſieurs portions dont les unes étant concaves vers une certaine part, les autres le ſont vers le côté oppoſé. Or les points qui ſeparent ces portions * ne peuvent point ſe trouver ſur les arcs infiniment petits MN : puiſqu'ils ſeroient plus près du point M que n'eſt le point N ; ce qui eſt contre la ſuppoſition. On peut donc toûjours ſuppoſer que l'arc MN fait partie d'une courbe ou portion de courbe qui eſt toûjours concave vers un certain côté. * *Art.* 183. *n.* 3.

Maintenant ſi l'on prend ſur la courbe du côté du point N, l'arc MO d'une grandeur finie, & qu'on tire la ſoûtendante OM, la tangente OG, & la parallele OD à NS : il eſt clair 1°. A cauſe du triangle MDO rectangle en D, que la tangente MD eſt moindre que la ſoûtendante MO, & à plus forte raiſon moindre que l'arc MNO ; de ſorte que l'arc MNO & ſa ſoûtendante MO ſont plus grands chacun que MD, & chacun moindre que la ſomme des deux tangentes MG, OG. 2°. A cauſe de la concavité de l'arc MNO vers le même côté, ſi l'on mene par un point quelconque N de l'arc MO une tangente TR, les points T, R, où elle rencontre les tangentes MG, OG, ſeront ſituez entre les points M, G, & O, G ; ainſi

l'angle OGD, qui eſt externe au triangle TGR, eſt plus grand que l'angle RTG ou NTS.

Ceci ſuppoſé, ſi l'on mene les droites ME, MF, paralleles aux tangentes OG, NT, & qui rencontrent la droite DQ aux points E, F; & qu'on imagine que le point O ſe meuve ſuivant la courbe vers le point M: il eſt viſible que l'angle OGD, ou ſon égal EMD, diminuëra continuellement juſqu'à ce qu'il s'évanoüiſſe dans l'inſtant que le point O parvient en M; puiſqu'alors la tangente OG ſe confond avec la tangente MD: d'où il ſuit que la ligne ME diminuë continuellement, juſqu'à ce qu'enfin elle devienne égale à MD dans cet inſtant. Donc lorſque le point O eſt arrivé en N, c'eſt à dire, infiniment près du point M, la ligne ME, alors en MF, ne ſera pour lors differente de la tangente MD, que d'une grandeur moindre qu'aucune donnée; & par conſéquent * les lignes TN, TS, dont elles expriment le rapport, ſeront égales entr'elles. Les deux tangentes MT, TN, priſes enſemble, ſeront donc égales à la droite MS, comme auſſi à l'arc MN, & à la ſoûtendante MN. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* *Art.* 182.

COROLLAIRE I.

188. PUISQUE l'angle FMD, ou ſon égal NTS, eſt infiniment petit dans la ſuppoſition que le point N ſoit infiniment près du point M, il s'enſuit que dans le triangle MTN, l'angle interne NMT, qui eſt moindre que l'exterieur NTS, ſera auſſi infiniment petit, c'eſt à dire, moindre qu'aucun angle donné; & qu'ainſi on ne pourra mener par le point M aucune ligne droite qui tombe dans l'angle TMN. D'où l'on voit que ces deux lignes MT, NM, ſe confondent entr'elles, & qu'ainſi on peut regarder une tangente comme une ligne droite qui paſſe par deux points d'une ligne courbe infiniment proches l'un de l'autre.

COROL.

COROLLAIRE II.

189. SI l'on imagine qu'une ligne courbe quelconque ſoit diviſée en une mulitude infinie d'arcs infiniment petits tels que $M N$; il eſt clair qu'en prenant au lieu de ces arcs leurs ſoûtendantes, on verra naître un Polygone d'une infinité de côtés, chacun infiniment petit, que l'on pourra prendre pour la ligne courbe : puiſqu'elle * n'en differera en aucune maniere. De plus les petits côtés de ce Polygone étant prolongés de part & d'autre, ſeront les tangentes de cette courbe ; puiſqu'ils paſſent chacun par deux de ſes points infiniment proches l'un de l'autre.

* *Art.* 187.

REMARQUE.

190. ON doit faire ici attention que l'idée ou notion qu'on a donnée des tangentes des Sections Coniques, ne convient qu'aux lignes courbes qui ſont toûjours concaves dans toute leur étenduë vers le même côté, comme ſont * ces Sections : au lieu que cette derniere notion eſt generale pour toutes ſortes de lignes courbes. Auſſi eſt-ce elle qui ſert de fondement à la méthode des tangentes que j'ai expliquées, dans mon Livre des *Infiniment petits*, & que j'oſe aſſûrer être la plus ſimple & la plus generale qu'on puiſſe ſouhaiter. On en verra un foible échantillon à la fin de ce Livre.

* *Art.* 266. 61. 124.

DEFINITIONS.

I.

Deux ſegmens de lignes courbes quelconques BAD, bad, ſont appellés *Semblables* ; lorſqu'ayant inſcrit dans l'un d'eux une figure rectiligne quelconque $BMNOD$, on peut toûjours inſcrire dans l'autre une figure rectiligne ſemblable $bmnod$.

FIG. 107. 108. 109.

2.

Deux Sections Coniques ſont appellées *Semblables* ; lorſqu'ayant pris dans l'une d'elles un ſegment quelcon-

que BAD, on peut toûjours aſſigner dans l'autre un ſegment ſemblable bad.

3.

On appelle diametres *Semblables* AP, ap, dans differentes Sections Coniques, ceux qui ſont avec leurs ordonnees PM, pm, les mêmes angles APM, apm.

COROLLAIRE.

191. PLUS chacun des côtés BM, MN, &c. bm, mn, &c. devient petit ; plus leur nombre augmente, & plus auſſi les figures rectilignes ſemblables $BMNOD$, $bmnod$, approchent des ſegmens BAD, bad, auſquels elles ſont inſcrites ; de ſorte qu'elles leur deviennent enfin égales * lorſque chacun des côtés eſt infiniment petit, & que leur nombre par conſéquent eſt infini. D'où il ſuit que les ſegmens ſemblables BAD, bad, ſont entr'eux comme les quarrés de leurs ſoûtendantes BD, bd, qui ſont des côtés homologues ; & les portions des courbes BAD, bad, comme ces ſoûtendantes.

* *Art.* 189.

PROPOSITION I.

Theorême.

FIG. 107. 192. SOIENT *deux Paraboles* AM, am, *qui ayent deux diametres ſemblables* AL, aL, *ſitués ſur la même droite, en ſorte que leurs ordonnées* PM, pm, *ſoient paralleles entr'elles ; & ſoit marqué ſur cette droite au dedans des Paraboles un point fixe* L, *tel que* LA *ſoit à* La, *comme le parametre* AG *du diametre* AL *de la Parabole* AM, *eſt au parametre* ag *du diametre* aL *de la Parabole* am. *Je dis que ſi l'on mene du point fixe* L *à un point quelconque* M *de la Parabole* AM, *une ligne droite* LM ; *elle rencontrera l'autre Parabole* am *en un point* m *tel que* LM. Lm :: LA. La.

Ayant mené l'ordonnée MP, & nomme les données LA, a ; La, b ; AG, p ; & les indéterminées AP, x ;

PM, y; on aura $LA\ (a).\ La, (b) :: AG\ (p).\ ag = \frac{bp}{a}$. Or si l'on prend sur le diametre aL de la Parabole am, la partie $ap = \frac{bx}{a}$, & qu'on mene l'ordonnée pm; il est clair * que $\overline{pm}^2 = pa * ag\ (\frac{bbpx}{aa}) = \frac{bbyy}{aa}$ en mettant pour px * sa valeur yy; & qu'ainsi $pm = \frac{by}{a}$. Donc $PM\ (y).\ pm\ (\frac{by}{a}) :: LP\ (a - x).\ Lp\ (b - \frac{bx}{a})$. Et par conséquent la ligne LM passera par le point m extremité de l'ordonnée pm, c'est à dire, qu'elle coupera la Parabole am en ce point. Donc à cause des triangles semblables LPM, Lpm, on aura $LM.\ Lm :: PM\ (y).\ pm\ (\frac{by}{a}) :: LA\ (a).\ La\ (b)$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* *Art. 6. & 20.*
* *Ibid.*

COROLLAIRE I.

193. Si l'on prend dans la Parabole AM un segment quelconque BAD; & qu'ayant mené les droites LB, LD qui rencontrent l'autre Parabole am aux points b, d, on tire la soûtendante bd: je dis que le segment bad de la Parabole am, est semblable au segment BAD de la Parabole AM. Car ayant inscrit dans le segment BAD une figure rectiligne quelconque $BMNOD$, il est clair que si l'on mene les droites LM, LN, LO, qui rencontrent l'autre Parabole aux points m, n, o; les triangles LBM, Lbm; LMN, Lmn; LNO, Lno; LOD, Lod; LBD, Lbd, seront semblables; & qu'ainsi les côtés BM, bm; MN, mn; NO, no; OD, od; BD, bd; seront paralleles, & toûjours en même raison chacun à son correspondant; puisque toutes les droites LB, LM, LN, LO, LD, sont coupées en même raison aux points b, m, n, o, d. D'où l'on voit que les figures rectilignes $BMNOD$, $bmnod$, sont semblables. Or comme il est évident que cette démonstration subsiste toûjours, telle que puisse être la figure rectiligne inscrite dans le segment BAD;

il s'enſuit que les ſegmens BAD, bad, * ſont ſemblables ; & par conſéquent * que les Paraboles AM, am, le ſont auſſi.

* *Def.* 1.
* *Def.* 2.

COROLLAIRE II.

194. DE-LA il eſt évident que ſi l'on mene par le point L une double ordonnée EF dans la Parabole AM, laquelle rencontre l'autre Parabole am aux points e, f; les ſegmens EAF, eaf; des deux Paraboles AM, am, ſeront ſemblables entr'eux.

COROLLAIRE III.

195. TOUTES les Paraboles ſont ſemblables entr'elles ; car ſi l'on prend ſur deux diametres ſemblables de deux differentes Paraboles, les parties AL, aL, qui ſoient entr'elles comme les parametres AG, ag ; & ſi l'on conçoit que le diametre La ſoit ſitué ſur le diametre LA : en ſorte que les points L, L, tombent l'un ſur l'autre, & que leurs ordonnées PM, pm, ſoient paralleles entr'elles : il eſt clair qu'ayant mené du point fixe L à un point quelconque M de la Parabole AM, une ligne droite LM ; elle rencontrera toûjours l'autre Parabole am en un point m tel que $LM. Lm :: LA. La$. Donc * &c.

* *Art.* 193.

COROLLAIRE IV.

196. DE-LA il ſuit que ſi l'on prend ſur deux diametres ſemblables de deux differentes Paraboles, les parties AL, aL, qui ſoient entr'elles comme les parametres de ces diametres, & qu'on tire par les points L, L, les doubles ordonnées EF, ef : les ſegmens EAF, eaf, des deux Paraboles AM, am, ſeront ſemblables entr'eux.

COROLLAIRE V.

197. SI deux ſegmens BAD, bad, ſont ſemblables entr'eux, & que l'un d'eux BAD, ſoit le ſegment d'une

Parabole ; je dis que l'autre *bad* ſera le ſegment d'une autre Parabole, & qu'ainſi il n'y a entre toutes les courbes imaginables que des Paraboles qui puiſſent être ſemblables à une Parabole donnée. Car ſi l'on place le petit ſegment *bad* au dedans du grand *BAD*, en ſorte que les ſoûtendantes *bd*, *BD*, ſoient paralleles ; & qu'on inſcrive dans l'un & l'autre deux figures rectilignes quelconques ſemblables *BMNOD*, *bmnod*: il eſt clair que les côtés homologues *BM*, *bm*; *MN*, *mn*; &c. de ces deux figures ſeront paralleles : puiſque les angles *DBM*, *dbm*; *BMN*, *bmn*; &c. ſont égaux entr'eux. Or menant *LM*, *LN*, *LO*, par le point de concours *L* des deux droites *Bb*, *Dd*, qui joignent les extremités des ſoûtendantes paralleles *BD*, *bd*, qui ſont les deux côtés homologues donnés ; ces droites *LM*, *LN*, *LO*, paſſeront par les points correſpondans *m*, *n*, *o*, où elles ſeront diviſées en même raiſon que *LB* l'eſt en *b*, ou *LD* en *d* ; puiſque *BD.bd* :: *LB.Lb* :: *BM.bm* :: *LM.Lm* :: *MN.Mn* :: *LN.Ln* :: *NO.no* :: *LO.Lo* :: *OD.od*.

Maintenant ſi l'on mene par le point *L* le diametre *LA* de la Parabole *AM* ; qu'on le diviſe en *a*, en la même raiſon que *LB* l'eſt en *b*, ou *LD* en *d* ; & qu'on décrive * du diametre *aL*, & du parametre *ag* qui ſoit au parametre *AG* du diametre *AL* de la Parabole *AM*, comme *La* eſt à *LA*, une Parabole *am* dont les ordonnées *pm* ſoient paralleles aux ordonnées *PM* de l'autre Parabole : il eſt évident * qu'elle paſſera par tous les points *b*, *m*, *n*, *o*, *d*, qui diviſent dans la raiſon donnée de *BD* à *bd* toutes les droites *LB*, *LM*, *LN*, *LO*, *LD*. Or comme ce raiſonnement ſubſiſte toûjours tel que puiſſe être le nombre des côtés des figures rectilignes ſemblables *BMNOD*, *bmnod*, & de telle grandeur qu'ils puiſſent être ; il s'enſuit que la Parabole *am* paſſe par tout par où le ſegment *bad* paſſe, & qu'ainſi ce ſegment en eſt une portion. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* *Art.* 161.

* *Art.* 192.

PROPOSITION II.

Theorême.

FIG. 108. 109. 198. SOIT *une Ellipſe ou Hyperbole* A M *qui ait pour un de ſes premiers diametres la ligne* A H, *& pour parametre de ce diametre la ligne* A G; *& ayant pris ſur ce diametre (prolongé dans l'Hyperbole) un point fixe* L, *& diviſé en même raiſon aux points* a, h, *ſes parties* L A, L H. *Soit une autre Ellipſe ou Hyperbole* a m *qui ait pour premier diametre la ligne* a h, *pour parametre de ce diametre la ligne* a g. *qui ſoit à* A G *comme* a h *eſt* A H, *& dont les ordonnées* p m *ſoient paralleles aux ordonnées* P M. *de l'autre Section* A M. *Je dis que ſi l'on mene du point fixe* L *à un point quelconque* M *de la Section* A M, *une ligne droite quelconque* L M; *elle rencontrera l'autre Section* a m, *en un point* m *tel que* L M. L m :: L A. L a : *c'eſt à dire que toutes les droites tirées du point fixe* L *aux points de la Section* A M, *ſont diviſées en même raiſon par la Section* a m.

Il faut prouver que L M. L m :: L A. L a.

Ayant mené l'ordonnée MP, & nommé les données LA, a; La, b; $AH, 2t$; & les indéterminées AP, x; PM, y; on aura $LA\ (a).\ La\ (b) ::\ LH.\ Lh ::\ LH \pm LA$ ou $AH\ (2t).\ Lh \pm La$ ou $ah = \frac{2bt}{a}$. Or ſi l'on prend ſur le diametre ah de la Section am la partie $ap = \frac{bx}{a}$, & qu'on mene l'ordonnée pm; il eſt clair * que $AP * PH\ \left(2tx \pm xx\right).\ \overline{PM}^2\ (yy) ::\ AH.\ AG ::\ ah.\ ag ::\ ap * ph\ \left(\frac{2bbtx \pm bbxx}{aa}\right).\ \overline{pm}^2 = \frac{bbyy}{aa}$, & qu'ainſi $pm = \frac{by}{a}$. Donc $PM\ (y).\ pm\ \left(\frac{by}{a}\right) ::\ LP\ \left(a - x\right).\ Lp\ \left(b - \frac{bx}{a}\right)$. Et par conſéquent la ligne LM paſſera par le point m extremité de l'ordonnée pm, c'eſt à dire qu'elle coupera la Section am en ce point. Donc à cauſe des triangles ſemblables LPM, Lpm, on aura

* *Art.* 42. 55. 81. & 118.

$LM.Lm :: PM\ (y).\ pm\left(\frac{by}{a}\right) :: LA\ (a).\ La\ (b)$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

199. SI l'on prend dans la Section AM un ſegment quelconque BAD, & qu'ayant mené les droites LB, LD, qui rencontrent l'autre Section am aux points b, d, on tire la ſoûtendante bd: je dis que le ſegment bad de la Section am eſt ſemblable au ſegment BAD de la Section AM; & partant que ſi l'on mene par le point L une double ordonnée EF dans la Section AM, laquelle rencontre l'autre Section aux points e, f; les ſegmens EAF, eaf, des deux Ellipſes ou des deux Hyperboles AM, am, ſeront ſemblables entr'eux. Cela ſe prouve de même que pour la Parabole dans les articles 193. & 194.

COROLLAIRE II.

200. TOUTES les Ellipſes ou Hyperboles AM, am, qui ont deux diametres ſemblables AH, ah, en même raiſon avec leurs parametres AG, ag, ſont ſemblables entr'elles. Car ſi l'on prend les parties AL, aL, qui ſoient entr'elles comme les diametres AH, ah, & que l'on conçoive que le diametre ah ſoit ſitué ſur le diametre AH, en ſorte que les points L, L, tombent l'un ſur l'autre, & que les ordonnées pm, PM, ſoient paralleles entr'elles : il eſt clair qu'ayant mené du point fixe L à un point quelconque M de la Section AM une ligne droite LM, elle rencontrera toûjours l'autre Section am, en un point m tel que $LM.Lm :: LA.La$. Donc * &c.

* *Art.* 199.

COROLLAIRE III.

201. DE-LA il eſt évident que s'il y a deux Ellipſes ou deux Hyperboles AM, am, dont deux diametres ſemblables AH, ah, ſoient en même raiſon avec leurs parametres AG, ag; & qu'ayant pris les parties AL, aL,

qui ſoient entr'elles comme les diametres AH, ah, on tire par les points L, l, les doubles ordonnées EF, ef: il eſt évident, dis je, que les ſegmens EAF, eaf, des deux Sections AM, am, ſont ſemblables entr'eux.

COROLLAIRE IV.

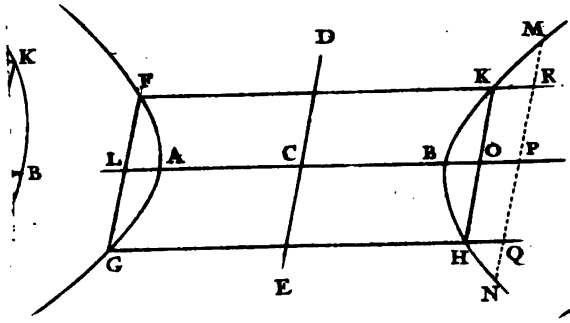
202. SI deux ſegmens BAD, bad, ſont ſemblables entr'eux; & que l'un d'eux ſoit le ſegment d'une Ellipſe ou d'une Hyperbole AM, qui ait pour un de ſes diametres quelconques la ligne AH dont le parametre eſt AG; Je dis que l'autre bad ſera le ſegment d'une autre Ellipſe ou d'une autre Hyperbole am, qui aura pour l'un de ſes diametres ſemblables à AH, la ligne ah qui ſera en même raiſon avec ſon parametre ag, que AH avec le ſien AG. Car ayant placé le ſegment bad, au dedans du ſegment BAD, en ſorte que la ſoûtendante bd ſoit parallele à la ſoûtendante BD, & que les lignes Bb, Dd, concourent en un point L du diametre AH (ce qui eſt toûjours poſſible), & inſcrit dans l'un & l'autre deux figures rectilignes quelconques ſemblables; on prouvera comme dans la Parabole article 197. que les droites LM, LN, LO, paſſeront par les points correſpondans m, n, o, où elles ſeront diviſées en même raiſon que LB l'eſt en b, ou LD en d.

Maintenant ſi l'on diviſe les parties LA, LH, du diametre AH aux points a, h, en même raiſon que LB l'eſt en b; & qu'on décrive * du diametre ah & du parametre ag qui ſoit au parametre AG du diametre AH, comme La eſt à LA, ou ah à AH, une Ellipſe ou une Hyperbole am, dans les ordonnées pm ſoient paralleles aux ordonnées PM de l'autre Ellipſe ou Hyperbole AM: il eſt évident * qu'elle paſſera par tous les points b, m, n, o, d, qui diviſent dans la raiſon donnée de bd à BD toutes les droites LB, LM, LN, LO, LD. Or comme ce raiſonnement ſubſiſte toûjours tel que puiſſe être le nombre des côtés des figures rectilignes ſemblables,

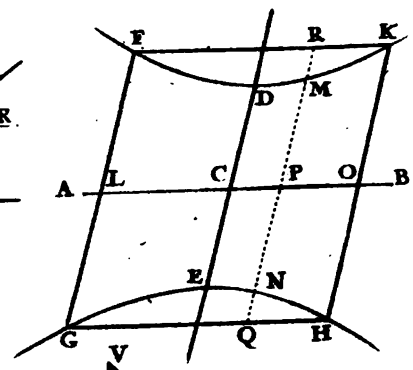
* Art. 161.

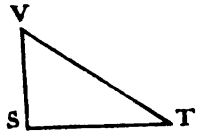
* Art. 198.

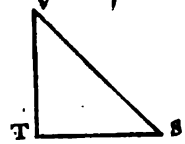
100.

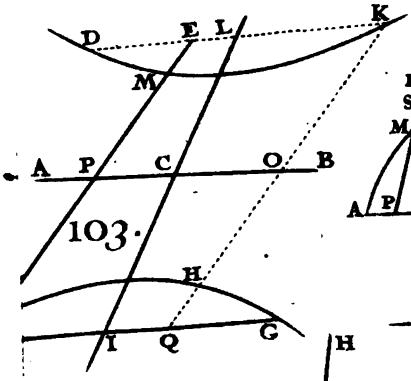


101.

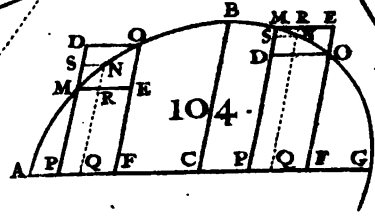




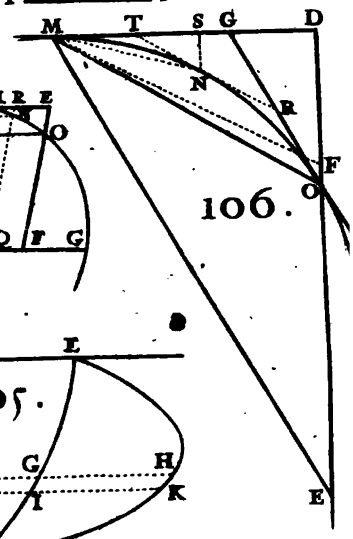




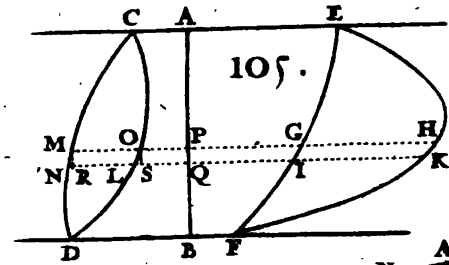
103.



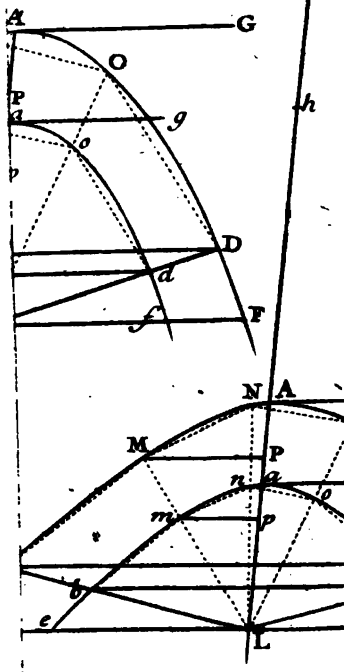
104.



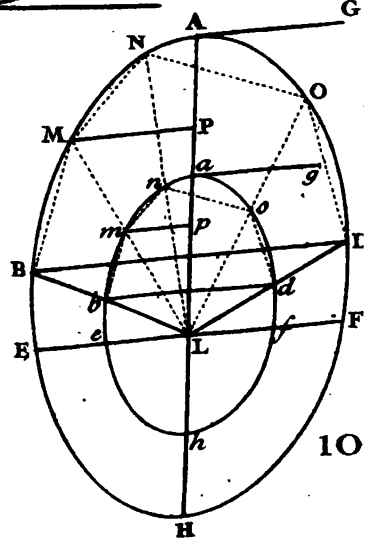
106.



105.



109.



10

ſemblables *BMNOD*, *bmnod*, & de telle grandeur qu'ils puiſſent être ; il s'enſuit que l'Ellipſe ou l'Hyperbole *am* paſſe par tous les mêmes points par leſquels paſſe le ſegment *bd*, & qu'ainſi ce ſegment en eſt une portion. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE. V.

203. IL eſt donc évident que ſi deux Ellipſes ou deux Hyperboles *AM*, *am*, ſont ſemblables, & qu'on prenne dans la Section *AM* un de ſes diametres quelconques *AH* ; il y aura toûjours dans l'autre Section *am* un diametre *ah* ſemblable à *AH*, qui aura avec ſon parametre *ag* la même raiſon que *AH* avec le ſien *AG* : & qu'ainſi les diametres ſemblables *AH*, *ah*, ſeront en même raiſon avec leurs diametres conjugués. Or comme dans une Ellipſe ou Hyperbole il ne peut y avoir * que deux differens diametres conjugués qui faſſent entr'eux les mêmes angles, & que ces diametres ne different que par leur poſition, leur grandeur demeurant la même ; il s'enſuit que dans les Ellipſes ou les Hyperboles ſemblables tous les diametres conjugués qui feront les mêmes angles, ſeront entr'eux en même raiſon ; obſervant de prendre pour les antécédens de ces deux raiſons les plus grands de ces deux diametres conjugués, & pour conſéquens les moindres.

* *Art.* 66. & 128.

PROPOSITION III.

Theorême.

204. SI *l'on mene dans une Section Conique deux paralleles quelconques* BD, EF, *terminées par la Section ; & qu'on joigne leurs extremités par deux droites* BE, DF ; *je dis que les ſegmens* BMEB, DMFD, *compris par des portions de la Section, & par les droites qui joignent les extremités des paralleles, ſeront égaux entr'eux.* FIG. 110. 111.

Car ayant prolongé les ſoûtendantes BE, DF, juſqu'à ce qu'elles ſe rencontrent en un point G, & ayant mené par ce point & par le point de milieu H de la ligne BD, la droite GH; il eſt clair qu'elle diviſera par le milieu en K la parallele EF à BD, comme auſſi par le milieu en P un autre parallele quelconque OO à la même ligne BD. Donc la ligne HK ſera un diametre * qui aura pour ordonnées de part & d'autre les paralleles BD, EF; & partant ſi l'on mene par un de ſes points quelconques P une parallele à ces lignes, elle rencontrera * la Section en deux points M, M, également éloignés du point P; d'où l'on voit que les parties MO, OM, de la même parallele MM à BD, compriſes dans les ſegmens $BMEB$, $DMFD$, ſont toûjours égales entr'elles, en quelque endroit que puiſſe tomber cette parallele entre les lignes BD, EF. Il eſt donc évident * que ces deux ſegmens ſeront égaux entr'eux.

* *Art.* 146.

* *Art.* 144.

* *Art.* 186.

Si les ſoûtendantes BE, DF, étoient paralleles entr'elles, il faudroit mener par le point de milieu H de la ligne BD une droite HK parallele à ces ſoûtendantes, & la démonſtration demeureroit toûjours la même.

COROLLAIRE I.

FIG. 110. 205. PUISQUE PM eſt toûjours égale à PM; il s'enſuit 1°. Que les Trapeſes Coniques $KHBE$, $KHDF$, ſont égaux entr'eux. 2°. (Lorſque la ligne BD au lieu de rencontrer la Section en deux points la touche en un point A.) que les Trilignes Coniques AKE, AKF, ſont egaux; & qu'ainſi les ſegmens $AEMA$, $AFMA$, le ſont auſſi; puiſque le triangle AEF eſt diviſé en deux parties égales par le diametre AK qui paſſe par le milieu de EF.

COROLLAIRE II.

FIG. 110. 206. SI la Section étant une Parabole, une Ellipſe, ou une Hyperbole, l'on mene par les extremités des paralleles

BD, EF, les droites BF, DE, qui s'entrecoupent entre ces paralleles ; les ſegmens $BFDAB$, $DEBAD$, ſeront égaux entr'eux. Car les triangles BFD, BED, qui ſont entre les mêmes paralleles BD, EF ; & qui ont la même baſe BD, ſont égaux entr'eux ; & partant ſi l'on ajoûte d'une part le ſegment $DMFD$ plus le ſegment $BADB$, & de l'autre $BMEB$ égal au ſegment $DMFD$, plus auſſi le même ſegment $BADB$; les touts $BFDAB$, $DEBAD$, ſeront égaux entr'eux.

COROLLAIRE III.

270. DE-LA on voit comment on peut couper par un point donné D ſur une Section Conique, deux ſegmens $DGED$, $DFBD$, égaux chacun à un ſegment donné $BEDB$. Car ayant tiré les droites BD, DE, & mené BG parallele à DE, & EF parallele à BD, leſquelles rencontrent la Section aux points G, F ; il eſt clair * en joignant la droite DF, que le ſegment $DFBD$ eſt égal au ſegment $BEDB$, à cauſe des paralleles DB, EF ; & de même en joignant DG, que le ſegment $DGED$ eſt égal au ſegment $BEDB$, à cauſe des paralleles BG, DE. Fig. 112. * Art. 206.

Si le point donné tomboit ſur l'une des extremités du ſegment donné que je ſuppoſe être à preſent $DGED$, il faudroit mener par l'autre extremité G, une parallele GF à la tangente qui paſſe par le point D ; & tirant par le point F où cette parallele rencontre la Section, & par le point donné D, la ſoûtendante DF, il eſt clair que le ſegment $DFBD$ ſera égal au ſegment donné $DGED$.

Il eſt viſible qu'il ne peut y avoir dans ce dernier cas que le ſeul ſegment $DFBD$ qui ſoit égal au ſegment donné $DGED$; puiſque tout autre ſegment qui aura pour l'une de ſes extremités le point donné D, ſera plus grand ou moindre que le ſegment $DFBD$, ſelon que ſon autre extremité ſera plus proche ou plus éloignée du point D que n'eſt le point F. D'où il ſuit que ſi deux ſegmens $DGED$, $BEBD$, qui ont une extremité commune D, ſont égaux

entr'eux ; & que ſi l'on mene par le point *D* une paralléle à la droite *G F* qui joint leurs autres extremités, elle ſera tangente en *D*.

COROLLAIRE IV.

208. ON tire du Corollaire précédent une maniere toute nouvelle & fort aiſée de mener une Tangente par un point donné *D* ſur une Section Conique donnée.

Car ayant tiré par ce point deux droites quelconques *D B*, *D E*, qui rencontrent la Section aux points *B*, *E*, on menera par le point *B* une parallele *B G* à *D E*, & par le point *E* une parallele *E F* à *B D*, leſquelles rencontrent la Section aux points *G*, *F*, que l'on joindra par une ligne droite *G F*, à laquelle on tirera par le point *D* une parallele qui ſera la tangente cherchée ; puiſque les ſegmens *D G E D*, *D F B D*, étant égaux chacun au même ſegment *B E D B*, le ſeront entr'eux.

PROPOSITION IV.

Theorême.

FIG. 113. 114. & 115.

209. *S'IL y a dans une Ellipſe, dans une Hyperbole, ou dans les Hyperboles oppoſées deux lignes droites* B D, E F, *paralleles entr'elles & terminées par la Section ; & qu'on tire du centre* C *les demi-diametres* C B, C E, C D, C F, *les Secteurs Elliptiques ou Hyperboliques* C B E, C D F, *ſeront égaux entr'eux.*

Car menant par les points de milieu *H*, *K*, des droites *B D*, *E F*, le diametre *C K*, les triangles *C H B*, *C H D*, & *C K E*, *C K F*, ſeront égaux entr'eux ; puiſqu'ils ont le même ſommet *C*, & que leurs baſes *H B*, *H D*, & *K E*, *K F*, ſont égales. Par conſéquent (*fig.* 114.) $KHBE + CBE = CKE - CHB = CKF - CHD = KHDF + CDF$; & (*fig.* 113. 115.) $KHBE - CBE = \pm CHB \mp CKE = \pm CHD \mp CKF = KHDF - CDF$. Donc puiſque les Trapeſes Coniques *K H B E*,

KHDF, ſont * égaux, il s'enſuit que les Secteurs Elliptiques ou Hyperboliques *CBE*, *CDF*, le ſeront auſſi. * *Art.* 205.

COROLLAIRE I.

210. SI la Section eſt une Ellipſe, ou une Hyperbole; & que la ligne *BD* parallele à *EF*, devienne tangente en *A*; il eſt clair que les Secteurs *CAE*, *CAF*, ſeront égaux entr'eux. Car prolongeant le demi-diametre *CA* juſqu'à ce qu'il rencontre la ligne *EF* au point *K*, cette ligne ſera coupée en deux également en ce point; & par conſéquent les triangles *CKE*, *CKF*, ſeront égaux. Or les trilignes Coniques *AKE*, *AKF*, le ſont * auſſi. Donc &c. FIG. 113. 114. * *Art.* 205.

COROLLAIRE II.

211. DE-LA on voit que pour diviſer en deux parties égales un Secteur Elliptique ou Hyperbolique quelconque *CEF*; il n'y a qu'à mener le demi-diametre *CA* qui diviſe par le milieu en *K* la ſoûtendante *EF* de ce Secteur. Ce qui donne encore les Secteurs *CBE*, *CDF*, égaux entr'eux, en ſuppoſant *BD* parallele à *EF*. Car ayant de cette maniére les Secteurs *CAE*, *CAF*, & *CAB*, *CAD*, égaux entr'eux, les Secteurs *CBE*, *CDF*, qui en ſont les differences, doivent auſſi être égaux entr'eux.

PROPOSITION V.

Theorême.

212. SOIT *un demi-cercle* ADH, *qui ait pour diametre le premier ou grand axe* AH *d'une demie-Ellipſe* ABH; *ſoit menée par un point quelconque* P *de l'axe* AH, *une perpendiculaire à cet axe, qui rencontre l'Ellipſe au point* M, *& le cercle au point* N; *par où & par le centre* C *ſoient tirées les droites* CM, CN. *Je dis que le Secteur Elliptique* FIG. 116.

CAM *eſt au Secteur circulaire* CAN, *comme la moitié* CB *du petit axe de l'Ellipſe, eſt à la moitié* CA *ou* CD *du grand.*

* *Art.* 42. & 55. Car par la proprieté * de l'Ellipſe $\overline{PM}^2 . \overline{CB}^2 :: AP * PH . AC * CH$ ou $\overline{CA}^2$, & par la proprieté du cercle $\overline{PN}^2 . \overline{CD}^2 :: AP * PH . AC * CH$ ou $\overline{CA}^2$. Donc $\overline{PM}^2 . \overline{CB}^2 :: \overline{PN}^2 . \overline{CD}^2$. ou $\overline{PM}^2 . \overline{PN}^2 :: \overline{CB}^2 . \overline{CD}^2$. Et en tirant les racines quarrées, $PM . PN :: CB . CD$ ou CA. Or comme cela arrive toûjours en quelque endroit que tombe la perpendiculaire PMN, il s'enſuit * que l'eſpace Elliptique entier $ABHA$ eſt au demi cercle $ADHA$, & la portion APM de cet eſpace à la portion APN du demi cercle, comme CB eſt à CD ou à CA. Mais le triangle rectangle CPM eſt au triangle rectangle CPN qui a la même hauteur, comme la baſe PM eſt à la baſe PN, c'eſt à dire, comme CB eſt à CD ou à CA; & par conſéquent l'eſpace Elliptique APM plus ou moins le triangle CPM (plus lorſque AP eſt moindre que AC, & moins lorſqu'elle eſt plus grande) c'eſt à dire, le Secteur Elliptique CAM ſera à l'eſpace circulaire APN plus ou moins le triangle CPN, c'eſt à dire, au Secteur circulaire CAN, comme CB eſt à CD ou à CA. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* *Art.* 186.

COROLLAIRE I.

213. COMME le Secteur de cercle CAN eſt égal au rectangle de l'arc AN par la moitié du rayon CA ou CD; il s'enſuit que le Secteur Elliptique CAM eſt auſſi égal au rectangle de ce même arc AN par la moitié de CB.

COROLLAIRE II.

214. SI l'on mene par un point quelconque G du grand axe AH autre que le point P, une perpendiculaire à cet axe, qui rencontre l'Ellipſe au point E, & le

cercle au point F ; je dis que les Secteurs Elliptiques ACE, ACM, ſont entr'eux, comme les Secteurs circulaires ACF, ACN. Car $ACM. ACN :: CB. CD$. Et de même $ACE. ACF :: CB. CD$. Et partant $ACM. ACN :: ACE. ACF$. Et $ACM. ACE :: ACN. ACF$. D'où l'on voit que pour trouver un Secteur Elliptique ACM, qui ſoit au Secteur Elliptique ACE en raiſon donnée ; il n'eſt queſtion que de trouver un Secteur circulaire ACN qui ſoit en raiſon donnée au Secteur ACF, ou ce qui eſt la même choſe, de diviſer en raiſon donnée l'arc ANF ou l'angle ACF.

PROPOSITION VI.

Theorême.

215. *S'il y a deux demi-Hyperboles* AM, AN, *ou* BM, DN, *qui ayent pour centres le même point* C, *pour un de leurs demi diametres la même droite* CA, *& pour les deux demi-diametres conjugués au demi-diametre* CA, *deux droites quelconques* CB, CD, *ſituées ſur la même ligne ; & qu'on mene par un point quelconque* P *du demi-diametre* CA *(prolongé s'il eſt neceſſaire) une droite parallele à* CD, *laquelle rencontre les Hyperboles aux points* M, N ; *par leſquels & par le centre* C, *ſoient tirées les droites* CM, CN : *je dis que les Secteurs Hyperboliques* CAM, CAN, *ou* CBM, CDN, *ſeront entr'eux comme les demi-diametres conjugués* CB. CD. FIG. 117. 118.

On aura par la proprieté * des deux Hyperboles AM, AN, ou BM, DN, ces deux proportions $\overline{PM}^2 . \overline{CB}^2 :: \overline{CP}^2 . \overline{+CA}^2 . \overline{CA}^2 :: \overline{PN}^2 . \overline{CD}^2$. Et par conſéquent $\overline{PM}^2 . \overline{PN}^2 :: \overline{CB}^2 . \overline{CD}^2$. Et en prenant les racines quarrées, $PM. PN :: CB. CD$. Or comme cela arrive toûjours en quelque endroit que tombe la parallele PMN, il s'enſuit * que les eſpaces Hyperboliques APM, APN, ou $CPMB$, $CPND$, ſont entr'eux comme CB eſt à CD. Mais les triangles CPM, CPN, ſont en- * *Art.* 81. & 118. * *Art.* 186.

tr'eux, comme leurs baſes PM, PN, (puiſqu'ils ſont ſituées entre les mêmes paralleles CD, PN), ou comme les demi diametres conjugués CB, CD. Et par conſéquent (*fig.* 117.) $CB.\ CD :: CPM - APM.\ CPN - APN :: CAM.\ CAN$. Ou bien (*fig.* 118.) $CB.\ CD :: CPMB - CPM.\ CPND - CPN :: CBM.\ CDN$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

216. Si les deux demi diametres conjugués CA, CD, ſont égaux entr'eux, l'Hyperbole AN ou DN ſera équilatère. Et ſi l'on avoit trouvé le moyen de quarrer les Secteurs Hyperboliques CAN, ou CDN, on auroit auſſi la quadrature des Secteurs CAM, ou CBM, qui ont pour baſes des portions AM, ou BM d'une autre Hyperbole, dont le demi diametre conjugué CB peut être pris de telle grandeur qu'on veut; puiſque le rapport des Secteurs Hyperboliques CAM, CAN, ou CDN, CBM, étant exprimé par les droites CD, CB, eſt donné. D'où l'on voit que ſi l'on avoit la quadrature de l'Hyperbole équilatère, on auroit auſſi celle de toutes les autres Hyperboles : de même qu'ayant * la quadrature du Cercle, on auroit celle de toutes les Ellipſes.

* *Art.* 212.

PROPOSITION VII.

Theorême.

Fig. 119. 217. *Si l'on prend ſur une aſymptote* CN *d'une Hyperbole* EBDF, *deux parties* CK, CL, *qui ſoient entr'elles en même raiſon que deux autres parties quelconques* CG, CH, *de la même aſymptote; & qu'ayant mené les paralleles* GF, HD; KB, LE, *à l'autre aſymptote* CP, *leſquelles rencontrent l'Hyperbole aux points* F, D, B, E, *on tire les demi-diametres* CF, CD, CB, CE : *je dis que les deux Secteurs*

Secteurs Hyperboliques CBE, CDF, *seront égaux entr'eux.*

Ayant mené les deux droites BD, EF, qui rencontrent les asymptotes aux points M, O, N, P; les paralleles KB, HD, donneront cette proportion, $MB.MK :: DO.CH$. Les paralleles LE, GF, donneront aussi cette autre proportion, $NE.NL :: FP.CG$. Et partant puisque * $MB=DO$, & $NE=FP$, il s'ensuit que $MK=CH$, & $NL=CG$. Or par la supposition CG ou $LN.CH$ ou $KM :: CK.CL ::$ * $LE.KB$. Et partant $LN.LE :: KM.KB$. Donc les lignes NE, MB, c'est à dire, les deux droites EF, BD, dont elles sont parties, seront paralleles entr'elles. Donc * les Secteurs Hyperboliques CBE, CDF, sont égaux entr'eux. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* *Art.* 95.

* *Art.* 100.

* *Art.* 209.

COROLLAIRE I.

218. SI les parties CK, CL, de l'asymptote CN, sont en même raison que deux parties quelconques CS, CT de l'autre asymptote CP; & qu'on mene les paralleles KB, LE, à l'asymptote CP, & les paralleles SD, TF, à l'autre asymptote CN; il est clair que les Secteurs Hyperboliques CDF, CBE, seront aussi égaux entr'eux. Car ayant mené les paralleles FG, DH, à l'asymptote CP, on aura * $CG.CH :: HD$ ou $CS.GF$ ou CT * $:: CK.CL$. Donc &c.

* *Art.* 100.

* *Hyp.*

COROLLAIRE II.

219. SI l'on prend sur la même asymptote la partie CK troisiéme proportionnelle à deux parties quelconques CG, CH; on prouvera par un raisonnement semblable à celui du Theorême que la ligne BF est parallele à la tangente qui passe par le point D; & qu'ainsi * les Secteurs Hyperboliques CFD, CDB, sont égaux entr'eux. D'où il suit que si l'on prend sur une asymptote autant de parties qu'on voudra CG, CH, CK, CL, &c. en progression geometrique continuë, d'où partent les paralleles GF, HD, KB, LE, &c. à l'au-

* *Art.* 210.

tre aſymptote, les Secteurs Hyperboliques CFD, CDE, CBE, &c. ſeront tous égaux entr'eux.

COROLLAIRE III.

220. DE-LA on voit que ſi CH eſt la premiere de deux moyennes geometriquement proportionnelles entre les extrêmes CG, CL; & qu'on tire les droites GF, HD, LE, paralleles à l'autre aſymptote; le Secteur CDF, ſera au Secteur CFE, comme 1 eſt à 3. De même, ſi CH eſt la premiere de trois moyennes proportionnelles entre CG, CL; le Secteur CDF ſera au Secteur CFE, comme 1 eſt à 4. Et en général, ſi la lettre m marque un nombre entier quelconque, & que GH ſoit la premiere d'autant de moyennes proportionnelles entre les extrêmes CG, CL, que le nombre $m-1$ contient d'unités; le Secteur CDF, ſera au Secteur CFE, comme 1 eſt au nombre m.

REMARQUE.

221. ON peut ici donner une idée fort exacte de ce qu'on appelle *Logarithmes* dans l'Arithmetique, & de l'extrême facilité qu'ils apportent au calcul, lorſqu'il s'agit d'operer ſur de fort grands nombres. Voici comment:

Si l'on ſuppoſe que CG, exprime l'unité, & que CL étant décuple de CG, c'eſt à dire, 10, le Secteur Hyperbolique CFE, ſoit diviſé en 10000000000 parties égales. Et ſi l'on compoſe une table diviſée en deux colomnes, dont la premiere renferme de ſuite tous les nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. & l'autre des nombres artificiels, placés vis-à-vis, & qui ſoient tels que CH, exprimant un nombre quelconque naturel, le nombre artificiel placé vis-à-vis, exprime le nombre des parties que le Secteur Hyperbolique CDF contient par rapport au nombre des parties que contient le Secteur

CFE : les nombres artificiels ſeront appellés les *Logarithmes* des nombres naturels auſquels ils répondent. Cela poſé,.

1°. Si l'on propoſe de multiplier deux nombres naturels quelconques CH, CK, l'un par l'autre, il n'y aura qu'à prendre dans la table leurs Logarithmes qui expriment les Secteurs CFD, CFB, & ajoûtant enſemble ces deux Logarithmes, on aura le Logarithme qui exprime le Secteur CFE, vis-à-vis duquel ſera placé le nombre naturel CL produit de la multiplication des deux nombres CH, CK.

2°. Si l'on propoſe de diviſer le nombre CL par le nombre CK, il n'y aura qu'à retrancher le Logarithme CFB du Diviſeur CK, du Logarithme CFE du nombre à diviſer CL, pour avoir le Logarithme CBE ou CFD du quotient CH.

3°. Si l'on propoſe d'extraire une racine quelconque du nombre CL, par exemple la cubique, il n'y aura qu'à diviſer ſon Logarithme CFE en trois parties égales, pour avoir le Logarithme CFD vis-à-vis duquel eſt placé le nombre CH, qui eſt la racine cubique cherchée.

Tout cela eſt une ſuite de ce que les Secteurs Hyperboliques CFD, CBE, ſont égaux entr'eux, lorſque $CG. CH :: CK. CL$. Et que les Secteurs CFD, CDB, CBE, &c. ſont auſſi égaux entr'eux, lorſque $CG. CH :: CH. CK :: CK. CL ::$ &c. Il eſt donc évident que par le moyen de cette table, on pourra abreger extrêmement les operations de l'Arithmethique, lorſqu'il s'agit d'operer ſur de grands nombres, comme dans les calculs Aſtronomiques.

Comme l'on n'a pû juſqu'à preſent trouver en nombres exacts, le rapport des Secteurs Hyperboliques CFD, CFB, &c. au Secteur CFE, on s'eſt contenté d'exprimer ce rapport en nombres fort approchans ; & par le moyen de ces nombres qu'on appelle *Artificiels*, & des nombres naturels qu'on a pla-

cés vis-à-vis, on a composé la Table des Logarithmes qui a les proprietés qu'on vient d'expliquer. Or dans la supposition que le Secteur *CFE* Logarithme de *CL* (10) contient 10000000000 parties égales, on trouvera que le parallelogramme *CGFT* contient plus de 4342944818 de ces parties, & moins de 4342944819. D'où l'on voit qu'un Secteur Hyperbolique quelconque *CBF*, est au parallelogramme *CGFT* à peu près comme le Logarithme du nombre *CK* trouvé dans la Table, est au nombre 4342944819, & cela en prenant les Logarithmes de dix caractéres outre le caractéristique.

PROPOSITION VIII.

Theorême.

FIG. 120. 222. S'IL *y a sur chaque asymptote deux parties* CG, CL, *&* CR, CS, *qui soient telles que* $\sqrt[m]{CG}.\sqrt[m]{CL} :: \sqrt[m]{CR}.\sqrt[m]{CS}$; *& qu'on tire les droites* GF, LE, RT, SV, *paralleles aux asymptotes : je dis que le Secteur* CFE, *sera au Secteur* CTV, *comme* m *est à* n. *Les lettres* m *&* n *marquent des nombres entiers quelconques.*

Car si l'on fait $\sqrt[m]{CG}.\sqrt[m]{CL} :: CG.CH$. Et $\sqrt[m]{CR}.\sqrt[m]{CS} :: CR.CQ$. Et qu'on tire les droites *HD*, *QN*, paralleles aux asymptotes ; il est clair que les Secteurs Hyperboliques *CFD*, *CTN*, seront égaux * entr'eux, puisque * *CG.CH :: CR.CQ*. Or selon la nature des Progressions geometriques, la ligne *CH* sera la premiére d'autant de moyennes proportionnelles entre *CG* & *CL* que le nombre $m-i$ contient d'unités, & de même la ligne *CQ* sera la premiére d'autant de moyennes proportionnelles entre *CR* & *CS* que le nombre $n-i$ contient d'unités. Donc * *CFE.CFD :: m.i.* Et *CTN* ou *CFD.CTV :: i.n.* Et par conséquent le Secteur *CFE* est au Secteur *CTV* en raison composée de *m* à *i*, & de *i* à *n*, c'est à dire, comme le nombre *m* est au nombre *n*. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* *Art.* 218. * *Hyp.* * *Art.* 220.

COROLLAIRE.

223. DE-LA on voit qu'un Secteur Hyperbolique CFE étant donné avec un point quelconque T de l'Hyperbole, il ne faut pour trouver un autre point V de la même Hyperbole, tel que le Secteur CFE soit au Secteur CTV, comme m est à n, que prendre CS en sorte que $\sqrt[m]{CG}.\sqrt[n]{CL} :: \sqrt[n]{CR}.\sqrt[m]{CS}$, ou (ce qui revient au même) $\sqrt[m]{CG}.\sqrt[n]{CL} :: CR.CS$. C'est à dire, qu'il faut prendre $CR = CR \times \sqrt[m]{\frac{\overline{CL}^n}{\overline{CG}^m}}$.

PROPOSITION IX.

Theorême.

224. SI *l'on mene par les extremités* B, F, *d'un Secteur Hyperbolique quelconque* CBF, *les droites* BK, FG, *paralleles à une asymptote* CS, *& terminées par l'autre* CL; *je dis que le Secteur Hyperbolique* CBF *est égal à l'espace hyperbolique* BKGF *compris entre les paralleles* BK, FG, *à une asymptote* CS, *la partie* GK *de l'autre asymptote* CL, *& la portion* BF *de l'Hyperbole.* FIG. 121.

Car si l'on retranche des triangles égaux * CKB, CGF, le même triangle CGA (le point A est le point d'intersection des deux droites FG, CB) & qu'on ajoûte aux deux restes $BKGA$, CAF, le même espace hyperbolique BAF, on formera d'une part l'espace $BKGF$, & de l'autre le Secteur CBF qui seront égaux entr'eux. *Ce qu'il falloit démontrer.* * *Art.* 99.

COROLLAIRE I.

225. SI l'on eut mené les lignes BQ, FO, paralleles à l'asymptote CL, & terminées par l'asymptote CS, on auroit prouvé de même que le Secteur Hyperbolique

CBF est égal à l'espace hyperbolique *BQOF*; d'où l'on voit que les espaces ou Trapeses hyperboliques *BKGF*, *BQOF*, sont égaux entr'eux.

COROLLAIRE II.

226. DE-LA il est évident que tout ce qu'on vient de démontrer dans les articles 217, 218, 219, 220, 221, 222, & 223, des Secteurs Hyperboliques, se doit aussi entendre de ces sortes de Trapeses; puisqu'ils leurs sont égaux.

PROPOSITION X.

Theorême.

Fig. 122. 227. SOIENT *deux differentes Hyperboles* BMF, HND, *qui ayent les mêmes asymptotes* CL, CS, *& soient menées par deux points quelconques* G, K, *d'une asymptote deux paralleles* GDF, KHB, *à l'autre. Je dis que l'espace hyperbolique* HKGD *est à l'espace hyperbolique* BKGF, *comme la puissance de l'Hyperbole* HND, *est à la puissance de l'Hyperbole* BMF.

Car ayant mené par un point quelconque *P* de la partie *GK*, une parallele aux deux droites *GD*, *KH*, laquelle rencontre l'Hyperbole *BMF* au point *M*, & l'Hyperbole *HND* au point *N*; & nommé la puissance de l'Hyperbole *HND*, *aa*; celle de l'Hyperbole *BMF*, *bb*; & l'indéterminée *CP*, *x*; on aura

*Art. 101. * $PN = \frac{aa}{x}$, & $PM = \frac{bb}{x}$; & partant $PN.PM :: aa.bb$.

Or comme cela arrive toûjours en quelque endroit de la

*Art. 186. partie *GK* que tombe le point *P*; il s'ensuit * que l'espace hyperbolique $HKGD.BKGF :: aa.bb$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

228. LORSQUE les puissances des Hyperboles *HND*, *BMF*, sont entr'elles comme le nombre *m* est au nom-

bre n ; on pourra toûjours trouver dans l'Hyperbole HND un Trapeſe hyperbolique $RSVT$ égal à un Trapeſe hyperbolique $GKBF$ de l'autre BMF, les droites CG, CK, CR, étant données. Car il eſt clair * que le Trapeſe $GKHD$ eſt au Trapeſe $GKBF$, comme m eſt à n ; & qu'ainſi toute la difficulté ſe réduit à trouver dans la même Hyperbole HND, le Trapeſe $RSVT$, qui ſoit au Trapeſe $GKHD$, comme le nombre n eſt au nombre m : & c'eſt ce qui ſe fera * en prenant CS, telle que $\sqrt{CG}.\sqrt{CK} :: CR.CS$. * *Art.* 222. & 225. * *Art.* 223. & 226.

DE'FINITIONS.

4.

Soit une ligne droite indéfinie AC, qui ait pour origine le point fixe A ; & ſoit une ligne courbe AMB telle qu'ayant mené d'un de ſes points quelconques M une droite MP qui faſſe avec AC un angle donné APM, & ayant nommé les indéterminées AP, x ; PM, y ; on ait toûjours $ax = yy$ (la lettre a marque une ligne donnée) : il eſt clair * dans cette ſuppoſition que la ligne courbe AMB eſt une Parabole qui a pour diametre la ligne AC, pour une ordonnée à ce diametre la droite PM, & pour parametre de ce diametre la donnée a. Mais ſi l'on ſuppoſe à preſent que la nature de la courbe AMB ſoit exprimée par l'équation $y^3 = aax$, ou par cette autre $y^3 = axx$; cette ligne courbe ſera nommée *Parabole cubique* ou *du troiſiéme degré* ; parce que celle des deux indéterminées x ou y, dont la puiſſance eſt la plus élevée, monte au troiſiéme degré. De même ſi l'équation eſt $y^4 = a^3x$, ou $y^4 = ax^3$; la ligne courbe AMB eſt appeliée *Parabole du quatriéme degré* ; parce que l'indéterminée y dont la puiſſance eſt la plus haute, monte au quatriéme degré. Il en eſt ainſi de toutes les autres à l'infini. * *Art.* 19. FIG. 123.

5.

Soit comme dans la définition précédente une ligne droite AC qui ait pour origine le point fixe A ; & ſoit FIG. 124.

une ligne courbe BM, telle qu'ayant mené d'un de ſes points quelconques M la droite MP qui faſſe avec AC un angle donné APM, & ayant nommé AP, x; PM, y; on ait toûjours $xy = aa$ (la lettre a marque une ligne donnée) : il eſt clair * que cette ligne courbe ſera une Hyperbole, qui aura pour l'une de ſes aſymptotes la ligne AC, & pour l'autre, la ligne AD parallele à PM, & dont la puiſſance ſera le quarré aa. Mais ſi l'équation qui exprime la nature de la courbe BM eſt $xxy = a^3$; cette ligne courbe ſera nommée *Hyperbole cubique* ou *du troiſiéme degré*, parce que le produit xxy des deux indéterminées x & y, a trois dimenſions. De même, ſi l'équation étoit $x^3y = a^4$; la ligne courbe BM ſeroit une *Hyperbole du quatriéme degré*; parce que le produit x^3y à quatre dimenſions. Il en eſt ainſi de toutes les autres à l'infini.

* *Art.* 101.

COROLLAIRE I.

Fig. 123. & 124.

229. SI l'on ſuppoſe que la lettre m marque un nombre entier quelconque qui ſoit l'expoſant de la puiſſance de l'indéterminée $AP(x)$; & de même que la lettre n marque l'expoſant de la puiſſance de l'autre indéterminée $PM(y)$: il eſt clair que l'équation $y^n = x^m \times a^{n-m}$ (ou ſimplement $y^n = x^m$, en faiſant pour abreger la donnée $a = 1$) exprimera la nature des Paraboles de tous les degrés à l'infini. On voit de même que l'équation $x^m y^n = a^{m+n}$ (ou ſimplement $x^m y^n = 1$, en faiſant $a = 1$) exprime en general la nature des Hyperboles de tous les degrés à l'infini.

COROLLAIRE II.

230. SI l'on mene par l'origine fixe A de la ligne AC une ligne droite indéfinie AD parallele à PM; & qu'ayant tiré MK parallele à AC, qui rencontre AD au point K, on nomme les indéterminées AK, x; KM, y; il

il eſt clair que l'indéterminée x qui exprimoit auparavant la ligne AP ou MK, devient à preſent y ; & qu'au contraire y qui exprimoit PM ou AK, devient à preſent x. D'où il ſuit.

1°. Que ſi la courbe AMB eſt une Parabole ordinaire, elle aura pour équation $yy = ax$ ou $xx = ay$, ſelon qu'on rapportera ſes points à ceux de la ligne AC ou AD ; & de même que la Parabole cubique qui a pour équation $y^3 = axx$ lorſqu'on rapporte ſes points à ceux de la ligne AC, aura pour équation $x^3 = aay$ lorſqu'on les rapporte à ceux de la ligne AD ; & en general que ſi la ligne courbe AMB a pour équation $y^n = x^m a^{n-m}$ étant rapportée à la ligne droite AC, cette même courbe aura pour équation $x^n = y^m a^{n-m}$ (l'on ſuppoſe que n ſurpaſſe m) étant rapportée à la ligne AD. FIG. 123.

2°. Que l'Hyperbole ordinaire a toûjours la même équation $xy = aa$, ſoit qu'on la rapporte à la ligne AC ou à la ligne AD ; que l'Hyperbole cubique qui a pour équation $xxy = a^3$ étant rapportée à AC, aura pour équation $xyy = a^3$ étant rapportée à l'autre ligne AD ; & en general que l'Hyperbole qui a pour équation $x^m y^n = a^{m+n}$ lorſqu'on rapporte ſes points à ceux de la ligne AC, aura pour équation $x^n y^m = a^{m+n}$ lorſqu'on les rapporte à ceux de la ligne AD. FIG. 124.

COROLLAIRE III.

231. DE-LA il eſt évident qu'il y a deux Paraboles cubiques dont l'une a pour équation $y^3 = aax$ ou $x^3 = aay$, & l'autre $y^3 = axx$ ou $x^3 = ayy$; au lieu qu'il n'y a qu'une ſeule Hyperbole cubique $xxy = a^3$ ou $xyy = a^3$. Car les indéterminées x & y ne peuvent être combinées que des quatre premieres manieres pour exprimer les Paraboles cubiques ou du troiſiéme dégré ; & des deux ſecondes pour exprimer les Hyperboles cubiques. Or comme les quatre premieres égalités appartiennent à deux differentes courbes, & les deux ſecondes à la même ; il s'enſuit, &c. On peut trouver par

la même voïe le nombre des Paraboles ou des Hyperboles du quatriéme, cinquiéme degré, &c.

COROLLAIRE IV.

FIG. 124. 232. NON-SEULEMENT l'Hyperbole ordinaire a pour asymptotes les lignes droites indéfinies AC, AD; mais encore celle de tous les degrés à l'infini. Car soit l'équation generale $x^m y^n = a^{m+n}$ ou $y^n = \frac{a^{m+n}}{x^m}$ ($AP = x$, $PM = y$) qui exprime la nature de telle Hyperbole qu'on voudra, lorsqu'on rapporte ses points à ceux de la ligne AC; il est manifeste que plus AP (x) augmente, plus au contraire y^n, & par conséquent PM (y) diminuë; de sorte que x étant infiniment grande, PM (y) devient nulle ou zero: c'est à dire que l'Hyperbole BM & la ligne AC, étant prolongées l'une & l'autre à l'infini, s'approchent toûjours de plus en plus jusqu'à ce qu'enfin elles se joignent dans l'infini même; ce qui constituë l'essence d'une asymptote. Maintenant si l'on rapporte les points de la même Hyperbole à ceux de la ligne AD, on aura $x^n y^m = a^{m+n}$ ou $y^m = \frac{a^{m+n}}{x^n}$ ($AK = x$, $KM = y$); d'où il suit que plus AK (x) devient grande, plus au contraire KM (y) devient petite, & cela à l'infini; & qu'ainsi la ligne AD est encore une asymptote de la même Hyperbole.

PROPOSITION XI.

Problême.

FIG. 123. 233. SOIT *proposé de mener d'un point donné* M *sur la seconde Parabole cubique* AMB, *dont la nature est exprimée par l'équation* $y^3 = axx$, *la tangente* MT.

Ayant supposé l'arc MN infiniment petit, & mené NQ parallele à PM, & MR parallele à AC: le petit triangle MRN sera semblable au grand TPM; puisque le

petit arc MN peut être regardé * comme la prolongation de la tangente TM. Cela posé, on nommera la soûtangente cherchée TP, s; & la petite droite PQ ou MR, e; ce qui donnera $RN=\frac{ey}{s}$, à cause des triangles semblables TPM, MRN. Or si l'on met le cube de QN $(y+\frac{ey}{s})$ à la place de y^3 dans l'équation $y^3=axx$ qui exprime la nature de la courbe AMB; & à la place de xx, le quarré de AQ $(x+e)$: il est évident qu'on formera une équation $y^3+\frac{3ey^3}{s}+\frac{3eey^3}{ss}+\frac{e^3y^3}{s^3}=axx+2eax+eea$ qui exprimera le rapport de AQ à QN. Et si l'on retranche par ordre des deux membres de cette derniere équation ceux de la premiere, & qu'on divise ensuite par e, on trouvera $\frac{3y^3}{s}+\frac{3ey^3}{ss}+\frac{eey^3}{s^3}=2ax+ea$; dans laquelle effaçant tous les termes où e se rencontre, parce que PQ (e) étant infiniment petite ou nulle, ces termes sont nuls par rapport aux autres; il vient enfin $\frac{3y^3}{s}=2ax$; & partant PT $(s)=\frac{3y^3}{2ax}=\frac{3}{2}x$ en mettant pour y^3 sa valeur axx. *Ce qu'il falloit trouver.*

* *Art.* 189.

REMARQUE.

234. Si l'on fait attention sur le calcul précédent, on verra avec évidence qu'en substituant à la place de la puissance de y, une pareille puissance de $y+\frac{ey}{s}$, on n'a besoin que des deux premiers termes de cette puissance. Car tous les autres étant multipliés par les puissances de e, ils renferment chacun e, ou des puissances de e, dans la derniere équation que l'on trouve à la fin de l'operation; & doivent par conséquent être effacés. Il en est de même lorsqu'on substituë à la place de la puissante de x, une pareille puissance de $x+e$. Mais si l'on forme de suite

toutes les puiſſances du binome $x+e$, on aura pour les deux premiers termes de la ſeconde puiſſance x^2+2ex; de la troiſiéme x^3+3exx; de la quatriéme x^4+4ex^3; de la cinquiéme x^5+5ex^4; & ainſi de ſuite à l'infini. De ſorte que les deux premiers termes d'une puiſſance quelconque m de $x+e$, ſeront x^m+mex^{m-1}. On trouvera de même que les deux premiers termes d'une puiſſance quelconque n du binome $y+\frac{ey}{s}$, ſeront $y^n+\frac{ney^n}{s}$.

COROLLAIRE.

235. DE-LA on voit que pour trouver une expreſſion générale de la ſoûtangente $PT(s)$ des Paraboles de tous les degrés à l'infini; il n'y aura qu'à ſe ſervir de l'équation générale $y^m=x^m a^{n-m}$, ou (prenant a pour l'unité) $y^n=x^m$ qui exprime la nature de toutes ces Paraboles. Voici comment.

On mettra dans l'équation générale $y^n=x^m$ à la place de y^n, les deux premiers termes de la puiſſance n de $y+\frac{ey}{s}$, c'eſt à dire, $y^n+\frac{ney^n}{s}$; & de même à la place de x^m, les deux premiers termes de la puiſſance m de $x+e$, c'eſt à dire, x^m+mex^{m-1}: ce qui donnera $y^n+\frac{ney^n}{s}=x^m+mex^{m-1}$. Et retranchant par ordre les membres de la premiere équation de ceux de celle-ci, & diviſant enſuite par e, l'on aura $\frac{ny^n}{s}=mx^{m-1}$; & partant $s=\frac{ny^n}{mx^{m-1}}=\frac{n}{m}x$ en mettant pour y^n ſa valeur x^m.

PROPOSITION XII.

Problême.

FIG. 124. 236. MENER *les tangentes des Hyperboles de tous les degrés à l'infini.*

La même préparation étant faite que dans la propo-

ſition précédente, on mettra dans l'équation générale $x^m y^n = a^{m+n}$ qui exprime le rapport de $AP\ (x)$ à $PM\ (y)$, à la place de x^m les deux premiers termes de la puiſſance m de $AQ\ (x+e)$ c'eſt-à dire, $x^m + mex^{m-1}$; & de même à la place de y^n les deux premiers termes de la puiſſance n de $QN\ (y - \frac{ey}{s})$ c'eſt à dire $y^n - \frac{ney^n}{s}$: ce qui par la multiplication donne cette autre équation $x^m y^n + mey^n x^{m-1} - \frac{ney^n x^m}{s} - \frac{mnee y^n x^{m-1}}{s} = a^{m+n}$ qui exprimera le rapport de AQ à QN. Et retranchant par ordre des deux membres de cette derniere équation, ceux de la premiere; & diviſant enſuite par ey^n; il vient $mx^{m-1} - \frac{nx^m}{s} - \frac{mnex^{m-1}}{s} = o$; dans laquelle équation effaçant le terme $-\frac{mnex^{m-1}}{s}$ qui eſt nul par rapaux deux autres, parce qu'il renferme dans ſon expreſſion la ligne infiniment petite ou nulle $PQ\ (e)$, on trouve en tranſpoſant à l'ordinaire $PT\ (s) = \frac{nx^m}{mx^{m-1}} = \frac{n}{m}x$.

COROLLAIRE.

237. IL eſt donc évident que pour mener la Tangente MT d'un point donné M ſur une Parabole ou une Hyperbole de tel degré qu'on voudra; dont l'équation eſt pour la Parabole $y^n = x^m a^{n-m}$, & pour l'Hyperbole $x^m y^n = a^{m+n}$: il ne faut que prendre la ſoûtangente $PT = \frac{n}{m} AP$ du même côté du point A par rapport au point P, lorſque c'eſt une Parabole; & du côté oppoſé, lorſque c'eſt une Hyperbole. FIG. 123. & 124.

PROPOSITION XIII.

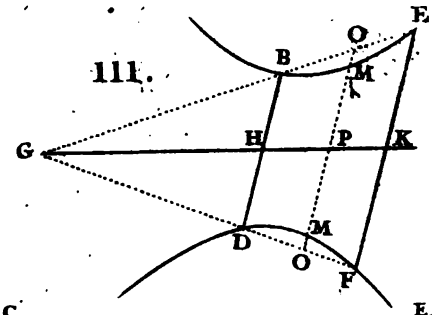
Theorême.

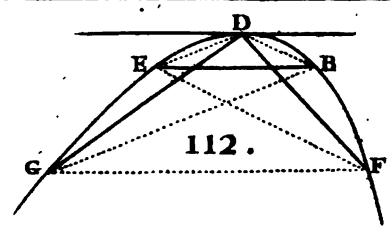
FIG. 125. 238. SOIT *comme dans la définition quatriéme, une Parabole* AMB *de tel degré qu'on voudra, dont la nature eſt exprimée par l'équation* $y^n = x^m a^{n-m}$: *ſoit menée d'un de ſes points quelconques* B *la droite* BC *qui faſſe avec* AC *l'angle donné* ACB, *& ſoit achevé le parallelogramme* ACBD. *Je dis que le parallelogramme circonſcrit* ACBD *eſt à l'eſpace Parabolique* ACBMA *compris par les droites* AC, CB, *& par la portion de Parabole* AMB ; *comme* $m+n$ *eſt à* n.

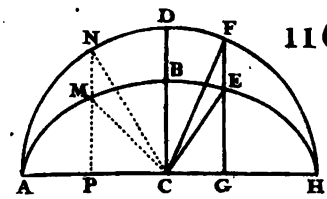
Il faut prouver que ACBD. ACBMA :: $m+n$. n.

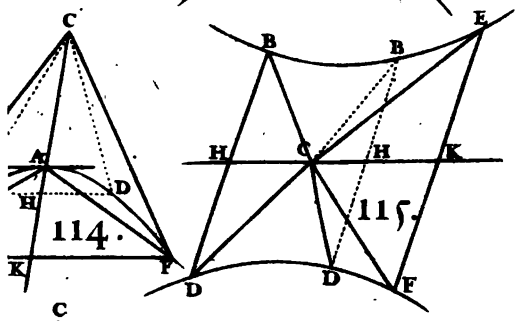
Ayant ſuppoſé ſur la portion de Parabole *AMB* l'arc *MN* infiniment petit, où ſi l'on aime mieux, indéfiniment petit, c'eſt à dire, moindre qu'aucune portion donnée de la Parabole, ſi petite qu'elle puiſſe être ; & mené les droites *MP*, *NQ*, paralleles à *BC* ; & *MK*, *NL*, paralleles à *AC* ; leſquelles forment par leurs rencontres le petit parallelogramme *MRNS* : on tirera la tangente *MT* qui rencontre le diametre *AC* au point *T*, par où l'on menera une parallele à *CB*, qui rencontre les lignes *MK*, *NL*, aux points *F*, *G*. Cela fait, * *Art.* 189. on regardera * le petit arc *MN* comme l'un des petits côtés du Polygone qui compoſe la portion de Parabole *AMB*, & la tangente *MT* comme le prolongement de ce petit côté ; de ſorte que l'on a deux triangles rectilignes *NRM*, *MPT*, qui ſont ſemblables : c'eſt pourquoi *NR* ou *MS*. *RM* :: *MP*. *PT* ou *MF*. Et partant le parallelogramme *PMRQ* eſt égal au parallelogramme *FMSG* ; puiſque les angles *PMR*, *FMS*, ſont égaux, & que les côtés autour de ces angles ſont réciproquement proportionnels.

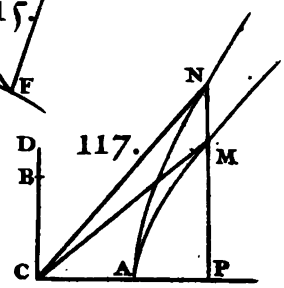
* *Art.* 137. Or * MF ou $PT = \frac{n}{m} AP$ ou $\frac{n}{m} MK$. Donc auſſi le parallelogramme *FMSG* ou ſon égal $PMRQ = \frac{n}{m} KMSL$. Et comme cela arrive toûjours en quel-

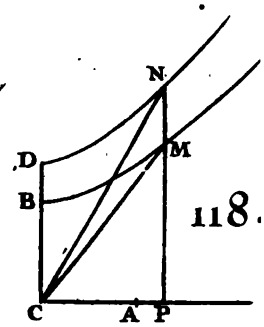


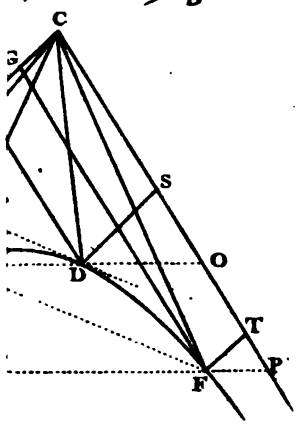


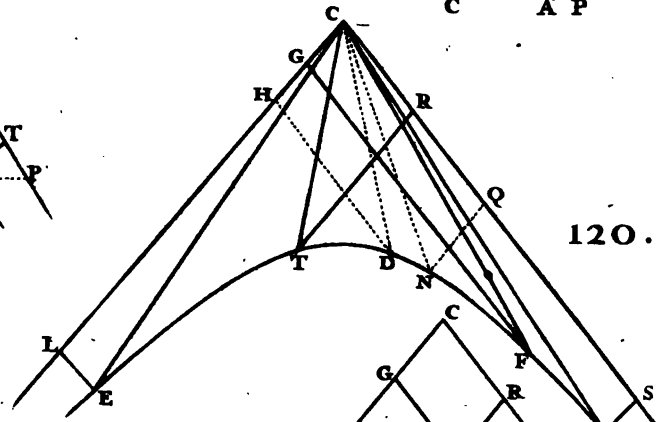


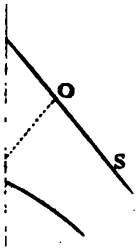


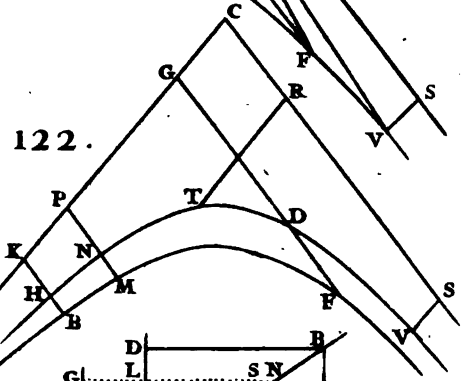


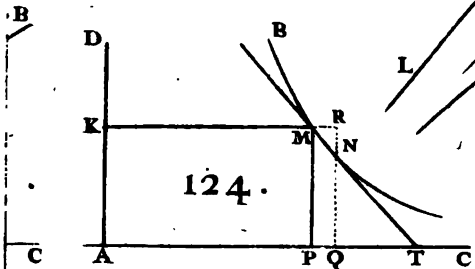












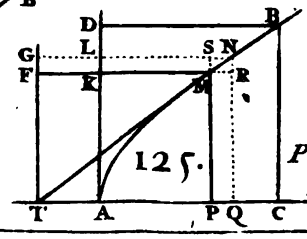


Planche 13
pag. 158

que endroit de la portion de Parabole AMB que tombe le petit arc MN ; il s'enſuit que la ſomme de tous les petits parallelogrammes $PMRQ$, c'eſt à dire, * le Triligne parabolique $ACBMA = \frac{n}{m} ADBMA$ ſomme de tous les petits parallelogrammes $\frac{n}{m} KMSL$. On aura donc $ADBMA . ACBMA :: m . n$. Et par conſéquent $ADBMA + ACBMA$ ou $ACBD . ACBMA :: m + n . n$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* *Art.* 184.

COROLLAIRE.

239. DE-LA il eſt évident que le Triligne parabolique APM eſt au parallelogramme circonſcrit $APMK$, comme n eſt à $m + n$; & qu'ainſi le Trapeſe parabolique $MPCB = \frac{n}{m+n} ABCD - \frac{n}{m+n} APMK$; puiſque $ACBMA = \frac{n}{m+n} ACBD$, & $APM = \frac{n}{m+n} APMK$.

PROPOSITION XIV.

Theorême.

240. SOIT *comme l'on a expliqué dans la définition cinquiéme, une Hyperbole* BMO *de tel degré qu'on voudra, dont la nature eſt exprimée par l'équation* $x^m y^n = a^{m+n}$; *ſoit menée d'un de ſes points quelconques* B *la ligne* BC *parallele à l'une des aſymptotes* AD, *& terminée par l'autre en* C ; *& ſoit achevé le parallelogramme* ACBD. *Je dis que ce parallelogramme inſcrit* ACBD *eſt à l'eſpace hyperbolique* ECBMO *renfermé par la droite déterminée* BC, *par la ligne* CE *prolongée à l'infini du côté de* E, *& par la portion d'Hyperbole* BMO, *prolongée auſſi à l'infini du côté de* O, *comme* $m - n$ *eſt à* n. FIG. 126.

Il faut prouver que ACBD . ECBMO :: $m - n . n$.

La même préparation étant faite que dans la propoſition précédente, on prouvera de la même maniere que le petit parallelogramme $PMRQ = \frac{n}{m} KMSL$.

Or comme cela arrive toûjours en quelque endroit de la portion d'Hyperbole BMO que tombe le petit arc MN; il s'enſuit que la ſomme de tous les petits parallelogrammes $PMRQ$, c'eſt à dire, * l'eſpace $ECBMO = \frac{n}{m} EADBMO$ ſomme de tous les petits parallelogrammes $\frac{n}{m} KMSL$. On aura donc $EADBMO. ECBMO :: m. n$; & partant $EADBMO - ECBMO$, ou $ACBD. ECBMO :: m - n. n$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* *Art.* 184.

COROLLAIRE I.

241. DE-LA il eſt évident que le Trapeſe hyperbolique $CPMB = \frac{n}{m-n} ACBD - \frac{n}{m-n} APMK$; puiſque $ECBMO = \frac{n}{m-n} ACBD$, & que par la même raiſon l'eſpace $EPMO = \frac{n}{m-n} APMK$.

COROLLAIRE II.

242. DE-LA il ſuit:

1°. Que lorſque m ſurpaſſe n, le rapport du parallelogramme inſcrit $ACBD$ à l'eſpace $ECBMO$ indéfiniment étendu du côté de E, ſera toûjours exprimé par des nombres poſitifs; & qu'ainſi on aura toûjours dans ce cas la quadrature abſoluë de cet eſpace.

2°. Que lorſque $m = n$, ce qui arrive dans l'Hyperbole ordinaire; on trouve que le parallelogramme $ACBD$ eſt à l'eſpace hyperbolique $ECBMO$, comme zero eſt à l'unité: c'eſt à dire que cet eſpace eſt infini par rapport au parallelogramme inſcrit $ABCD$.

3°. Que lorſque m eſt moindre que n, le parallelogramme inſcrit $ACBD$ ſera à l'eſpace hyperbolique $ECBMO$ comme un nombre negatif à un nombre poſitif: ce qui fait voir alors que la raiſon de cet eſpace au parallelogramme $ACBD$, eſt pour ainſi dire plus qu'infinie. Mais on doit remarquer dans ce dernier cas, que

que l'eſpace hyperbolique renfermé par la droite DB, par l'aſymptote AD prolongé à l'infini du côté de D, & par l'Hyperbole OMB auſſi prolongée à l'infini du côté de B, ſera au parallelogramme inſcrit $ACBD$, comme m eſt à $n-m$, c'eſt à dire, que cet eſpace ſera quarrable ; car prenant les indéterminées (x) ſur l'aſymptote AD, au lieu qu'on les avoit priſes ſur l'aſymptote AC, l'équation à l'Hyperbole deviendra * $x^n y^m = a^{m+n}$. * *Art.* 230.

PROPOSITION XV.

Theorême.

243. SOIT *dans l'angle droit* CAD *une ligne courbe quelconque* AMB, *dont l'on ſçache mener la tangente* MT ; *& ſoit dans l'angle* DAH *qui eſt à côté de celui-ci, une autre ligne courbe* HFE, *telle qu'ayant mené d'un de ſes points quelconques* F *la ligne* FM *parallele à* AC, *qui rencontre en* K *la ligne* AD, *& en* M *la premiere courbe* AMB, *& ayant tiré la tangente* MT, *qui rencontre* AC *au point* T : *on ait toûjours comme* AK *eſt à* MT *ainſi une ligne conſtante* a *qui demeure toûjours la même en quelque endroit que tombe le point* F, *eſt à* KF. *Je dis que ſi par un point quelconque* D *de la ligne* AD *l'on mene une ligne droite* EB *parallele à* AC *& terminée par les deux courbes ; l'eſpace* ADEFH *ſera égal au rectangle de la courbe* AMB *par la conſtante* a. FIG. 127.

Il faut prouver que ADEFH = AMB × a.

Ayant ſuppoſé par tout où l'on voudra ſur la courbe AMB l'arc MN infiniment petit, & mené les droites MF, NG, paralleles à AC ; & qui rencontre la droite AD aux points K, L, & la courbe HFE aux points F, G, on tirera les droites FS, MR, paralleles à AD, & on prolongera RM juſqu'à ce qu'elle rencontre AC en P. Cela poſé, les deux triangles rectangles ſemblables MPT, MRN, donnent $MR.\ MN :: MP$ ou $AK.\ MT :: a.\ KF$. Et partant $KF \times MR$, c'eſt à dire ;

le petit rectangle $FKLS = MN \times a$. Or comme cela arrive toûjours en quelque endroit de la Courbe AMB qu'on prenne le petit arc MN, il s'enſuit que la ſomme de tous les petits rectangles $KLSF$, * c'eſt à dire, l'eſpace $ADEFH$ ſera égal à la ſomme de tous les petits rectangles $MN \times a$, c'eſt à dire, au rectangle de la courbe AMB par la conſtante a. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* *Art.* 184.

COROLLAIRE I.

244. DE-LA il eſt évident que le rectangle de la portion AM par la conſtante a, eſt egal à l'eſpace $AKFH$; & de même que le rectangle de la portion MB par la même ligne a, eſt égal à l'eſpace $KDEF$.

COROLLAIRE II.

245. SI l'on ſuppoſe que la Courbe AMB ſoit la ſeconde Parabole cubique, qui ait pour équation $y^3 = axx$ ($AP = x$, $PM = y$); on aura * $PT = \frac{3}{2}x$; & à cauſe du triangle rectangle MPT, l'hypothenuſe $MT = \sqrt{yy + \frac{9}{4}xx}$. Mais par la proprieté de la Courbe HFE, il faut que $MP\ (y).\ MT\ (\sqrt{yy + \frac{9}{4}xx}) :: a.\ KF$. Ce qui donne $\overline{KF}^2 = \frac{9}{4}aa + \frac{9aaxx}{4yy} = aa + \frac{9}{4}ay$, en mettant pour axx ſa valeur y^3. D'où l'on voit que la Courbe HFE eſt dans ce cas une Parabole, qui a pour axe la ligne AD, dont l'origine eſt au point O, pris de l'autre côté du point D par rapport au point A, en ſorte que $AO = \frac{9}{4}a$, & dont le parametre $= \frac{9}{4}a$: car par la proprieté de cette Parabole * le quarre de l'ordonnée KF ſera égal au rectangle de KO par le parametre $\frac{9}{4}a$, c'eſt à dire en termes analytiques, $\overline{KF}^2 = aa + \frac{9}{4}ay$. Or comme les Trapeſes paraboliques $ADEH$, $AKFH$, ſont * quarrables, il s'enſuit qu'on a la rectification tant de la Courbe AMB, que d'une

* *Art.* 233.

* *Art.* 29.

* *Art.* 239.

de ſes portions quelconques AM.

Si l'on veut exprimer au juſte la valeur de la portion AM, on remarquera que AH eſt $= a$; puiſque $\overline{AH}^2 = AO \times \frac{2}{3}a = \frac{2}{3}aa$. Ainſi ayant nommé la tangente MT, t ; la ligne AK ou MP, y ; on aura $KF = \frac{at}{y}$, & le Trapeſe parabolique $FAKH$ ou $\overset{*}{=} \frac{2}{3}FK \times KO - \frac{2}{3}HA \times AO$ $\overset{*}{=}$ Art. 239. $= \frac{2}{3}at + \frac{8aat}{27y} - \frac{8}{27}aa = AM \times a$. C'eſt à dire, en diviſant par a, que la portion cherchée $AM = \frac{2}{3}t + \frac{8at}{27y} - \frac{8}{27}a$. Ce qui donne cette conſtruction.

Ayant mené du point donné M ſur la ſeconde Parabole cubique AMB, la tangente MT qui rencontre en Q la ligne AK menée par l'origine A de l'axe AC perpendiculairement à cet axe, on prendra ſur cette ligne la partie $AV = \frac{8}{27}a$; & ayant tiré VC parallele à MT qui rencontre l'axe en C, on décrira du centre V & du rayon VA un arc de cercle qui coupe VC en X. Je dis que la portion AM de la ſeconde Parabole cubique AMB ſera égale à la ſomme des deux droites MQ, CX.

Car à cauſe des triangles ſemblables TPM, TAQ, il eſt clair que $MQ = \frac{2}{3}MT$ (t), puiſque $AP = \frac{2}{3}PT$; & à cauſe des triangles ſemblables MPT, VAC, il vient MP (y). MT $(t) :: AV$ $(\frac{8}{27}a)$. $VC = \frac{8at}{27y}$, & partant $CX = \frac{8at}{27y} - \frac{8}{27}a$. Donc &c.

PROPOSITION XVI.

Théorême.

246. SOIT *une Hyperbole équilatere* EAF, *qui ait pour centre le point* C, *& pour la moitié de ſon premier axe la* FIG. 128.

droite CA ; *avec une Parabole* NCS *qui ait pour axe la ligne* AC *prolongée du côté de* C *qui en ſera l'origine, & pour parametre de l'axe une ligne double de* CA. *Si l'on mene par un point quelconque* N *de la Parabole* NCS, *une parallele* NE *à* CA, *qui rencontre l'Hyperbole* EAF *au point* E, *& ſon ſecond axe* CL *au point* L ; *je dis que l'eſpace hyperbolique* CLEA *renfermé entre les droites* AC, CL, LE, *& la portion* EA *de l'Hyperbole, eſt égal au rectangle de la portion* CN *de la Parabole par la droite* AC.

Ayant mené par un point quelconque *M* de la portion *CN* de la Parabole, une perpendiculaire *MG* à la tangente *MT* qui paſſe par ce point, terminées l'une & l'autre par l'axe aux points *G*, *T*, & une parallele *MB* à *CA*, qui rencontre l'Hyperbole en *B*, & ſon ſecond axe *CL* en *H* : les lignes *MG*, *HB*, ſeront égales entr'elles. Car menant l'ordonnée *MP* à l'axe on aura * $PG = CA$; & à cauſe du triangle rectangle *MPG*, le quarré $\overline{MG}^2 = \overline{PM}^2 + \overline{PG}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{CA}^2$ $= * \overline{HB}^2$, à cauſe de l'Hyperbole équilatére *EAF* ; & partant $MG = HB$. Or les triangles rectangles ſemblables *TPM*, *MPG*, donnent *MP* ou *CH*. *MT* :: *PG* ou *CA*. *MG* ou *HB*. Donc * &c.

* *Art.* 24.

† *Art.* 127.

* *Art.* 143.

COROLLAIRE I.

247. DE-LA il eſt évident que le Trapeſe hyperbolique *HLEB* eſt égal au rectangle de la portion de Parabole *MN* par la moitié *CA* du parametre de ſon axe.

COROLLAIRE II.

248. SI l'on mene dans l'Hyperbole équilatére *EAF* deux paralleles quelconques *BD*, *EF* ; & qu'on tire par leurs extremités des lignes droites *BM*, *EN*, *DR*, *FS*, paralleles à *AC*, leſquelles rencontrent le ſecond axe de l'Hyperbole aux points *H*, *L*, *K*, *O* ; la difference des rectangles *AC* × *MN*, *AC* × *RS*, ſera

égale (en tirant les droites BE, DF,) à la difference des Trapeſes rectilignes $HLEB$, $KOFD$.

Car le rectangle $AC \times MN$ eſt égal * au Trapeſe hyperbolique $HLEB$; & par conſequent le rectangle $AC \times MN$ plus le ſegment hyperbolique BE ſera égal au Trapeſe rectiligne $HLEB$: de même le rectangle $AC \times RS$ plus le ſegment hyperbolique DF ſera égal au Trapeſe rectiligne $KOFD$. Donc puiſque les deux ſegmens hyperboliques EB, DF, ſont * égaux entr'eux, la difference des rectangles $AC \times MN$, $AC \times RS$, ſera égale à la difference des Trapeſes rectilignes $HLEB$, $KOFD$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* *Art.* 247.

* *Art.* 204.

COROLLAIRE III.

249. LES mêmes choſes étant poſées que dans le Corollaire précédent ; ſi l'on fait $2AC. LH :: BH + LE. m.$ il eſt clair que le rectangle $AC \times m = \frac{1}{2}LH \times \overline{BH + LE}$, c'eſt à dire, égal au Trapeſe rectiligne $HLEB$. De même ſi l'on fait $2AC. KO :: KD + FO. n.$ il eſt clair que $AC \times n$ eſt égal au Trapeſe rectiligne $KOFD$. Par conſéquent * la difference des rectangles $AC \times MN$, $AC \times RS$, ſera égale à la difference des rectangles $AC \times m$, $AC \times n$; c'eſt à dire, en diviſant par AC, que la difference des arcs paraboliques MN, RS, ſera égale à la difference des droites m, n. D'où l'on voit qu'on peut trouver des lignes droites égales à la difference d'une infinité d'arcs Paraboliques tels que MN, RS.

* *Art.* 248.

LIVRE SIXIE'ME.

Des Sections Coniques conſiderées dans le Solide.

CHAPITRE PREMIER.

Des trois Sections Coniques en général.

DE'FINITIONS.

1.

FIG. 129. SI par un point fixe *S* élevé au deſſus du plan d'un cercle *VXY*, on fait mouvoir une ligne droite *SZ* indéfiniment prolongée de part & d'autre du point *S*, autour de la circonference du cercle, en ſorte qu'elle faſſe un tour entier ; les deux ſurfaces convexes produites par la ligne droite indéfinie *SZ* dans ce mouvement, ſont appellées chacune ſeparément *Surface Conique*, & toutes deux enſemble *Surfaces Coniques oppoſées.*

2.

Le point fixe *S* qui eſt commun à l'une & à l'autre Surface Conique, eſt nommé *Sammet.*

3.

Le Cercle *VXY*, *Baſe.*

4.

Le Solide compris par la baſe *VXY*, & par la portion de la Surface Conique que cette baſe coupe depuis le Sommet *S*, eſt appellé *Cone.*

5.

La ligne *SX* menée du Sommet *S* à un point quelconque *X* de ſa baſe, en eſt un des *Côtés.*

6.

La ligne *SO* menée du Sommet *S* du Cone par le centre *O* de la baſe, en eſt l'*Axe.*

7.

On dit qu'un Cone eſt *droit*, lorſque ſon axe eſt per-

pendiculaire ſur le plan de ſa baſe ; & au contraire qu'il eſt *ſcalene*, lorſque ſon axe eſt oblique ſur ce plan.

8.

Si l'on coupe une Surface Conique par un plan *FAG* qui ne paſſe point par le Sommet *S*, & qui ne ſoit point parallele au plan de la baſe *VXY* ; la ligne courbe *FAG* formée par la rencontre de ce plan avec la Surface Conique, eſt appellée *Section Conique.* FIG. 130. 131. 132.

9.

Si l'on mene par le Sommet *S* d'un Cone, un plan *SDE* parallele au plan d'une Section Conique ; la droite indéfinie *DE* formée par la rencontre de ce plan avec celui de la baſe du Cone, s'appellera *Directrice.*

10.

Une Section Conique *FAG* eſt appellée *Parabole*, lorſque la Directrice *DE* touche le cercle qui eſt la baſe du Cone : *Ellipſe*, lorſquelle tombe toute entiere au dehors : & *Hyperbole*, lorſqu'elle le traverſe.

Mais dans ce dernier cas, ſi l'on prolonge le plan de la Section, il eſt viſible qu'il rencontrera la Surface Conique oppoſée ; la ligne courbe *KMH* formée par cette rencontre, ſera nommée *Hyperbole oppoſée* a la premiére *FAG* ; & les deux enſemble, *Hyperboles* ou *Sections oppoſées.* FIG. 132.

11.

Si dans le plan d'une Section Conique il y a une ligne droite qui ne la rencontre qu'en un ſeul point, & qui étant prolongée indéfiniment de part & d'autre n'entre point dedans, mais tombe toute entiere au dehors ; cette ligne ſera nommée *Tangente*, & le point où elle rencontre la Section, point d'*Attouchement.* FIG. 130. 131. 132.

COROLLAIRE I.

250. DANS la Parabole tous les côtés du Cone étant prolongés indéfiniment rencontreront néceſſairement ſon plan, excepté le ſeul côté *SD* tiré du Sommet *S* FIG. 130.

par le point *D* où la Directrice *DE* touche la baſe ; puiſqu'il n'y a que ce côté qui ſoit dans le plan *SDE* parallele à celui de la Section, & que tous les autres le coupent dans le point *S*. D'où il eſt clair que la Parabole s'étend à l'infini, & ne rentre point en elle-même.

COROLLAIRE II.

FIG. 131. 251. DANS l'Ellipſe tous les côtés du Cone étant prolongés, s'il eſt néceſſaire, rencontrent ſon plan ; puiſque le plan *SDE* qui lui eſt parallele, eſt rencontré par tous dans le point *S*. D'où l'on voit qu'elle renferme un eſpace en rentrant en elle-même.

COROLLAIRE III.

FIG. 123. 252. DANS les Hyperboles oppoſées tous les côtés du Cone excepté les deux *SD*, *SE*, tirés du Sommet *S* aux points *D*, *E*, où la Directrice coupe la baſe, étant prolongés indéfiniment de part & d'autre du Sommet *S*, rencontrent néceſſairement leur plan ; puiſqu'il n'y a que ces deux côtés qui tombent dans le plan *SDE* parallele au plan de ces deux Hyperboles, & que tous les autres le coupent dans le point *S*. Les côtés de la portion *SDVE* forment les points de l'Hyperbole *FAG*, & ceux de la portion *SDYE* étant prolongés de l'autre côté du Sommet *S*, forment les points de ſon oppoſée *KMH*. D'où l'on voit que les Hyperboles oppoſées s'étendent chacun à l'infini, & ne rentrent point en elles-mêmes, non plus que la Parabole.

PROPOSITION I.

Theorême.

FIG. 132. 253. SI *l'on coupe deux ſurfaces Coniques oppoſées, par un plan* Sam *qui paſſant par leur Sommet* S, *entre au dedans* ; je

je dis qu'il formera par ſa rencontre avec ces deux Surfaces, deux lignes droites S a, S m, *indéfiniment prolongées de part & d'autre du point* S.

Car ſoit *a m* la commune Section du plan coupant, & du plan de la baſe : il eſt clair qu'elle rencontrera cette baſe en deux points *a*, *m* ; puiſque par la ſuppoſition le plan *S a m* entre au dedans de la ſurface Conique. Or ſi l'on mene les côtés *S a*, *S m*, indefiniment prolongés de part & d'autre du ſommet *S* ; il eſt évident par la génération des Surfaces Coniques oppoſées que ces côtés ſeront les deux communes Sections de ces deux Surfaces, avec le plant coupant *S a m*. *C'eſt ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

254. COMME la partie de la ligne *a m* qui joint les deux points *a*, *m*, de la circonference, tombe au dedans de la baſe, & que tout le reſte de cette ligne tombe au dehors ; il s'enſuit que ſi l'on conçoit que le plan *S a m* ſoit indéfiniment étendu tout autour du Sommet *S*, la partie de ce plan qui ſera renfermé dans l'angle *a S m*, & dans ſon oppoſé au Sommet, tombera au dedans des deux Surfaces Coniques oppoſées, & que tout le reſte de ce plan tombera entre ou (ce qui eſt la même choſe) au dehors de ces deux Surfaces.

COROLLAIRE II.

255. DE-LA il ſuit que ſi l'on joint deux points quelconques *A*, *M*, d'une Section Conique par une ligne droite, elle ſera renfermée au dedans de la Section ; & qu'étant prolongée indéfiniment de part & d'autre, elle tombera toute entiere au dehors. Car menant du Sommet *S* par les points *A*, *M*, les côtés *S a*, *S m*, & faiſant paſſer un plan par ces côtés ; il eſt clair que la ligne *A M* tombe dans la partie de ce plan qui eſt renfermée dans l'angle *a S m*, & que tout le reſte FIG. 130.

de cette ligne ſe trouve dans la partie de ce plan qui tombe dans les angles à côté.

COROLLAIRE III.

256. SI l'on mene par le Sommet *S* du cone une ligne parallelle à une ligne *AM* terminée par une Section Conique ; il eſt clair par le Corollaire précédent que cette ligne *SH*, tombera dans l'un des angles à côté de l'angle *aSm*, c'eſt à dire au dehors de la ſurface Conique ; & qu'ainſi elle ira rencontrer le plan de la baſe en quelque point hors la circonference du cercle, ou bien qu'elle lui ſera parallele.

COROLLAIRE IV.

FIG. 132. 257. IL ſuit encore du Corollaire premier que ſi l'on joint deux points quelconques *A*, *M*, de deux Hyperboles oppoſées par une ligne droite, elle ſera renfermée entre ces Hyperboles ; & qu'étant indéfiniment prolongée de part & d'autre, elle entrera au dedans. Car menant par le Sommet *S* les côtés *Sa*, *Sm*, qui paſſent par les points *A*, *M*, & faiſant paſſer par ces côtés un plan indéfiniment étendu tout autour du point *S* ; il eſt clair que la partie de ce plan qui eſt renfermée dans l'angle *ASM* où tombe la ligne *AM*, eſt compriſe entre ces deux Surfaces, & que la partie du même plan qui eſt renfermée entre les deux angles à côté où ſe trouvent les prolongemens de la ligne *AM*, tombent au dedans de ces deux Surfaces. Or comme la ligne *AM* eſt la commune Section du plan *Sam* avec celui des deux Hyperboles oppoſées, il s'enſuit &c.

COROLLAIRE. V.

258. IL ſuit auſſi des Corollaires deuxiéme & quatriéme, qu'une ligne droite ne peut rencontrer une

Section Conique, ou les deux Hyperboles oppoſées, au plus qu'en deux points.

PROPOSITION II.

Theorême.

259. SI *l'on coupe l'une ou l'autre des deux Surfaces Coniques oppoſées, par un plan* o v x y *parallele à la baſe* O V X Y *; je dis que la Section qu'il forme par ſa rencontre avec la Surface Conique, eſt un cercle qui a pour centre le point* o, *où ce plan rencontre l'axe* S O, *prolongé de l'autre côté du Sommet* S, *lorſqu'il eſt neceſſaire.* FIG. 129.

Car ſi l'on mene par un point quelconque *X* de la baſe au centre *O* le rayon *XO*, & au Sommet *S* le côté *XS* qui rencontre le plan *ovxy* au point *x*: les lignes *OX*, *ox*, ſeront paralleles entr'elles; puiſqu'elles ſont les communes Sections de deux plans paralleles *OVXY*, *ovxy*, par le même plan *SOX* prolongé, s'il eſt neceſſaire de l'autre côté du Sommet *S*. Les triangles *OSX*, *oSx*, ſeront donc ſemblables; & par conſéquent on aura toûjours *SO. OX :: So. ox*. Or les premiers termes de cette proportion étant par tout les mêmes, le quatriéme *ox* ne changera point de grandeur en quelque endroit que tombe le point *x*. D'où l'on voit que la ligne courbe *vxy* eſt la circonférence d'un cercle qui a pour centre le point *o*.

COROLLAIRE.

260. IL ſuit de-là qu'on peut placer la baſe d'un cone en tel endroit qu'on veut, ſelon qu'il eſt plus commode. C'eſt pourquoi lorſque la Section eſt une Parabole ou une Hyperbole, on la place ordinairement en ſorte qu'elle coupe la Section; mais lorſque c'eſt une Ellipſe on la place tantôt de maniére qu'elle la coupe, & tantôt de maniére qu'elle tombe audeſſous.

PROPOSITION III.

Theorême.

FIG. 130. 261. SI *dans le plan d'une Parabole* FAG, *l'on tire par un de ſes points quelconques* A *vers le dedans du cone, une ligne droite indéfinie* AB *parallelle au côté* SD *qui paſſe par le point où la Directrice* DE *touche la baſe ; je dis que cette ligne* AB *tombe toute entiere au dedans de la Section, & qu'elle ne la rencontrera jamais quoique prolongée à l'infini du côté de* B.

Car ayant mené par le Sommet *S* du cone, & par la ligne *AB* un plan *SAB*, il formera par ſa rencontre avec la Surface Conique deux côtés, dont l'un ſera toûjours la ligne *SD*, puiſque *AB* lui eſt parallele ; & l'autre la ligne *Sa* qui paſſe par le point *A*. Or le plan *DSa* renfermé entre les côtés *SD*, *Sa*, prolongés à l'infini du côté de *D* & *a*, tombe * au dedans de la Surface Conique. Par conſéquent la ligne *AB* qui eſt toûjours dans ce plan, étant parallele au côté *SD*, tombera toute entiere au dedans de la Parabole, & ne la rencontrera jamais quoique prolongée à l'infini vers *B*.

* *Art.* 254.

PROPOSITION IV.

Theorême.

FIG. 130. 262. SI *dans le plan d'une Parabole* FAG, *l'on tire par un de ſes points quelconques* A *vers le dedans du cone, une ligne droite* AM *qui ne ſoit point parallele au côté* SD, *qui paſſe par le point* D *où la Directrice* DE *touche la baſe : je dis que cette ligne étant prolongée autant qu'il ſera neceſſaire, rencontrera la Parabole en quelque autre point* M.

Car ſi l'on fait paſſer par le Sommet *S* du cone & par cette ligne un plan *SAM*, il eſt clair qu'il entre au dedans de la Surface Conique, & qu'il ne paſſe point par

le côté SD; d'où il ſuit que ce plan forme ſur la Surface Conique * deux côtés Sa, Sm; dont l'un Sa paſſe par le point A; & l'autre Sm n'eſt point parallele au plan de la Section, puiſqu'il n'y a *(hyp.)* que le ſeul côté SD qui lui ſoit parallele. Par conſéquent le côté Sm étant prolongé (s'il eſt neceſſaire) rencontrera le plan de la Parabole en un point M, par où paſſe la ligne AM qui eſt formée par la rencontre du plan aSm avec celui de la Parabole. Or il eſt viſible que ce point M eſt un des points de la Parabole FAG; puiſqu'il ſe trouve en même temps dans le plan de la Section, & ſur la Surface Conique. Donc &c.

* *Art.* 253.

PROPOSITION V.

Problême.

263. MENER *d'un point donné* A *ſur une Section Conique, une Tangente* AF. FIG. 133. 134. 135.

Ayant mené par le point A & par le Sommet S du cone, une ligne droite SA qui rencontre le plan de la baſe au point a, on tirera à cette baſe par le point a; la Tangente Eaf; & la ligne AF formée par la rencontre du plan $SEaf$ (prolongé, s'il eſt néceſſaire, au delà du Sommet S) avec le plan de la Section, ſera la Tangente qu'on cherche.

Car puiſque la Tangente Eaf tombe toute entiere au dehors de la baſe excepté le ſeul point a, il s'enſuit que le plan $SEaf$ prolongé indéfiniment de part & d'autre du Sommet S ne rencontre les Surfaces Coniques oppoſées que dans la ligne Sa auſſi prolongée indéfiniment de part & d'autre du Sommet S, & que tout le reſte de ce plan tombe au dehors de ces Surfaces. Par conſéquent la ligne AF formée par la rencontre de ce plan avec celui de la Section, ne peut avoir de commun avec l'un ou l'autre de ces deux ſurfaces que le ſeul point A où la ligne Sa rencontre le plan de la

Section, & tombe toute entiere au dehors excepté ce point. Donc &c.

COROLLAIRE I.

264. COMME l'on ne peut faire paſſer par le point a de la baſe du cone, qu'une ſeule Tangente Eaf; il s'enſuit auſſi que d'un point donné A ſur une Section Conique, on ne peut mener qu'une ſeule tangente AF.

COROLLAIRE II.

265. DE-LA on tire la maniere de mener une Tangente AF parallele à une ligne droite MN donnée de poſition ſur le plan d'une Section Conique ou de deux Sections oppoſees. Car ayant mené par le Sommet S du cone, une parallele SE à MN, elle rencontrera la Directrice DE en un point E, ou bien elle lui ſera parallele; puiſque cette ligne SE ſera parallele au plan de la Section, & tombera par conſequent dans le plan SDE. Si elle la rencontre en un point E qui tombe au dehors du cercle qui eſt la baſe du Cone: ayant mené du point E à ce cercle, la Tangente Eaf, il eſt clair que le plan $SEaf$ formera par ſa rencontre avec le plan de la Section, une Tangente AF qui ſera parallele à la ligne MN; puiſque les deux Sections AF, SE, des plans * paralleles $MNASED$, coupés par le plan touchant $SEaf$, ſont paralleles entr'elles auſſi bien que * SE, MN.

* *Hyp.*

COROLLAIRE III.

266. LES mêmes choſes étant poſées que dans le Corollaire précédent.

FIG. 135. 1°. Dans la Parabole le Problême eſt impoſſible, lorſque la ligne MN donnée de poſition, devient parallele au côté SD qui paſſe par le point D où la Directrice DE touche la baſe; car alors le point E tombant en D, on ne pourra mener par ce point d'autre

Tangente que la Directrice DE : & comme le plan qui passe par le Sommet & par la Directrice DE est * parallele au plan de la Parabole, il ne pourra former par sa rencontre avec ce plan aucune Tangente. Mais lorsque la ligne donnée de position, n'est point parallele au côté SD, on pourra toûjours mener une Tangente AF parallele à cette ligne, & jamais davantage ; car alors le point E tombant au dehors du cercle qui est la base du cone, on en pourra toûjours mener Eaf, EDL à cette base ; dont l'une EDL se confondant avec la Directrice, ne peut servir à trouver aucune Tangente dans le plan de la Section ; & l'autre Eaf étant differente de la Directrice, servira toûjours à trouver par la rencontre du plan $SEaf$ avec le plan de la Parabole, une Tangente AF qui satisfera. Il en est de même lorsque la ligne SE est parallele à la Directrice, car la Tangente Eaf deviendra alors parallele à la Directrice ; & comme on n'en peut mener qu'une seule qui lui soit parallele, puisque la Directrice touche elle-même la base en un point D, il s'ensuit &c.

* *Def.* 9.

2°. Dans l'Ellipse on pourra toûjours mener deux Tangentes AF, BG, paralleles à la ligne MN donnée de position ; & par conséquent entr'elles. Car tous les points de la Directrice DE tombant au dehors de la base, on pourra toûjours mener du point E deux Tangentes Eaf, Ebg, à cette base qui ne se confondront point avec la Directrice, & qui serviront à former par la rencontre des plans $SEaf$, $SEbg$, avec le plan de la Section, deux Tangentes AF, BG, qui satisferont. Il en est de même lorsque la ligne SE est parallele à la Directrice ; car au lieu des Tangentes Eaf, Ebg, qui partent d'un point E de cette Directrice, il n'y auroit qu'à lui mener deux Tangentes paralleles ; ce qui est toûjours possible. FIG. 134.

3°. Dans les Hyperboles opposées le Problême est impossible, lorsque le point E tombe au dedans du cercle qui est la base du cone ; puisqu'on ne peut mener FIG. 135.

alors aucune Tangente de ce point à la baſe. Mais lorſqu'il tombe au dehors, on pourra toûjours trouver deux Tangentes AF, BG, paralleles à la ligne MN donnée de poſition ; car la Directrice DE traverſant la baſe, on pourra toûjours mener du point E deux Tangentes Eaf, Ebg, à cette baſe, leſquelles tombent de part & d'autre de la Directrice, & qui ſerviront à former par la rencontre des plans $SEaf$, $SEbg$, avec le plan de la Section, deux Tangentes AF, BG, qui ſatisferont. Il en eſt de même lorſque la ligne SE eſt parallele à la Directrice DE ; car au lieu des deux Tangentes Eaf, Ebg, il n'y aura qu'à mener deux Tangentes paralleles à la Directrice ; ce qui eſt toûjours poſſible.

Il eſt à remarquer dans ce dernier cas, que les Tangentes paralleles AF, BG, appartiennent toûjours aux Hyperboles oppoſées, & jamais à la même ; ce qui eſt évident, puiſque les deux Tangentes Eaf, Ebg, de la baſe, tombent néceſſairement de part & d'autre de la Directrice DE.

COROLLAIRE IV.

267. IL ſuit du Corollaire précédent :

1°. Que dans une Parabole ou Hyperbole, il ne peut y avoir deux Tangentes qui ſoient paralleles entr'elles ; & qu'au contraire dans l'Ellipſe & dans les Hyperboles oppoſées, une Tangente AF, étant donnée de poſition, on en peut toûjours mener une autre BG qui lui ſoit parallele.

2°. Que ſi la ligne MN donnée de poſition, eſt terminée par une Section Conique, on pourra toûjours mener dans la Parabole, une Tangente AF qui lui ſoit parallele, & dans l'Ellipſe ou les Hyperboles oppoſées deux Tangentes AF, BG ; puiſque la ligne SE menée par le Sommet S parallelement à MN rencontrera* le plan de la baſe en un point E hors la circonference, ou bien lui ſera parallele.

*Art. 256.

DEF.

DÉFINITIONS.

12.

Dans une Parabole, ſi l'on mene par un de ſes points quelconques A vers le dedans une ligne AB parallele au côté SD qui paſſe par le point D où la Directrice DE touche la baſe : cette ligne AB ſera nommée *Diametre*, & le point A en ſera *l'origine*. FIG. 133.

13.

Dans l'Ellipſe ou les Hyperboles oppoſées, toute ligne droite AB, qui joint les points d'attouchement de deux tangentes paralleles AF, BG, eſt appellée *Diametre*; & les points, A, B, en ſont les extrêmités. FIG. 134. 135.

14.

Si par un point quelconque P de tel Diametre AB qu'on voudra d'une Section Conique, l'on tire une ligne droite MN qui rencontre la Section aux points M, N, & qui ſoit parallele à la tangente AF qui paſſe par l'origine A de ce Diametre dans la Parabole, & par l'une ou l'autre de ſes extrêmités dans les autres Sections : on dira que cette ligne MN eſt *Ordonnée* de part & d'autre au Diametre AB, & que chacune de ſes parties PM, ou PN, eſt *Ordonnée* à ce Diametre. FIG. 133. 134. 135.

15.

Lorſqu'un Diametre fait avec ſes Ordonnées des angles droits, on l'appelle *Axe*.

COROLLAIRE.

268. IL ſuit de la Définition douziéme :

1°. Que tous les Diametres d'une Parabole ſont paralleles entr'eux, puiſqu'ils ſont tous paralleles au même côté du cone SD qui paſſe par le point D où la Directrice DE touche la baſe.

2°. Que par un point donné ſur le plan d'une Parabole, on ne peut mener qu'un ſeul Diametre, puiſqu'on ne peut mener par ce point qu'une ſeule parallele au côté SD.

PROPOSITION VI.

Problême.

FIG. 136. 137. 138. **269.** UN *diametre* AB *d'une Section Conique étant donné, avec une de ſes ordonnées* PM ; *décrire la Section.*

Ayant fait paſſer par l'ordonnée PM un plan quelconque autre que le plan APM, on menera dans ce plan par le point P une perpendiculaire indéfinie Pa à PM; & on décrira d'un point quelconque C de cette ligne, & du rayon CM un cercle. Cela fait,

FIG. 136. 1°. Lorſque la Section doit être une Parabole. On menera de l'un des points a, D, où le cercle coupe la perpendiculaire Pa (par exemple du point a) par l'origine A du diametre AB, la ligne aA qui rencontre en S, une ligne DS tirée de l'autre point D parallelement à AB. On décrira enſuite une ſurface Conique qui ait pour ſommet le point S, & pour baſe le cercle $DMaN$. Je dis qu'elle formera par ſa rencontre avec le plan APM, la Parabole cherchée MAN. Car ayant mené par les extremités du diametre Da les paralleles DE, af, à PM ; il eſt clair qu'elles ſeront tangentes, puiſque* PM eſt perpendiculaire ſur Da. Or le plan SDE qui paſſe par le ſommet S du cone & par la tangente DE, eſt parallele au plan APM, puiſque* SD eſt parallele à AP, & DE à PM, d'où il ſuit* que la Section MAN faite par le plan APM dans la ſurface Conique, ſera une Parabole qui aura pour diametre la ligne AB. De plus le plan touchant Saf forme dans le plan APM* une tangente AF, qui ſera paralle à PM ; puiſqu'elle eſt la commune Section des deux plans Saf, APM, qui paſſent par les paralleles af, PM ; & par conſéquent* la ligne PM ſera ordonnée au diametre AB.

* *Hyp.*
* *Hyp.*
* *Def.* 10. & 12.
* *Art.* 263.
* *Def.* 14.

FIG. 137. 138. 2°. Lorſque la Section Conique doit être une Ellipſe ou une Hyperbole. On menera des points a, b, où la perpendiculaire indéfinie Pa coupe le cercle, par les ex-

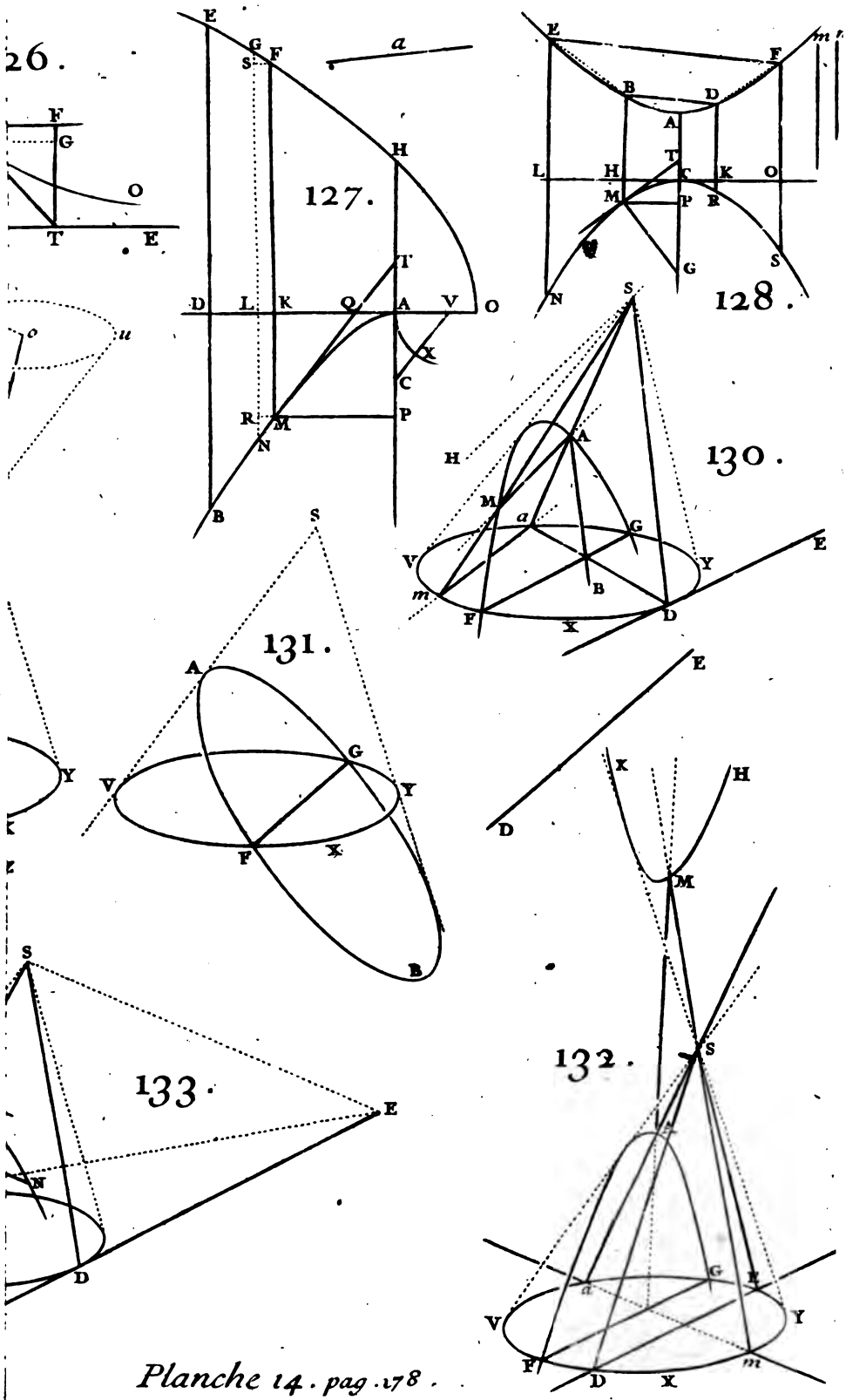


Planche 14. pag. 178.

trémités A, B, du diametre AB, les droites aA, bB, qui se rencontrent au point S. On décrira ensuite un cone qui ait pour sommet le point S, & pour base le cercle $aMbN$. Je dis que le plan APM formera dans la surface de ce cone la Section MAN qu'on demande. Car menant SD parallele au diametre AB de la Section, & qui rencontre en D le diametre ab de la base, par où & par les extremités a, b, soient tirées les paralleles, DE, af, bg, à PM; il est clair que le plan SDE sera parallele au plan APM, & qu'ainsi DE * sera la Directrice. Or dans l'Ellipse le point D tombe sur le diametre ab prolongé hors le cercle; puisque le diametre AB de la Section, tombe dans l'angle aSb fait par les côtés du cone Sa, Sb: & au contraire dans l'Hyperbole le point D tombe au dedans du cercle; puisqu'alors le diametre AB tombe dans l'angle aSB qui est à côté de l'angle aSb. D'où il suit selon la Définition 10. que la Section MAN est une Ellipse dans le premier cas, & une Hyperbole dans le second. De plus la tangente AF qui passe par l'extremité A du diametre AB, étant la commune Section du plan touchant Saf & du plan coupant APM, qui passent par les paralleles af, PM, sera parallele à PM: & de même la tangente BG étant la commune Section du plan touchant Sbg & du plant coupant APM, lesquels passent par les deux paralleles bg, PM, sera aussi parallele à PM. D'où l'on voit que la ligne AB est * un diametre qui a pour ordonnée PM.

* Def. 9.

* Def. 13. & 14.

Il peut arriver dans l'Ellipse que les lignes Aa, Bb, soient paralleles entr'elles, mais alors il n'y aura qu'à prendre pour le centre C du cercle $aMbN$, tel autre point qu'on voudra de la ligne Ab.

DEFINITION.

16.

Si par les deux points D, E, où la Directrice coupe la base, lorsque la Section est une Hyperbole, on tire FIG. 139.

deux Tangentes DH, EK; & que par le Sommet S & ces Tangentes, on faſſe paſſer deux plans SDH, SEK: les deux lignes droites indéfinies CH, CK, que ces deux plans forment par leurs rencontres avec le plan des Hyperboles, ſont appellées *Aſymptotes*.

COROLLAIRE.

270. SI par un point d'attouchement D, l'on mene le côté DS prolongé indéfiniment de part & d'autre du Sommet S: il eſt viſible que le plan SDH ne peut avoir de commun avec les deux ſurfaces Coniques oppoſées que ce côté; puiſque tous les points de la Tangente DH tombent hors la circonference de la baſe, excepté le ſeul point D. Or le plan SDE qui paſſe par le Sommet S & par la Directrice DE, étant * parallele au plan des Hyperboles oppoſées, les communes Sections SD, CH, de ces deux plans avec le même plan SDH ſeront paralleles entr'elles; c'eſt pourquoi l'Aſymptote CH tombera toute entiere au dehors & entre les deux ſurfaces Coniques oppoſées, & laiſſera par conſéquent les Hyperboles oppoſées toutes entieres de part & d'autre ſans les rencontrer. On prouvera la même choſe de l'autre Aſymptote CK. Or comme les deux Aſymptotes CH, CK, ſont formées par les plans SDH, SEK, qui tombent de part & d'autre de la même ſurface Conique & de ſon oppoſée; il s'enſuit que tous les points de l'Hyperbole FAG ſont compris dans l'angle HCK, & que tous les points de ſon oppoſée tombent dans l'angle qui lui eſt oppoſé au Sommet.

* *Def.* 9.

PROPOSITION VII.

Theorême.

Fig. 139. 271. SI *par un point quelconque* B *d'une Aſymptote* CK, *l'on mene une parallele* BA *à l'autre Aſymptote* CH, *je dis*

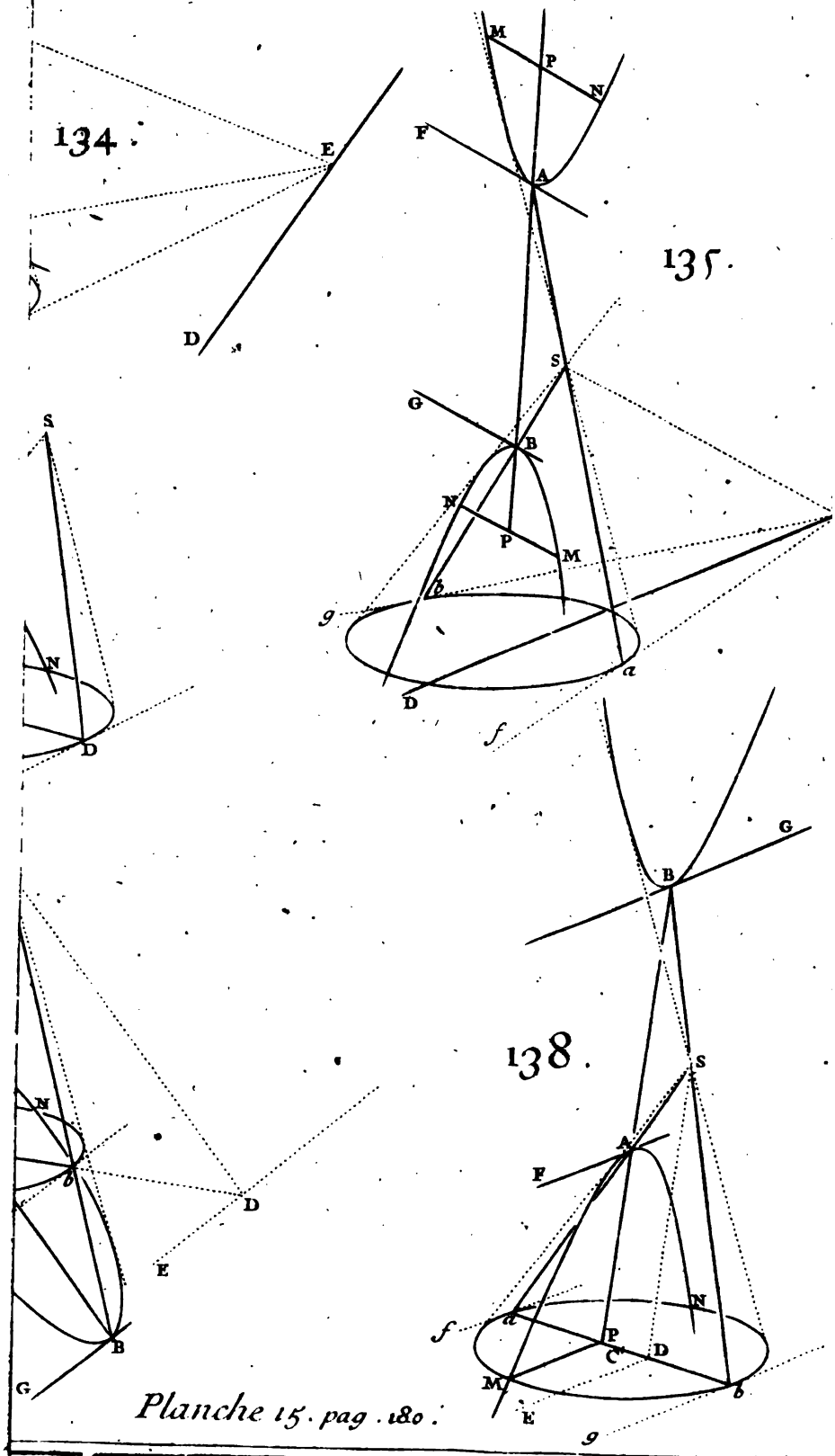


Planche 15. pag. 180.

qu'elle rencontrera l'une des Hyperboles oppoſées en un ſeul point A, *& qu'étant prolongée indéfiniment, elle tombera toute entiere au dedans.*

Puiſque les deux lignes BA, SD, ſont paralleles à la même ligne CH, elles le ſeront entr'elles; & ainſi elles ſe trouveront dans un même plan, lequel entrera au dedans des deux ſurfaces Coniques oppoſées, puiſqu'il paſſe par l'un de leurs côtés SD, & qu'il fait un angle avec le plan SDH qui la touche dans ce côté. Le plan des paralleles BA, SD, formera donc dans les deux ſurfaces Coniques, deux côtés, dont l'un eſt le côté SD, & l'autre le côté Sa, qui coupera néceſſairement la ligne BA en quelque point A, puiſqu'il eſt ſitué dans le plan qui paſſe par les paralleles SD, AB, & qu'il coupe SD en S. Donc puiſque le point A ſe trouve en même temps dans l'une des ſurfaces Coniques & dans le plan des Hyperboles, il appartiendra à l'une de ces Hyperboles, De plus puiſque la ligne BA étant prolongée indéfiniment du côté du point A, tombe toute entiere dans le plan DSa renfermé entre les côtez DS, Sa, lorſque le point A appartient à l'Hyperbole FAG, & dans ſon oppoſé au Sommet ASd lorſqu'il appartient à l'Hyperbole oppoſée; il eſt viſible qu'elle tombera toute entiere au dedans de l'une des deux ſurfaces Coniques, & par conſéquent auſſi au dedans de l'Hyperbole qui en eſt la Section. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

272. DE-LA on voit qu'entre une Hyperbole FAG & ſon Aſymptote CH, on ne ſçauroit faire paſſer aucune ligne parallele à cette Aſymptote. Or comme la ligne BA ſepare l'Hyperbole qu'elle rencontre en deux portions indéfinies, dont l'une tombe néceſſairement toute entiere dans l'eſpace compris entre les paralleles BA, CH; il s'enſuit que plus CB deviendra petite, plus le point A avancera dans cette portion, & cela toûjours de plus en plus juſqu'à ce que CB devienne

plus petite qu'aucune grandeur donnée. C'eſt à dire, qu'une Hyperbole & ſon Aſymptote étant l'une & l'autre continuée indéfiniment, elles s'approcheront toûjours de plus en plus, en ſorte que leur diſtance deviendra enfin moindre qu'aucune donnée, ſans pouvoir néanmoins * jamais ſe rencontrer.

* *Art.* 270.

PROPOSITION VIII.

Problême.

FIG. 140. 273. LES *Aſymptotes* CH, CK, *d'une Hyperbole* FAG *étant données avec un de ſes points quelconques* F, *décrire l'Hyperbole.*

Ayant mené par le point donné F, une ligne droite quelconque HK terminée par les aſymptotes, on fera paſſer par cette ligne un plan quelconque autre que le plan HCK, dans lequel on tirera par le point de milieu P de HK une perpendiculaire indéfinie MN à cette ligne; & on décrira d'un de ſes points quelconques O comme centre, & du rayon OF, un cercle FMN. On menera des points H, K, deux Tangentes HD, KE, à ce cercle; & par les points d'attouchemens D, E, deux paralleles DS, ES, aux Aſymptotes CH, CK, leſquelles ſe rencontreront en un point S; duquel comme Sommet, on décrira une ſurface Conique qui ait pour baſe le cercle FMN. Je dis que cette ſurface Conique formera par ſa rencontre avec le plan HCK, l'Hyperbole requiſe FAG.

Il eſt clair par la proprieté du cercle FMN; 1°. Que la corde FG eſt diviſée par le milieu au point P, par le diametre MN qui lui eſt * perpendiculaire; & partant, puiſque par la conſtruction $PH = PK$, il s'enſuit que $FH = GK$, $GH = FK$; & par conſéquent $GH * HF = FK * KG$. 2°. Que $GH * HF = \overline{HD}^2$, & $FK * KG = \overline{KE}^2$, & qu'ainſi $HD = KE$. 3°. Que ſi l'on prolonge les Tangentes HD, KE, juſqu'à ce qu'elles ſe ren-

* *Hyp.*

contrent en un point Q, les parties DQ, EQ, seront égales entr'elles. Ce qui donne $DQ.EQ :: DH.EK$. D'où l'on voit que la ligne DE qui joint les points d'attouchemens des deux Tangentes HD, KE, sera parallele à la ligne HK, & le plan SDE au plan CHK: c'est pourquoi la ligne DE sera * la Directrice ; & comme elle coupe la base en deux points, la Section Conique FAG * sera une Hyperbole. De plus il est évident que cette Hyperbole passera par le point donné F, puisque ce point est commun tant à la surface Conique, qu'au plan HCK qui est celui de l'Hyperbole ; & qu'elle aura pour asymptotes les lignes CH, CK, puisqu'elles sont * les communes Sections des plans touchans SDH, SEK, & du plan de l'Hyperbole.

* *Def.* 9.

* *Def.* 10.

* *Def.* 15.

S'il arrivoit que les Tangentes DH, EK, fussent paralleles entr'elles, on verroit alors tout d'un coup que les lignes DE, HK, seroient paralleles entr'elles, puisque ces Tangentes sont égales ; & le reste se démontreroit de la même maniére que ci-dessus.

PROPOSITION IX.

Theorême.

274. *SI l'on a deux lignes droites* MN, AB, *terminées par une Section Conique ou par les Sections opposées, lesquelles se rencontrent en un point* P ; *& qui soient paralleles à deux autres lignes*, SE, SD, *données de position : je dis que le rectangle* MP × PN *est au rectangle* AP × PB, *en raison donnée ; c'est à dire que la raison de ces deux rectangles demeure toûjours la même, en quelque endroit que puissent tomber les deux lignes* MN, AB. FIG. 141. 142.

Ayant mené par les paralleles SE, MN, & SD, AB, deux plans, ils formeront dans le plan de la base, deux lignes droites Enm, Dba, & dans la surface Conique des côtés SMm, SNn, SAa, SBb ; & leur commune intersection sera la ligne SPp, qui rencontre le plan de

la baſe au point p, où les deux droites Em, Da, s'entrecoupent ; par lequel je mene dans le plan SMN la droite HK parallele à MN, & dans le plan SAB la droite FG parallele à AB. Cela poſé.

Les triangles ſemblables SPM, SpH ; SPN, SpK ; SPA, SpF ; SPB, SpG, donnent $MP*PN.Hp*pK$. $::\overline{SP}^2.\overline{Sp}^2::AP*PB.Fp*pG$. Et partant on aura $MP*PN.AP*PB::Hp*pK.Fp*pG$. Or la raiſon de $Hp*pK$ à $Fp*pG$, eſt compoſée des deux raiſons de $Hp*pK$ à $mp*pn$, & de $mp*pn$ ou par la proprieté du cercle $ap*pb$ à $Fp*pG$. Mais à cauſe des triangles ſemblables Hpm, SEm, & Kpn, SEn, il vient $Hp.mp::SE.mE$. Et $pK.pn::SE.En$. Et en multipliant les Antecedens & les Conſéquens de ces deux raiſons, $Hp*pK.mp*pn::\overline{SE}^2.mE*En$: on prouvera de même à cauſe des triangles ſemblables Fpa, SDa, & Gpb, SDb, que $ap*pb.Fp*pG::aD*Db.\overline{SD}^2$. Il eſt donc évident que la raiſon de $MP*PN$ à $AP*PB$, eſt compoſée des deux raiſons de $\overline{SE}^2$ à $mE*En$, & de $aD*Db$ à $\overline{SD}^2$; leſquelles par la proprieté du cercle qui eſt la baſe du cone, demeurent toûjours les mêmes en quelque endroit que tombent les droites MN, AB, parce que les points E, D, ne changent point. Donc le rectangle $MP*PN$ eſt au rectangle $AP*PB$ en raiſon donnée. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

FIG. 143. 144. 275. DE LA on voit que ſi dans une Section Conique, où entre les Sections oppoſées, il y a deux lignes droites MN, OR, paralleles entr'elles & qui rencontrent aux points P, Q, une troiſiéme ligne droite AB auſſi terminée par la Section ; on aura $MP*PN$, $OQ*QR::AP*PB.AQ*QB$.

PROP.

PROPOSITION X.

Theorême.

276. *Si par un point quelconque* A *d'une Parabole ou d'une Hyperbole* M A N, *l'on tire une ligne droite* A B *parallele au côté du cone* S D, *mené dans la Parabole par le point* D *où la Directrice touche la baſe, & dans l'Hyperbole par l'un des deux points où elle la rencontre; & que par un point quelconque* P *de cette ligne, l'on tire une ligne* M N *parallele à une ligne* S E *donnée de poſition, & terminée par la Section ou par les Sections oppoſées, avec une autre ligne* F G *parallele à la ligne* D a *commune Section du plan* S A B *avec celui de la baſe, & terminée par les côtés* S a, S D: *je dis que la raiſon du rectangle* M P × P N *au rectangle* F P × P G *eſt donnée, c'eſt à dire qu'elle demeure toûjours la même, en quelque endroit de la ligne* A B *que tombe le point* P. FIG. 145.

Ayant mené par les paralleles, SE, MN, un plan: il formera dans celui de la baſe une ligne droite Enm; dans la ſurface Conique les côtés SMm, SNn; & dans le plan SDa la ligne SPp qui rencontre la baſe au point p, où les lignes Em, Da, s'entrecoupent, par lequel je mene dans le plan SMN la ligne HK parallele à MN. Cela poſé, les triangles ſemblables SPM; SpH; SPN, SpK; SPF, Spa; SPG, SpD donneront $MP \times PN. Hp \times pK :: \overline{SP}^2 . \overline{Sp}^2 :: FP \times PG. ap \times pD$, ou par la proprieté du cercle $mp \times pn$. Et partant on aura $MP \times PN. FP \times PG :: Hp \times pK. mp \times pn$. Mais la raiſon de $Hp \times pK$ à $mp \times pn$, eſt compoſée de deux raiſons de Hp à pm, & de pK à pn, c'eſt à dire, à cauſe des triangles ſemblables Hpm, SEm, & Kpn, SEn, des deux raiſons de SE à Em, & de SE à En; & par conſéquent $Hp \times pK. mp \times pn$, ou $MP \times PN. FP \times PG :: \overline{SE}^2 . mE \times En$. Donc puiſque le point E ne change point en quelque endroit que l'on prenne le point P, & que tous les rectangles $Em \times En$ ſont égaux

par la proprieté du cercle ; il s'enſuit que $MP * PN$ eſt à $FP * PG$ en raiſon donnée. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

FIG. 146. 277. DE-LA il eſt évident que ſi par un point quelconque A d'une Parabole ou d'une Hyperbole MAN, l'on mene dans la Parabole un diametre AB, & dans l'Hyperbole une parallele AB à l'une de ſes Aſymptotes ; & que par deux points quelconques P, Q, de la ligne AB, l'on tire deux paralleles MN, OR, terminées par la Section ou par les Sections oppoſées, on aura $MP * PN. OQ * QR :: AP. AQ$.

Car menant le plan SAB qui forme par ſa rencontre avec la ſurface Conique les côtés SD, Sa, entre leſquels le côté SD paſſera par le point où la Directrice touche la baſe lorſque la Section eſt une Parabole, & par l'un des deux points où la Directrice la rencontre lorſque c'eſt une Hyperbole ; & tirant dans le plan SDa par les points P, Q, les droites FG, TV, paralleles à Da : il eſt clair par la Propoſition précédente que $MP * PN. FP * PG :: OQ * QR. TQ * QV$. Et qu'ainſi $MP * PN. OQ * QR :: FP * PG. TQ * QV$. Or les parties PG, QV, des lignes FG, TV, ſont égales entr'elles ; puiſque les lignes AB, SD, ſont paralleles. Et partant $MP * PN. OQ * QR :: FP. TQ :: AP. AQ$. à cauſe des triangles ſemblables APF, AQT. Donc &c.

CHAPITRE II.

De l'Ellipſe en particulier.

DE'FINITIONS.

17.

FIG. 147. Si une ligne droite indefinie SZ qui eſt hors le plan d'un cercle VXY, ſe meut par un de ſes points X autour de la circonference de ce cercle toûjours paralle-

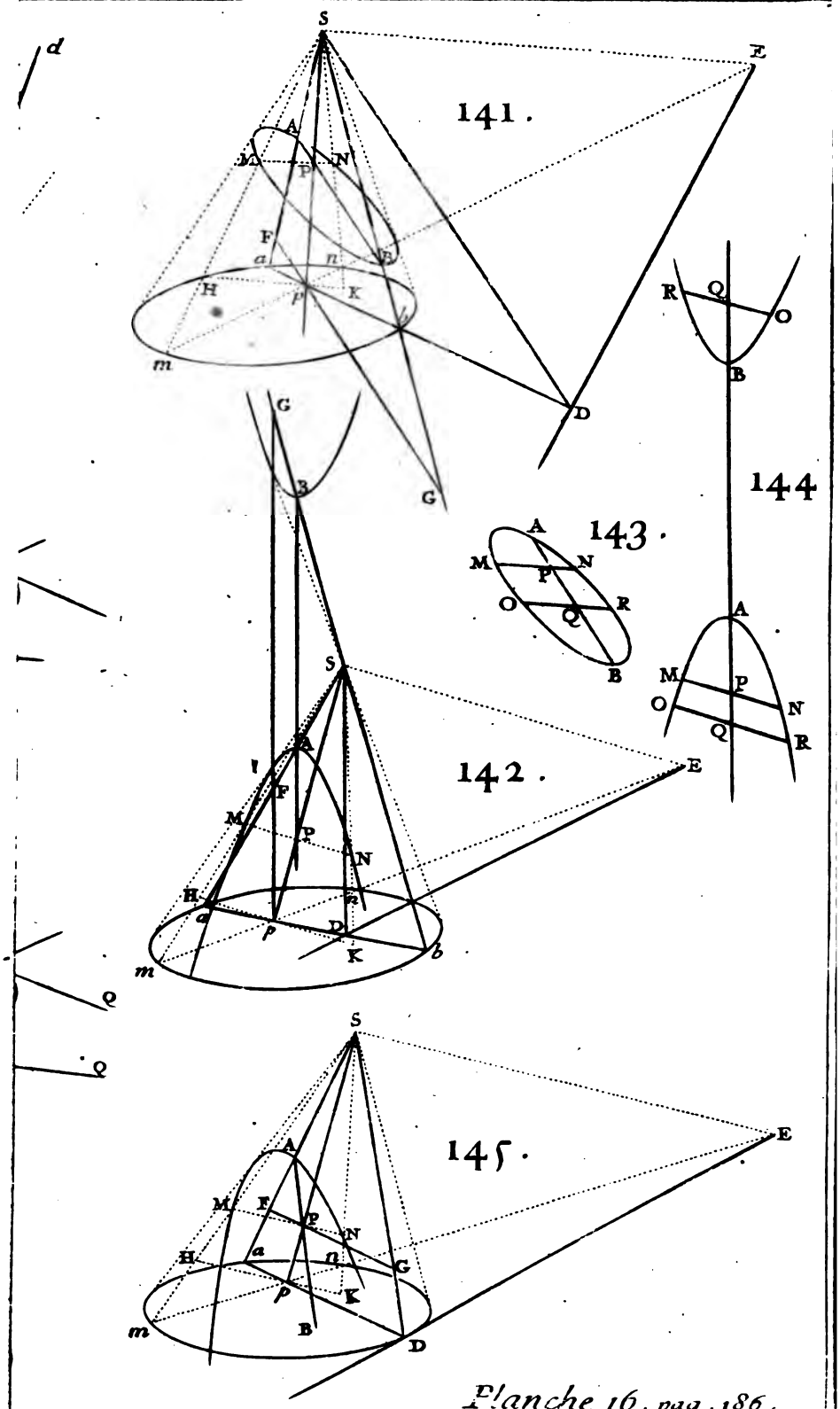


Planche 16. pag. 186.

lement à elle-même, jusqu'à ce qu'elle soit revenuë au même point d'où elle étoit partie : la surface convexe décrite par cette ligne SZ dans ce mouvement, est appellée *Surface cylindrique.*

18.

Cette ligne SZ en chaque differente position, en est toûjours appellée le *Côté.*

19.

Le cercle VXY, la *Base.*

20.

La droite indéfinie CO menée du centre C de la base parallelement aux côtés, en est l'*Axe.*

21.

Le solide indéfini compris par la base VXY & par la Surface cylindrique, est appellé *Cylindre.*

22.

Si l'on coupe un Cylindre par un plan qui ne soit point parallele à ses côtés, ni au plan de sa base ; la ligne courbe $AMBN$ formée par la rencontre de ce plan avec la Surface cylindrique, est appellé *Section cylindrique.*

PROPOSITION XI.

Problême.

278. *Si l'on coupe un cylindre par un plan* u x y *parallele au plan de la base* V X Y ; *la Section* v x y *sera un cercle qui aura pour centre le point* c *où ce plan rencontre l'axe, & pour rayon une ligne* c x *égale au rayon* C X *de la base.* Fig. 147.

Car menant par un point quelconque x de la Section vxy un côté xX de la Surface cylindrique, il sera parallele * à l'axe Cc : c'est pourquoi on pourra faire passer un plan par ces deux lignes, qui formera par sa rencontre avec les deux plans paralleles $CVXY$, $cvxy$, deux droites CX, cx, paralleles entr'elles ; & qui seront de plus égales, puisqu'elles sont renfermées entre- * *Def.* 20.

les paralleles Cc, Xx. Or comme cela arrive toûjours en quelque endroit de la Section vxy qu'on prenne le point x, il s'enſuit que toutes les lignes cx menées du point c, aux points x de la Section vxy, ſont égales aux rayons CX de la baſe : c'eſt à dire que la Section vxy ſera la circonference d'un cercle, qui aura pour centre le point c, où le plan vxy rencontre l'axe du cylindre, & pour rayon une ligne cx égale au rayon CX de la baſe. *Ce qu'il falloit démontrer.*

PROPOSITION XII.

Theorême.

FIG. 148. 279. TOUTE *Ellipſe peut être regardée comme une Section cylindrique.*

Ayant mené dans la baſe du cone où eſt produite une Ellipſe quelconque, le diametre ab qui rencontre à angles droits au point D, la Directrice DE, ſoient tirés ſur la ſurface Conique les côtés Sa, Sb, qui rencontrent le plan de l'Ellipſe aux points A, B ; & dans les plans paralleles AMB, SDE, les droites AB, SD. Ayant pris DF moyenne proportionnelle entre aD, Db, & mené à SF les paralleles AG, BH, ſoit décrit ſur le plan de la baſe du cone, un cercle qui ait pour diametre la ligne GH, & une ſurface cylindrique qui ait pour baſe ce cercle, & pour côtés les droites AG, BH. Cela poſé.

Je dis que ſi par un point quelconque P de la ligne AB, l'on tire à la Directrice DE, une parallele qui rencontre la ſurface Conique en M, & la Cylindrique en O ; les points M, O, ſe confondront l'un avec l'autre & n'en feront qu'un ſeul.

Car ayant fait paſſer par cette parallele un plan parallele au plan des deux baſes tant du cone que du cylindre, il formera ſur la ſurface Conique * un cercle KML dont le centre ſera la commune Section de ce

* *Art.* 259.

plan avec l'axe du cone, & ſur la ſurface Cylindrique * un autre cercle QMR dont le centre ſera la commune Section de ce même plan avec l'axe du cylindre. Or le plan Sab paſſe * par l'axe du cone, & le plan $AGHB$ (qui ne fait qu'un ſeul plan avec celui du triangle Sab) par l'axe * du cylindre ; & par conſéquent les lignes KL, QR, communes Sections de ces deux plans, avec le plan parallele (à la baſe) qui paſſe par la ligne POM, ſeront les diametres de ces deux cercles ; & cette ligne POM ſera perpendiculaire à ces diametres, puiſqu'elle eſt * parallele à DE qui eſt * perpendiculaire à ab & à GH qui ne font * qu'une même ligne, à laquelle les diametres KL & QR qui ne font auſſi qu'une même ligne, ſont paralleles. De plus les lignes AB, SD, étant formées par les rencontres du même plan Sba avec deux plans paralleles entr'eux ; ſçavoir, le plan SDE & celui de l'Ellipſe, ſeront auſſi paralleles entr'elles. Ceci bien entendu.

* *Art.* 278.
* *Def.* 9.
* *Def.* 20.
* *Hyp.*
* *Hyp.*
* *Hyp.*

1°. Dans le cone, à cauſe du cercle KML, on aura $\overline{PM}^2 = KP \times PL$; & à cauſe des triangles ſemblables APK, SDa, & PBL, SDb, il vient $AP. KP :: SD. aD$. Et $PB. PL :: SD. Db$. D'où il ſuit que $AP \times PB. KP \times PL$ ou $\overline{PM}^2 :: \overline{SD}^2. aD \times Db$.

2°. Dans le cylindre, à cauſe du cercle QOR, on aura $\overline{PO}^2 = QP \times PR$; & à cauſe des triangles ſemblables APQ, SDF, & PBR, SDF, on formera ces deux proportions $AP. QP :: SD. DF$. Et $PB. PR :: SD. DF$. D'où il ſuit que $AP \times PB. QP \times PR$ ou $\overline{PO}^2 :: \overline{SD}^2. \overline{DF}^2$ ou $aD \times Db$. Donc $\overline{PM}^2 = \overline{PO}^2$, & $PM = PO$. Donc les points M, O, ſe confondent l'un avec l'autre, & n'en font qu'un ſeul. Donc, puiſque cela arrive toûjours en quelque endroit de la ligne AB que l'on prenne le point P, il s'enſuit que le plan de l'Ellipſe rencontre les ſurfaces Coniques & Cylindriques dans les mêmes points, & qu'ainſi toute Ellipſe peut toûjours être regardée comme une Section cylindrique.

AVERTISSEMENT.

Comme un Cylindre eſt moins compoſé qu'un cone, en ce que tous ſes côtés ſont paralleles entr'eux ; au lieu que dans le cone ils aboutiſſent tous au même point qui en eſt le ſommet ; on a pris le parti de regarder dans ce Chapitre, l'Ellipſe comme la Section d'un cylindre. Ce qui fait qu'on peut démontrer tout à la fois les propriétés de tous ſes diametres ; & que ſe ſervant enſuite dans le cone (comme l'on verra dans le Chapitre ſuivant) de plans Elliptiques au lieu de circulaires, on prouvera les mêmes choſe dans la Parabole & Hyperbole avec une extrême facilité.

PROPOSITION XIII.

Theorême.

FIG. 149. 280. TOUS *les diametres d'une Ellipſe paſſent par un ſeul & unique point, qui eſt celui où le plan de l'Ellipſe rencontre l'axe du cylindre ; & y ſont coupés en deux parties égales.*

Et réciproquement toutes les lignes qui paſſent par ce point, & qui ſont terminées de part & d'autre par l'Ellipſe ; y ſont coupées en deux également, & en ſont des diametres.

On nomme ce point le *Centre* de l'Ellipſe.

1°. Soit AB un diametre quelconque, & C le point où le plan de l'Ellipſe rencontre l'axe du cylindre. Si l'on mene les lignes Aa, Bb, paralleles à l'axe Cc, il eſt clair * qu'elles ſeront des côtés de la ſurface cylindrique, & que les deux plans FAa, GBb, qui paſſent par ces deux lignes, & par les deux tangentes AF, BG, qui ſelon la définition des diametres, doivent être paralleles entr'elles, ſeront paralleles entr'eux, & toucheront la ſurface cylindrique dans les côtés Aa, Bb ; d'où il ſuit que ces deux plans formeront dans le plan de la baſe deux lignes af, bg, paralleles entr'elles, &

* *Def.* 29.

qui toucheront la baſe aux points a, b, où les côtés Aa, Bb, la rencontrent. Or il eſt démontré dans les Elemens de Geometrie, que la ligne ab qui joint les points d'attouchement de deux tangentes paralleles af, bg, d'un cercle, paſſe par ſon centre c. Partant le plan $AabB$ paſſera par l'axe Cc du cylindre; & la ligne AB, qui eſt la rencontre de ce plan avec celui de l'Ellipſe, paſſera par le point C où cet axe rencontre le plan de l'Ellipſe. De plus à cauſe des paralleles Aa, Bb, Cc; il eſt évident que le diametre AB de l'Ellipſe, eſt diviſé en deux également au point C; puiſque le diametre ab du cercle l'eſt au point c qui en eſt le centre. *Ce qu'il falloit démontrer en premier lieu.*

2°. Si l'on mene par les extremités A, B, d'une ligne quelconque AB, qui paſſe par le point C où le plan de l'Ellipſe rencontre l'axe Cc du cylindre, les lignes Aa, Bb, paralleles à cet axe; il eſt clair ſelon la définition 17. de la ſurface cylindrique, qu'elles en ſeront des côtés, & que le plan $AabB$ paſſera par l'axe Cc du cylindre. D'où l'on voit que la ligne ab commune Section de ce plan & de celui de la baſe, paſſe par le centre c de la baſe; & qu'ainſi, puiſqu'elle y eſt coupée en deux également, la ligne AB la ſera auſſi au point C. De plus les tangentes af, bg, qui paſſent par les extremités du diametre ab étant paralleles entr'elles; les plans touchans faA, gbB, ſeront paralleles entr'eux, & formeront dans le plan de l'Ellipſe deux lignes paralleles AF, BG, qui la toucheront aux extremités A, B, de la ligne AB, qui en ſera par conſéquent un diametre. *C'eſt ce qu'il falloit démontrer en ſecond lieu.*

COROLLAIRE.

281. DE-LA il eſt évident que par un point donné ſur le plan d'une Ellipſe autre que le centre, on ne peut faire paſſer qu'un ſeul diametre.

PROPOSITION XIV.

Theorême.

FIG. 149. 282. TOUTE *ordonnée* MPN *de part & d'autre à un diametre* AB, *eſt coupée en deux également par ce diametre en un point* P.

Et réciproquement ſi une ligne quelconque MPN *terminée par une Ellipſe & qui ne paſſe point par le centre* C, *eſt coupée en deux également en* P, *par un diametre* AB; *elle ſera ordonnée de part & d'autre à ce diametre.*

Ayant mené par les points *A*, *B*, *M*, *N*, les côtés *Aa*, *Bb*, *Mm*, *Nn*, paralleles à l'axe *Cc* du cylindre, & qui rencontrent le plan de la baſe aux points *a*, *b*, *m*, *n*; la ligne *Pp* commune Section des deux plans *AabB*, *MmnN*, ſera parallele aux côtés du cylindre, puiſque tous les côtés ſont paralleles entr'eux. De plus le plan *AabB* paſſera par l'axe *Cc* du cylindre, puiſque le diametre *AB* paſſe par le point *C* où cet axe rencontre le plan de l'Ellipſe; & il formera par conſéquent dans le plan de la baſe une ligne *ab* qui paſſera par le centre *c*, c'eſt à dire, un diametre. Cela poſé.

Puiſque par la ſuppoſition la ligne *MPN* eſt ordonnée de part & d'autre au diametre *AB*, elle ſera parallele aux tangentes *AF*, *BG*, qui paſſent par les extremités de ce diametre; & par conſéquent les plans touchans *FAa*, *GBb*, ſeront paralleles au plan *MmnN*. Les lignes que ces trois plans forment dans le plan de la baſe, ſçavoir les deux tangentes *af*, *bg*, & la ligne *mn*, ſeront donc paralleles entr'elles; & ainſi la ligne *mn* ſera perpendiculaire au diametre *ab*, qui la diviſera par conſéquent en deux parties égales au point *p*. D'où il ſuit à cauſe des paralleles *Mm*, *Pp*, *Nn*, que la ligne *MN* ſera auſſi diviſée en deux parties égales au point *P*.

Maintenant pour prouver la converſe, on menera dans

dans le plan de l'Ellipſe deux tangentes *AF*, *BG*, † parralleles à *MN*; & ayant tiré par leurs points d'attouchemens le diametre *AB*, il eſt clair ſelon les définitions 13. & 14. que cette ligne *MN* ſera ordonnée de part & d'autre à ce diametre, & par conſéquent (ſelon ce qu'on vient de démontrer) coupée en deux également en *P* par ce même diametre. Or comme l'on ne peut mener par le point *P* * qu'un ſeul diametre, il s'enſuit que ſi une ligne *MN* terminée par une Ellipſe, & qui ne paſſe point par le centre *C*, eſt coupée en deux également en *P* par un diametre *AB*, elle lui ſera ordonnée de part & d'autre.

† *Art.* 267.

* *Art.* 281.

PROPOSITION XV.

Theorême.

283. S'IL *y a dans une Ellipſe deux diametres* AB, DE; *dont l'un d'eux* DE *ſoit parallele aux Tangentes* AF, BG, *qui paſſent par les extremités de l'autre* AB: *je dis réeciproquement que le diametre* AB *ſera parallele aux Tangentes qui paſſent par les extremités du diametre* DE. FIG. 149.

Les deux diametres *AB*, *DE*, ſont appellés *Conjugués* l'un à l'autre.

Ayant mené par les points *A*, *B*, *D*, *E*, les côtés *Aa*, *Bb*, *Dd*, *Ee*, du cylindre, leſquels rencontrent le plan de la baſe aux points *a*, *b*, *d*, *e*; les plans *AabB*, *DdeE*, paſſeront par l'axe *Cc* du cylindre, puiſque les lignes *AB*, *DE*, ſont des diametres de l'Ellipſe; & formeront par conſéquent dans le plan de la baſe, deux diametres *ab*, *de*. Or le plan touchant *FAa* étant parallele au plan *DdeE*, formera dans le plan de la baſe une Tangente *af* parallele au diametre *de*, lequel diametre ſera par conſéquent perpendiculaire ſur le diametre *ab*. Si donc l'on mene par l'une des extremités *d* du diametre *de* une Tangente *dh* au cercle, elle ſera parallele au diametre *ab*, & le plan *hdD* parallele au

plan $AabB$: c'eſt pourquoi les communes Sections de ces deux plans avec le plan de l'Ellipſe, ſçavoir la Tangente DH & le diametre AB, ſont paralleles entr'elles. On prouvera la même choſe à l'égard de la Tangente qui paſſe par l'autre extremité E du diametre DE. Donc &c.

COROLLAIRE I.

284. DE-LA il eſt évident que s'il y a deux diametres conjugués AB, DE, dans une Ellipſe ; les deux plans qui paſſent par ces diametres & par l'axe Cc du cylindre, formeront dans le plan de la baſe deux diametres ab, de, qui ſeront perpendiculaires entr'eux : ce qui eſt réciproque.

COROLLAIRE II.

285. IL ſuit encore de cette Propoſition que ſi par un point quelconque P d'un diametre AB, on mene une ordonnée MPN de part & d'autre, elle ſera parallele au diametre DE qui lui eſt conjugué ; & qu'ainſi on aura * $MP*PN$ ou $\overline{PM}^2$. $DC*CE$ ou $\overline{DC}^2$ :: $AP*PB$. $AC*CB$ ou $\overline{AC}^2$. Ce qui donne $\overline{PM}^2$. $AP*PB$ :: $\overline{DC}^2$. $\overline{AC}^2$ :: $4\overline{DC}^2$ ou $\overline{DE}^2$. $4\overline{AC}^2$ ou $\overline{AB}^2$. C'eſt à dire que le quarré d'une ordonnée quelconque MP à un diametre AB, eſt au rectangle $AP*PB$ fait des parties de ce diametre, comme le quarré du diametre DE qui lui eſt conjugué, eſt au quarré du diametre AB.

* *Art.* 275.

PROPOSITION XVI.

Theorême.

FIG. 150. 286. SI *par un point quelconque* M *d'une Ellipſe* AMB, *l'on mene une Tangente* FMG *qui rencontre aux points* F, G, *deux autres Tangentes* AF, BG, *paralleles entr'elles : je dis que* FM. MG :: AF. BG.

Ayant mené par les points d'attouchemens A, B, M, les côtés Aa, Bb, Mm, du cylindre, & fait passer par ces côtés & par les Tangentes AF, BG, FG, les trois plans FAa, GBb, FMm, ou GMm; il est clair que les communes Sections Ff, Gg, des deux premiers plans avec le troisiéme, seront paralleles tant entr'elles, qu'avec les côtés du cylindre; car les deux plans FMm, FAa, passant par les côtés Mm, Aa, qui sont paralleles entr'eux, leur commune Section Ff sera parallele à ces côtés; & par la même raison Gg commune Section des deux plans GBb, GMm, sera parallele aux côtés Bb, Mm. De plus les lignes af, bg, que forment les plans touchans paralleles FAa, GBb, dans le plan de la base, en seront des Tangentes paralleles; les parties fm, mg, de la troisiéme Tangente formée dans le plan de la base par le troisiéme plan touchant FMm, ou GMm, seront égales (par la proprieté du cercle) aux Tangentes af, bg; sçavoir, fm à fa, & mg à gb. Cela posé.

A cause des lignes Aa, Ff, Mm, Gg, Bb; & AF, BG; & af, bg, qui sont paralleles entr'elles, on aura $FM.\ MG :: fm$ ou $fa.\ mg$ ou $gb :: FA.\ GB$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

287. Si l'on mene par les points d'attouchement A, B, des deux Tangentes paralleles entr'elles AF, BG, un diametre AB qui rencontre en T la Tangente FMG, & qu'on tire l'ordonnée MP à ce diametre: il est évident que $AP.\ PB :: FM.\ MG :: AF.\ BG :: AT.\ BT$. Et qu'ainsi $PB - AP.\ PB :: BT - AT$ ou $AB.\ BT$.

COROLLAIRE II.

288. De-là on tire la maniére suivante de mener d'un point donné M sur une Ellipse la Tangente MT, un diametre AB etant donné avec la position de ses ordonnées.

De l'une des extremités B du diametre AB, soit tirée au point donné M la droite BM. Puis ayant mené l'ordonnée MP au diametre AB, & pris sur ce diametre du côté de B la partie PH égale à PA, soit tirée HK parallele à PM, rencontrant la ligne BM en K, par où & par l'autre extremité A soit menée AK. Soit enfin tirée MT parallele à AK, elle sera la Tangente qu'on cherche.

Car à cause des paralleles MP, HK, & AK, MT, l'on aura $BP.PH.$ ou $PA :: PM.MK :: BT.TA.$

COROLLAIRE III.

289. S'IL y a dans une Ellipse deux Tangentes MT, NT, qui se rencontrent en un point T; je dis que le diametre AB qui passe par le point P milieu de la ligne MN qui joint les deux points d'attouchement, passera aussi par le point T. Car PN est ordonnée au diametre AB de même que PM; & par conséquent * les Tangentes MT, NT, iront chacune rencontrer ce diametre en un point T, tel que $PB - AP. PB :: AB. BT$; c'est à dire dans le même point.

* *Art.* 287.

COROLLAIRE IV.

290. SI l'on joint dans une Ellipse les points d'attouchemens M, N, de deux Tangentes MF, NL, par une ligne droite MN; & qu'il y ait une troisiéme Tangente FAL parallele à MN: je dis que les parties FA, AL de cette dernier Tangente, prises entre son point d'attouchement A & les deux premieres, seront égales entr'elles. Car ayant mené par le point d'attouchement A le diametre AB, il est clair que la ligne MN est ordonnée de part & d'autre à ce diametre, puisqu'elle est parallele à la Tangente FL qui passe par son extremité A; & qu'ainsi il la coupe par le milieu en P, & passe * par conséquent par le point de rencontre

* *Art.* 289.

T des deux Tangentes MF, NL ; ou bien il leur ſera parallele, ſi la ligne MN eſt un diametre. Or il eſt viſible en l'un & l'autre cas, que FL ſera diviſé en deux parties égales au point A par le diametre AB ; puiſque MN l'eſt en P par ce même diametre. * *Art.* 283.

CHAPITRE III.

De la Parabole & de l'Hyperbole en particulier.

PROPOSITION XVII.

Theorême.

291. DANS *une Parabole toute ordonnée* MPN *de part & d'autre à un diametre* AB, *eſt coupée en deux également par ce diametre au point* P : *ce qui eſt reciproque.* FIG. 151.

Ayant fait paſſer par la ligne MN un plan Elliptique, il formera dans le plan touchant SDE parallele au plan Parabolique, une Tangente DE parallele à MN. De plus le plan SAF mené par le Sommet S du cone, & par la Tangente AF qui paſſe par l'origine A du diametre AB, formera dans le plan Elliptique une Tangente af ; & la ligne Da qui joint les points d'attouchement des deux Tangentes DE, af, paſſera par le point P ; puiſque le diametre AB eſt parallele au côté touchant SD. Cela poſé.

Puiſque par la ſuppoſition * les deux lignes AF, MN, ſont paralleles entr'elles ; il s'enſuit que la Tangente af, qui eſt la commune Section de deux plans qui paſſent par ces deux lignes, ſera parallele à MN ; & par conſéquent à DE. D'où l'on voit * que la ligne Da, qui joint les points d'attouchement des deux Tangentes paralleles DE, af, eſt un diametre de l'Ellipſe ; & qu'ainſi la ligne MN qui eſt parallele à ces Tangentes & terminée par l'Ellipſe, ſera * diviſée en deux egalement au point P. * *Def.* 14. * *Def.* 15. * *Art.* 282.

Maintenant pour prouver la converſe, on menera

dans le plan de la Parabole * une Tangente AF parallele à la ligne MN; & ayant tiré par le point d'attouchement A un diametre AB, il aura pour ordonnée de part & d'autre * la ligne MN, qu'il diviſera par conſéquent en deux parties egales au point P ſelon ce qu'on vient de démontrer. Or comme il n'y a qu'un ſeul diametre * qui puiſſe paſſer par le point de milieu P de la ligne MN, il s'enſuit &c.

* *Art.* 267.

* *Def.* 14.

* *Art.* 268.

COROLLAIRE.

292. DE-LA il eſt évident que ſi l'on mene par deux points quelconques P, Q, d'un diametre AB deux ordonnées de part & d'autre MPN, OQR; on aura toûjours * $MP \times PN$ ou $\overline{PM}^2$. $OQ \times QR$ ou $\overline{QO}^2$ :: AP. AQ. C'eſt à dire que les quarrés des deux ordonnées quelconques PM, QO, à un diametre AB, ſeront toûjours entr'eux, comme les parties AP, AQ, de ce diametre priſes depuis ſon origine A juſqu'à ces mêmes ordonnées.

* *Art.* 277.

PROPOSITION XVIII.

Theorême.

Fig. 151.

293. SI *par un point quelconque* M *d'une Parabole, l'on mene une ordonnée* MP *à tel de ſes diametres* AB *qu'on voudra, & une Tangente* MT *qui rencontre en* T *ce diametre prolongé au delà de ſon origine* A; *je dis que ſes parties* AP, AT, *ſont égales.*

La même préparation étant faite que dans la Propoſition précédente, ſoit de plus mené par le Sommet S du cone & par la Tangente MT, le plan touchant STM qui formera dans le plan Elliptique la Tangente MH, laquelle rencontrera le diametre Da de l'Ellipſe en un point H par où paſſera la ligne ST; & ſoit enfin tirée la droite TG parallele à SA. Ceci bien entendu, on aura * $DH. Ha :: DP. Pa$, & (*alternando.*)

* *Art.* 287.

$DH. DP :: Ha. Pa.$ Mais à cauſe des paralleles AB, SD, & SA, TG; il eſt clair que $DH. DP :: SH. ST :: Ha. Ga.$ Donc $Ha. Pa :: Ha. Ga.$ Donc auſſi $Pa = Ga$; & par conſéquent $AP = AT$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

PROPOSITION XIX.

Theorême.

294. DANS *les Hyperboles oppoſées tout diametre* AB *paſſe par le point d'interſection* C *des deux aſymptotes, & y eſt coupé en deux également : ce qui eſt reciproque.* FIG. 152.

On nommera ce point, *Centre.*

Soit HSh une des deux communes Sections du plan parallele au plan Hyperbolique, & des deux ſurfaces Coniques oppoſées; & ſoit l'Aſymptote FG formée par la rencontre du plan Hyperbolique avec celui qui touche ces deux ſurfaces en cette ligne HSh. Soient menées par les Tangentes paralleles AF, BG, qui paſſent par les extremités du diametre AB, & qui rencontrent l'Aſymptote FG aux points F, G, deux plans Elliptiques paralleles; ils formeront dans le plan touchant qui paſſe par le côté HSh, les Tangentes paralleles FH, Ghf, & dans le plan touchant SAF les Tangentes paralleles AF, af.

Cela poſé, les lignes paralleles FH, Gh, étant renfermées entre les deux autres paralleles FG, Hh, ſeront égales entr'elles; & les triangles ſemblables SHF, Shf, & SFA, Sfa, donneront cette proportion, $HF. hf :: SF. sf :: FA. fa$. Et partant $HF. FA :: hf. fa ::$ * $hG. GB$. Donc puiſque $HF = hG$, il s'enſuit que $AF = BG$; & à cauſe des triangles ſemblables ACF, BCG, que $AC = CB$: c'eſt à dire que l'Aſymptote FG paſſe par le point de milieu C du diametre AB. On prouvera de même que l'autre Aſymptote paſſera encore par le point de milieu C du diametre AB; d'où l'on voit que le diametre AB paſſe par le

* *Art.* 286.

point d'interſection C des deux Aſymptotes, & y eſt coupé en deux parties égales.

Soit à preſent une ligne AB qui paſſant par le point d'interſection C des deux Aſymptotes, rencontre les Hyperboles oppoſées aux points A, B. Si l'on mene par le point A la Tangente AF, & à l'Hyperbole oppoſée une Tangente DG * parallele à AE; il eſt clair par ce qu'on vient de prouver que la ligne AD qui joint les points d'attouchemens de ces deux Tangentes étant un diametre, paſſera par le point d'interſection C des Aſymptotes. Elle ſe confondra donc avec la ligne AB qui paſſe auſſi * par les deux mêmes points A, C : c'eſt à dire que le point D tombera ſur le point B. C'eſt pourquoi cette ligne AB ſera un diametre, & partant coupée en deux parties égales au point C.

* *Art.* 267.

* *Hyp.*

COROLLAIRE.

295. DE-LA on voit que d'un point donné au dedans d'une Hyperbole, on ne peut mener qu'un ſeul diametre; puiſqu'il n'y a qu'une ſeul ligne qui puiſſe paſſer par ce point, & par le centre.

PROPOSITION XX.

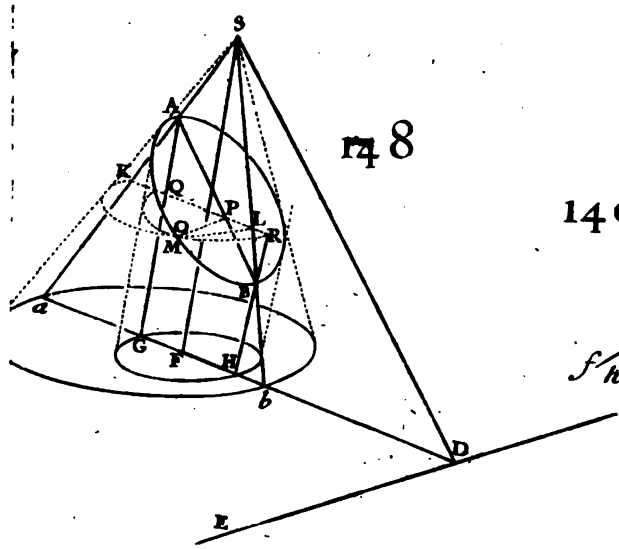
Theorême.

FIG. 153.

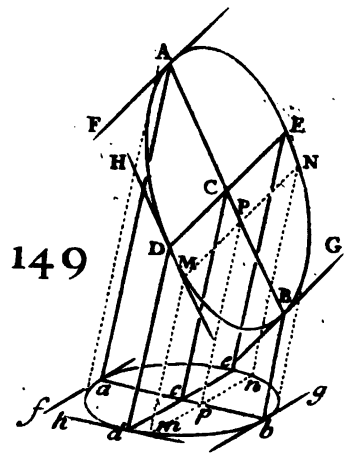
296. DANS *les Hyperboles oppoſées toute ordonnée* MPN *de part & d'autre à un diametre* AB, *eſt coupée en deux également par ce diametre au point* P : *ce qui eſt reciproque.*

Ayant fait paſſer par la ligne MN un plan Elliptique, il formera dans les deux plans touchans SAF, SBG, deux Tangentes af, bg; & la ligne ab qui joint les points d'attouchemens de ces deux Tangentes, étant la commune Section du plan Elliptique & du plan SAB, paſſera par le point P. Or puiſque par la ſuppoſition

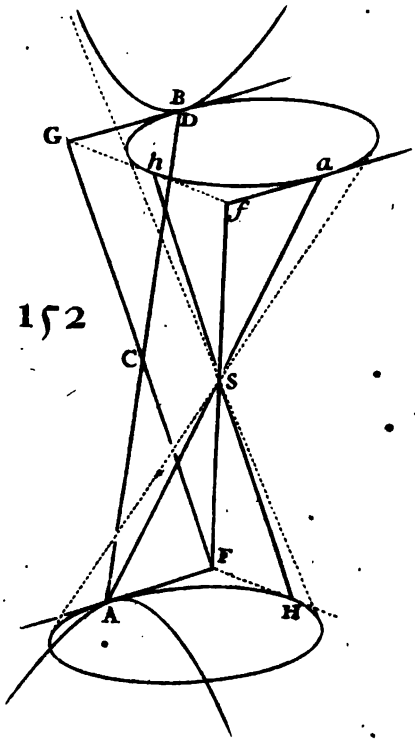
les



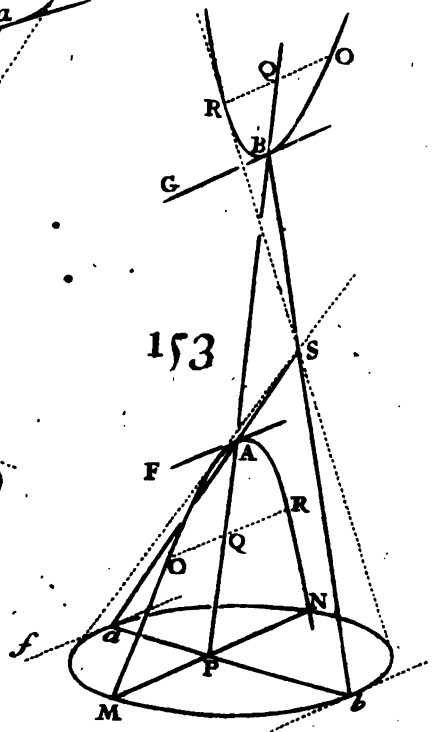
148



149



152



153

Planche 17. pag. 200.

les deux lignes AF, MN, ſont paralleles, il s'enſuit que la ligne af qui eſt la commune Section de deux plans, qui paſſent par ces deux lignes, ſera parallele à MN. Par la même raiſon la Tangente bg commune Section du plan Elliptique & du plan touchant SBG, leſquels paſſent par les deux paralleles MN, BG, ſera parallele à MN. Les deux Tangentes af, bg, ſeront donc paralleles entr'elles : d'où il ſuit que la ligne ab * eſt un diametre de l'Ellipſe ; & qu'ainſi la ligne MN * eſt diviſée en deux parties égales au point P.

* *Def.* 13.
* *Art.* 282.

Maintenant pour prouver la converſe, on menera dans le plan des Hyperboles * deux Tangentes AF, BG, paralleles à la ligne MN terminée par l'Hyperbole ; & ayant tiré par leurs points d'attouchemens le diametre AB, il eſt clair ſelon la Définition quatorziéme, que ce diametre aura pour ordonnée de part & d'autre la ligne MN ; & qu'ainſi il la coupera ſelon ce qu'on le vient de démontrer, en deux parties égales au point P. Or comme il n'y a qu'un ſeul diametre * qui puiſſe paſſer par ce point, il s'enſuit que ſi une ligne MN terminée par une Hyperbole, eſt coupée en deux également en P par un diametre AB, elle ſera ordonnée de part & d'autre à ce diametre.

* *Art.* 267.
* *Art.* 295.

COROLLAIRE.

297. DE LA il eſt évident que ſi l'on mene deux ordonnées de part & d'autre MPN, OQR, à un diametre AB, on aura toûjours * $MP \times PN$. ou $\overline{PM}^2$. $OQ \times QR$ ou $\overline{QO}^2$ :: $AP \times PB$. $AQ \times QB$. C'eſt à dire &c.

* *Art.* 275.

PROPOSITION XXI.

Theorême.

298. SI *par un point quelconque* M *d'une Hyperbole l'on mene une Tangente* MFG *qui rencontre deux autres Tangentes paralleles* AF, BG, *aux point* F, G : *je dis que* MF. MG :: AF. BG.

Fig. 154.

Ayant mené deux plans Elliptiques paralleles qui paſſent par les Tangentes AF, BG; ils formeront dans le plan touchant SMG deux Tangentes HF, hG, paralleles entr'elles; & le plan Elliptique qui paſſe par BG, formera dans le plan touchant SAF, une Tangente af qui rencontrera la Tangente hG au point f, où la ligne FS rencontre ce plan Elliptique. Cela poſé, les Tangentes af, BG, ſeront paralleles entr'elles; puiſqu'elles le ſont chacune à la Tangente AF: & partant * on aura $BG.Gh :: af.fh$ (à cauſe des triangles ſemblables Shf, SHF, & Saf, SAF,) $:: AF.FH$. Donc $BG.AF :: Gh.FH$ (à cauſe des triangles ſemblables MGh, MFH,) $:: MG.MF$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* *Art.* 268.

Il eſt viſible qu'on peut tirer de cette Propoſition les mêmes Corollaires, que dans l'Ellipſe art. 287. 288. 289. & 290. c'eſt pourquoi je ne m'amuſerai point à les repeter.

PROPOSITION XXII.

Theorême.

FIG. 155. 299. SI *une ligne droite* FG *terminée par les Aſymptotes d'une Hyperbole, la touche en un point* A; *je dis que cette ligne droite y ſera coupée en deux parties égales.*

Soient menés par le Sommet S du cone, & par les deux Aſymptotes CF, CG, deux plans, leſquels toucheront * la ſurface Conique dans les côtés SM, SN, où le plan MSN parallele au plan Hyperbolique la rencontre. Soit mené un plan Elliptique qui paſſe par la droite FG: il formera dans les deux plans touchans deux Tangentes MF, NG, & dans le plan MSN une ligne droite MN parallele à FG, & qui joint les points d'attouchemens de ces deux Tangentes. Cela poſé, il eſt viſible que la ligne FG * eſt coupée en deux parties égales au point A, puiſqu'elle touche dans ce point l'Ellipſe, auſſi-bien que l'Hyperbole.

* *Def.* 16.

* *Art.* 290.

COROLLAIRE I.

300. COMME il ne peut y avoir qu'une ſeule ligne EG qui paſſant par un point donné A au dedans d'un angle FCG, & étant terminée par ſes côtés, ſoit coupée en deux également par ce point A; il s'enſuit que ſi une ligne droite FG terminée par les Aſymptotes d'une Hyperbole, la rencontre en un point A qui diviſe cette droite FG en deux parties égales, elle touchera l'Hyperbole en ce point.

COROLLAIRE II.

301. DE-LA on voit que pour mener d'un point donné A ſur une Hyperbole dont les Aſymptotes CF, CG, ſont données, une Tangente FAG; il n'y a qu'à tirer la ligne AD parallele à l'une des Aſymptotes CG, & terminée par l'autre, & ayant pris la partie DF égale à CD, tirer la ligne FAG: elle ſera la Tangente cherchée. Car à cauſe des triangles ſemblables FCG, FDA, la ligne FG ſera coupée par le milieu en A; puiſque * CF l'eſt en D. * *Hyp.*

COROLLAIRE III.

302. SI l'on joint deux points quelconques M, N, d'une Hyperbole MAN par une ligne droite qui rencontre les Aſymptotes aux points H, K; les deux parties MH, NK, de cette droite renfermées entre l'Hyperbole & les Aſymptotes, ſeront égales entr'elles. Car ayant mené par le point P milieu de MN, le diametre CP; & par le point A où ce diametre rencontre l'Hyperbole, la ligne FG parallele à MN, & terminée par les Aſymptotes: il eſt clair * que cette ligne FG ſera Tangente en A; & par conſéquent * diviſée en deux parties égales en ce point. D'où il eſt clair, à cauſe des triangles ſemblables CAF, CPH, & CAG, CPK, que $PH = PK$; & par conſéquent $MH = NK$. FIG. 156. * *Art.* 296. * *Art.* 299.

COROLLAIRE IV.

FIG. 157. 303. SI d'un point donné A sur une Hyperbole, l'on tire deux droites AF, AG, terminées par ses Asymptotes ; & que d'un autre point quelconque M de la même Hyperbole, ou de son opposée, on tire deux autres droites MH, MK, terminées aussi par ses Asymptotes, & paralleles aux deux premieres AF, AG : je dis que $FA \times AG = HM \times MK$.

Car 1°. Lorsque les deux points A, M, tombent sur la même Hyperbole ; ayant joint ces deux points A, M, par une ligne droite qui rencontre les Asymptotes en P & Q, les triangles semblables PAF, PMH, & QMK, QAG, donneront ces deux proportions, $AF.MH :: AP.MP$ * $:: MQ.AQ :: MK.AG$. ce qui donne, en multipliant les extrêmes & les moyens, $FA \times AG = HM \times MK$.

* *Art.* 302.

2°. Lorsque les points A, M, tombent sur les deux Hyperboles opposées ; ayant mené par le point donné A & par le centre C, le diametre AB, & tiré les droites BD, BE, paralleles à AF, AG, & terminées par les mêmes Asymptotes ; il est clair que les triangles CAF, CBD, & CAG, CBE, seront semblables & de plus égaux entr'eux, puisque * $CA = CB$. C'est pourquoi $BD = AF$, & $BE = AG$; & partant $DB \times BE = FA \times AG$. Or selon le cas précédent $KM \times MH = DB \times BE$. Donc aussi $FA \times AG = KM \times MH$.

* *Art.* 294.

AVERTISSEMENT.

Je laisse les autres proprietés des Asymptotes, & des Diametres conjugués, parce qu'elles se tirent de celles-ci sur le plan, comme l'on a fait dans le troisiéme Livre ; mon dessein n'étant ici que de faire voir de quelle utilité peut être la consideration du Solide, pour démontrer tout à la fois & sans aucun calcul, les pro-

prietés de tous les Diametres, des Tangentes, & des Aſymptotes; d'où dépendent toutes les autres. C'eſt ce que je crois avoir executé d'une maniére fort aiſée, & entierement nouvelle; puiſque je ne me ſuis point ſervi de lignes coupées harmoniquement, comme ont fait les Geometres Modernes après Mrs. *Paſchal* & *Deſcartes*; ce qui les a obligés d'avoir recours à un grand nombre de Lemmes, dont les démonſtrations ſeules me paroiſſent auſſi longues que celles de tout ce Livre.

LIVRE SEPTIEME.

Des Lieux Geometriques.

DE'FINITION. I.

FIG. 158. 159. SOIENT deux droites inconnuës & indéterminées AP, PM, qui faſſent entr'elles un angle APM donné ou pris à volonté ; & dont l'une AP que j'appellerai toûjours x, ait un commencement fixe au point A, & s'étende indéfiniment le long d'une ligne droite donnée de poſition ; & l'autre PM que je nommerai y, en change continuellement, & ſoit toûjours parallele à elle-même : c'eſt à dire que toutes les droites PM doivent être paralleles entr'elles. Soit de plus une équation qui ne renferme que ces deux inconnuës x & y mêlées avec des connuës, & qui exprime la relation de chaque indéterminée AP (x) à ſa correſpondante PM (y). La ligne droite ou courbe qui paſſe par les extremités de toutes les valeurs de y, c'eſt à dire, par tous les points M, eſt appellée en général un *Lieu Geometrique*, & en particulier le *Lieu* de cette équation.

FIG. 158. Suppoſons, par exemple, que l'équation $y = \frac{bx}{a}$ doive exprimer toûjours la relation de AP (x) à PM (y) qui font entr'elles un angle donné ou pris à volonté APM. Ayant pris ſur la ligne AP la partie $AB = a$, & de B mené $BE = b$ parallele à PM & du même côté ; la droite indéfinie AE ſera nommée en général un *Lieu Geometrique*, & en particulier le *Lieu* de cette équation. Car ayant mené d'un de ſes points quelconques M la droite MP parallele à BE, les triangles ſemblables ABE, APM, donneront toûjours cette proportion, AB (a). BE (b) :: AP (x). PM $(y) = \frac{bx}{a}$. Et partant la droite AE eſt le lieu de tous les points M.

De même si $yy = aa - xx$ exprime la relation de AP à PM, & que l'angle APM soit droit ; la circonference d'un cercle qui a pour rayon la droite $AB = a$ prise sur la ligne AP, sera appellée en général un *Lieu Geometrique*, & en particulier le *Lieu* de cette équation. Car ayant mené d'un de ses points quelconques M, la perpendiculaire MP (y), on aura toûjours par la proprieté du cercle, $\overline{PM}^2$ $(yy) = DP * PB$ $(aa - xx)$ en prenant BD pour le diametre de ce cercle. D'où l'on voit que sa circonference est le lieu de tous les points M. FIG. 159.

REMARQUE.

304. SI après avoir supposé que les PM tendent vers un certain côté de la ligne AB, comme vers Q, on suppose ensuite qu'elles tendent vers le côté opposé, comme vers G ; il faut remarquer que leurs valeurs deviennent négatives de positives qu'elles étoient, & qu'ainsi on a pour lors $PM = -y$. De même si après avoir supposé que les points P tombent d'un certain côté par rapport au point A, comme du côté de B, on suppose ensuite qu'ils tombent du côté opposé, comme vers D ; les AP deviendront négatives de positives qu'elles étoient, & on aura par conséquent $AP = -x$, Les positives de ces valeurs s'appellent aussi Valeurs *vraies* ; & les négatives, Valeurs *fausses*. Or un lieu Geometrique doit passer par les extremités de toutes les valeurs tant vraies que fausses de l'inconnuë y, qui répondent aux valeurs tant vraies que fausses de l'autre inconnuë x. Si donc l'on mene la droite QAG parallele à PM, un lieu Geometrique pourra se trouver dans les quatre angles BAQ, BAG, GAD, DAQ, comme dans le second exemple (*fig.* 159.), ou seulement dans quelques-uns de ces angles comme dans le premier (*fig.* 158.). Car supposé dans le second exemple, qu'on fasse d'abord $AP = x$, & $PM = y$, en prenant le point M sur le quart QB de la circonference ; si ensuite le point M FIG. 158. 159.

eſt pris ſur le quart GB, on aura $AP = x$, & $PM = -y$; s'il eſt pris ſur DG, on aura $AP = -x$, & $PM = -y$; & enfin s'il eſt pris ſur DQ, on aura $AP = -x$, & $PM = y$; & il viendra toûjours dans tous ces cas par la proprieté du cercle, la même équation $yy = aa - xx$; parce que les quarrés de $\pm y$ & de $\pm x$ ſont les mêmes dans tous ces cas, ſçavoir yy & xx. De même dans le premier exemple, ſi en prenant d'abord le point M du côté de E ſur AE, dans l'angle QAP, on fait $AP = x$, & $PM = y$; Ce point M pris enſuite ſur EA prolongée du côté de A dans l'angle GAD, donnera $AP = -x$, & $PM = -y$; & à cauſe des triangles ſemblables ABE, APM, on formera cette proportion $AB\,(a).\ BE\,(b) :: AP\,(-x).\ PM\,(-y) = -\frac{bx}{a}$; & partant $y = \frac{bx}{a}$, qui eſt la même équation que l'on trouve en ſuppoſant que le point M tombe dans l'angle BAQ.

AVERTISSEMENT.

Lorſqu'il s'agira dans la ſuite de conſtruire le lieu d'une équation donnée, on ſuppoſera toûjours que $AP\,(x)$ & $PM\,(y)$ ſoient poſitives, c'eſt à dire que tous les points M tombent dans le même angle BAQ. Et on prendra pour le lieu de l'équation donnée la portion du lieu qui ſera renfermée dans cet angle.

DEFINITION II.

Les anciens Geometres ont appellé *Lieux plans*, ceux qui ſont des lignes droites, ou des cercles; *Solides*, ceux qui ſont des Paraboles, des Ellipſes, ou des Hyperboles. Mais les Modernes diſtribuënt les lieux Geometriques en differens degrés : ils comprennent ſous le premier tous ceux où les inconnuës x & y n'ont qu'une dimenſion dans leurs équations; ſous le ſecond, tous ceux où elles n'en ont que deux; ſous le troiſiéme, tous ceux où elles n'en ont que trois; & ainſi de ſuite. Où l'on doit

doit obſerver que les inconnuës x & y ne ſe doivent point multiplier l'une l'autre dans le premier degré ; qu'elles ne doivent faire au plus enſemble qu'un produit de deux dimenſions xy dans le ſecond, un de trois xxy ou xyy dans le troiſiéme, &c.

DEFINITION III.

Les termes de l'équation d'un lieu, ſont regardés comme differens entr'eux lorſque l'une ou l'autre des inconnuës x & y, ou toutes les deux jointes enſemble s'y trouvent avec differentes dimenſions. Ainſi dans le premier degré ſi l'on propoſe l'équation $y - \frac{bx}{a} + c = o$, les termes y, $-\frac{bx}{a}$, c, ſeront differens ; & de même dans le ſecond, ſi l'on propoſoit $yy + \frac{2bxy}{a} - 2cy - \frac{fxx}{a} + gx + hx - hh + ll = o$, les termes yy, $\frac{2bxy}{a}$, $-2cy$, $-\frac{fxx}{a}$, $gx + hx$, $-hh + ll$, ſeroient chacun differens.

AVERTISSEMENT.

Je n'expliquerai ici en détail que les lieux du premier & du ſecond degré ; ce que j'en dirai donnera beaucoup d'ouverture pour conſtruire des lieux plus compoſés dans les cas particuliers qui ſe peuvent rencontrer : on en trouvera même quelques exemples dans la ſuite. Mon deſſein eſt donc de donner dans ce Livre une méthode générale pour conſtruire les lieux du premier & du ſecond degré, leurs équations étant données ; & de faire voir que le premier ne renferme que la ligne droite ; & que le ſecond ne renferme de même que la Parabole, l'Ellipſe & le Cercle, l'Hyperbole & les Hyperboles oppoſées.

DEMANDE.

305. ON demande qu'on puiſſe réduire ſous une fraction ſimple & abregée, toute quantité litterale donnée, ſi compoſée qu'elle puiſſe être.

On demande par exemple, 1°. Qu'on puiſſe prendre une fraction ſimple $\frac{b}{a} = \frac{cc+ff}{af+fc} + \frac{aa}{gg}$, où les lettres a, c, f, g, marquent des lignes données. 2°. Qu'on puiſſe trouver une ſeule ligne droite $s = \frac{age-bce}{bb+af}$, où les lignes droites a, b, c, e, f, g, ſont données. 3°. Qu'on puiſſe trouver un quarré $tt = ss - \frac{ccee-eehh}{bb+af}$, où les lignes a, b, c, e, f, h, s, ſont données; de ſorte qu'on ait ſon côté $t = \sqrt{ss - \frac{ccee-eehh}{bb+af}}$. On enſeignera au commencement du huitiéme Livre comment cela ſe fait.

PROPOSITION I.

Problême.

306. CONSTRUIRE *tout lieu du premier degré, ſon équation etant donnée.*

Lorſque les inconnuës x & y n'ont qu'une dimenſion dans l'équation propoſée, & que leur produit xy ne s'y rencontre point; le lieu de cette équation ſera toûjours une ligne droite, & on la reduira à l'une des quatre formules ſuivantes.

$1°. y = \frac{bx}{a}$, $2°. y = \frac{bx}{a} + c$, $3°. y = \frac{bx}{a} - c$, $4°. y = c - \frac{bx}{a}$,

dans leſquelles on ſuppoſe que l'inconnuë y ſoit delivrée de fractions, & que la fraction qui multiplie l'autre inconnuë x ſoit réduite * ſous cette expreſſion $\frac{b}{a}$, & tous les termes connus ſous cette autre c.

* *Art.* 305.

Les mêmes choſes étant poſées que dans la définition premiere, on conſtruira les lieux des trois dernie-

res formules de la maniere qui ſuit ; car pour le lieu de la premiere, on l'a déja conſtruit dans cette definition.

Pour conſtruire le lieu de la ſeconde formule $y = \frac{bx}{a} + c$, on prendra ſur la ligne AP la partie $AB = a$; & ayant mené les droites $BE = b$, $AD = c$, paralleles à PM & du même côté, on tirera la ligne AE indéfinie du côté de E, & la droite indéfinie DM parallele à AE. Je dis que cette ligne DM renfermée dans l'angle PAQ fait par la ligne AP & par la droite AQ menée parallelement à PM & du même côté, ſera la ligne de cette équation ou formule. Car ayant mené d'un de ſes points quelconques M la ligne MP parallele à AQ & qui rencontre AE en F ; les triangles ſemblables ABE, APF, donneront $AB\,(a).\ BE\,(b) :: AP\,(x).\ PF = \frac{bx}{a}$. Et partant $PM\,(y) = PF\left(\frac{bx}{a}\right) + FM\,(c)$. FIG. 160.

Le lieu de la troiſiéme formule $y = \frac{bx}{a} - e$ ſe conſtruit en cette ſorte. Ayant pris $AB = a$, & mené les droites $BE = b$, $AD = c$, paralleles à PM ; ſçavoir, BE du même côté que AQ, & AD du côté oppoſé ; on tirera par les points A, E, la droite AE indéfinie du côté de E, & par le point D la ligne DM parallele à AE, & qui rencontre AP en G. Je dis que la droite indéfinie GM renfermée dans l'angle PAQ, ſera le lieu qu'on cherche. Car on aura toûjours $PM\,(y) = PF\left(\frac{bx}{a}\right) - FM\,(c)$. FIG. 161.

Enfin pour avoir le lieu de la quatriéme formule $y = c - \frac{bx}{a}$. Ayant pris ſur AP la partie $AB = a$, & mené les droites $BE = b$, $AD = c$, paralleles à PM ; ſçavoir BE du côté oppoſé, & AD du même côté que AQ ; on tirera par les points A, E, la ligne AE indéfinie du côté de E, & par le point D la ligne DM parallele à AE, & qui rencontre en G la ligne AP. Je dis que la droite DG renfermée dans l'angle PAQ, ſera le lieu cherché. Car ayant mené d'un de ſes points quelconques M la ligne

MP parallele à AQ, & qui rencontre AE en F, on aura toûjours $PM\,(y)=FM\,(c)-PF\left(\frac{bx}{a}\right)$.

Si l'inconnuë x n'eſt multipliée par aucune fraction, les quatre formules précédentes ſe changeront en celles-ci.

1°. $y=x$, 2°. $y=x+c$, 3°. $y=x-c$, 4°. $y=c-x$, leſquelles ſe conſtruiſent de la même maniere, en obſervant de prendre la droite BE égale à AB que l'on prend de telle grandeur qu'on veut.

REMARQUE.

307. IL peut arriver que l'équation ſoit un lieu à la ligne droite, quoiqu'elle ne renferme qu'une des inconnuës x ou y; ce qui donne encore ces deux nouvelles formules, $y=c$, & $x=c$.

FIG. 163. Pour conſtruire la premiere formule $y=c$. Les mêmes choſes étant toûjours poſées que dans la définition premiere; on menera par le point fixe A, la droite $AD=c$ parallele à PM & du même côté, on tirera enſuite la droite indéfinie DM parallele à AP: je dis que cette ligne DM ſera le lieu de l'équation propoſée. Car ayant mené d'un de ſes points quelconques M la droite MP parallele à AD, il eſt clair qu'on aura toûjours $PM\,(y)=AD\,(c)$.

FIG. 164. Pour conſtruire la ſeconde formule $x=c$. Ayant pris $AP=c$, on tirera la droite indefinie PM qui faſſe avec AP l'angle APM donné ou pris à volonté: je dis qu'elle ſera le lieu de tous les points M. Car ayant mené d'un de ſes points quelconques M, la droite MQ parallele à AP, & qui rencontre au point Q l'indéfinie AQ parallele à PM; il eſt clair qu'on aura toûjours MQ ou $AP\,(x)=c$, de quelque grandeur que l'on puiſſe prendre $PM\,(y)$.

AVERTISSEMENT.

Je crois qu'il eſt à propos pour éclairer l'eſprit des Lecteurs, de leur donner une idée de la méthode dont

je vais me ſervir pour la conſtruction des lieux du ſecond degré. Elle conſiſte à conſtruire d'abord une Parabole en ſorte que l'équation qui en exprime la nature ſoit la plus compoſée qu'il ſe puiſſe, de faire enſuite la même choſe dans l'Ellipſe, & dans l'Hyperbole rapportée à ſes diametres & conſiderée entre les aſymptotes ; ce qui fournit des équations ou formules generales. J'examine ce qu'elles ont chacune de particulier, afin qu'une équation étant propoſée, je puiſſe connoître à laquelle de ces formules elle doit être rapportée ; & comparant enſuite tous ſes termes avec ceux de la formule, j'en tire la conſtruction du lieu de cette équation, en obſervant certaines remarques qui ſervent pour toutes les formules. Tout ceci s'éclaircira parfaitement dans les Lemmes & Propoſitions qui ſuivent.

LEMME FONDAMENTAL.

Pour la conſtruction des lieux à la Parabole.

308. SOIENT comme dans la premiere définition deux lignes droites inconnuës & indéterminées $AP(x)$, $PM(y)$; & ſoient de plus des lignes droites données e, m, n, p, r, s. Cela poſé. FIG. 165. & 166.

1°. On prendra ſur la ligne AP, la partie $AB=m$; ayant mené les droites $BE=n$, $AD=r$, paralleles à PM & du même côté, on tirera par le point A la droite AE que j'appelle e, & par le point D la droite indéfinie DG parallele à AE ; ſur laquelle DG ayant pris la partie $DC=s$ du côté de PM, on décrira * du diametre CG qui ait pour parametre $CH=p$, & pour ordonnées des droites paralleles à PM ; une Parabole CM qui s'étende du même côté que AP. Je dis que ſa portion renfermée dans l'angle PAD, fait par la ligne AP, & par une ligne AD menée par le point fixe A parallelement à PM & du même côté, eſt le lieu de l'equation ou formule ſuivante. FIG. 165. * Art. 161.

$$yy - \frac{2n}{m}xy + \frac{nn}{mm}xx - 2ry + \frac{2nr}{m}x + rr = as.$$
$$- \frac{ep}{m}x + ps.$$

Car ayant mené d'un des points quelconques M de cette portion de Parabole, la ligne MP qui faſſe avec AP l'angle donné ou pris à volonte APM, & qui rencontre les paralleles AE, DG, aux points F, G; les triangles ſemblables ABE, APF, donneront ces deux proportions, AB $(m).AE(e)::AP(x).AF$ ou $DG = \frac{ex}{m}$. Et $AB(m).BE(n)::AP(x).PF = \frac{nx}{m}$. Et par conſéquent GM ou $PM - PF - FG = y - \frac{nx}{m} - r$, & CG ou $DG - DC = \frac{ex}{m} - s$. Or la Parabole donne* $\overline{GM}^2 = CG \times CH$, laquelle équation ſe change en la précédente en mettant pour ces lignes leurs valeurs analytiques. Donc &c.

* *Art.* 19.

FIG. 166. 2°. On menera par le point fixe A, une ligne droite indéfinie AQ parallele à PM & du même côté; & ayant pris ſur cette ligne la partie $AB = m$, on tirera $BE = n$ parallele à AP & du même côté que PM, & par les points déterminés A, E, la ligne AE que j'appelle e; & ayant pris ſur AP la partie $AD = r$ du même côté que PM, on tirera la droite indéfinie DG parallele à AE, ſur laquelle on prendra la partie $DC = s$ auſſi du même côté de PM. On décrira* enſuite du diametre CG qui ait pour parametre $CH = p$, & pour ordonnées des droites paralleles à AP, une Parabole CM qui s'étende du même côté que AQ. Je dis que ſa portion renfermée dans l'angle BAP, ſera le lieu de cette ſeconde équation ou formule.

* *Art.* 161.

$$xx - \frac{2n}{m}yx + \frac{nn}{mm}yy - 2rx + \frac{2nr}{m}y + rr = as.$$
$$- \frac{ep}{m}y + ps.$$

Car ayant mené d'un de ſes points quelconques M, la ligne MQ parallele à AP, & qui rencontre les paral-

lèles AE, DG, aux points F, G ; les triangles ſemblables ABE, AQF, donneront ces deux proportions, $AB\,(m).\,AE\,(e) :: AQ$ ou $PM\,(y).\,AF$ ou $DG = \frac{ey}{m}$. Et $AB\,(m).\,BE\,(n) :: AQ\,(y).\,QF = \frac{ny}{m}$. Et par conſéquent GM ou $QM - QF - FG = x - \frac{ny}{m} - r$, & CG ou $DG - DC = \frac{ey}{m} - s$. Et la Parabole donne $\overline{GM}^2 = CG \times CH$, laquelle équation ſe change en la précédente en mettant pour ces lignes leurs valeurs analytiques. Donc &c.

COROLLAIRE.

309. IL eſt clair 1°. Que dans la premiere de ces équations ou formules, le quarré yy ſe trouve ſans fraction, & que dans la ſeconde c'eſt le quarré xx. 2°. Que dans ces deux formules les deux quarrés yy & xx s'y trouvent avec les mêmes lignes, en ſorte que le quarré $\frac{nn}{mm}$ de la moitié de la fraction $\frac{2n}{m}$ qui multiplie le plan xy, multiplie l'un des quarrés xx ou yy ; d'où il ſuit que ſi le plan xy ne ſe rencontroit point dans l'une ou l'autre de ces deux formules, le quarré $\frac{nnxx}{mm}$ ou $\frac{nnyy}{mm}$ ne s'y rencontreroit point non plus, puiſqu'alors la fraction donnée $\frac{2n}{m}$ ſeroit nulle.

PROPOSITION II.

Problême.

310. CONSTRUIRE *le lieu d'une équation donnée, dans laquelle le plan* xy *ne ſe rencontrant point, il n'y a qu'un des deux quarrés* xx *&* yy ; *ou bien le plan* xy *s'y rencontrant, les deux quarrés* xx *&* yy *s'y rencontrent auſſi avec les mêmes ſignes, en ſorte que le quarré de la moitié de la*

fraction qui multiplie xy, *ſoit égal à celle qui multiplie le quarré de l'une des inconnuës. On ſuppoſe toûjours qu'il y ait un des quarrés* xx *ou* yy *qui ſoit délivré de fractions.*

On comparera chaque terme de l'équation donnée, avec celui qui lui répond dans la premiere formule du Lemme précédent, ſi le quarré yy s'y rencontre ſans fraction ; ou avec celui qui lui répond dans la ſeconde formule, lorſque c'eſt le quarré xx. On tirera enſuite de la comparaiſon de ces termes, des valeurs des quantités e, m, n, p, r, s, par le moyen deſquelles on décrira comme l'on a enſeigné dans le Lemme (en ſe ſervant des deux Remarques ſuivantes) une Parabole qui ſera le lieu cherché.

REMARQUE I.

311. 1°. ON prendra pour AB (m) telle grandeur poſitive que l'on voudra. 2°. Les lignes AB (m), BE (n) étant données, la ligne AE (e) l'eſt auſſi puiſque l'angle ABE eſt donné. 3°. Lorſque $n=e$, la ligne AE tombe ſur AB, c'eſt à dire, ſur AP dans la conſtruction de la premiere formule, & ſur AQ dans celle de la ſeconde : alors on aura AB $(m)=AE$ (e), puiſque les points B, E, ſe confondront alors enſemble. 4°. Lorſque la valeur de l'une des quantités n, r, s, eſt négative, il faut prendre ou mener la ligne qu'elle exprime du côté oppoſé à celui de PM ; au lieu qu'il la faut mener du même côté, comme l'on a fait dans le Lemme, lorſqu'elle eſt poſitive.

REMARQUE II.

312. S'IL arrive que la valeur du parametre CH (p) ſoit négative, il faudra que la Parabole s'étende du côté oppoſé à celui du Lemme : c'eſt à dire, du côté oppoſé à celui vers lequel s'étend l'indéterminée AP dans la conſtruction de la premiere formule, & l'indéterminée

terminée AQ dans celle de la seconde. Tout ceci s'éclaircira parfaitement par les Exemples qui suivent.

EXEMPLE I.

313. SOIT $yy - 2ay - bx + cc = o$ l'équation donnée, dont il faut construire le lieu.

Comme le quarré yy se trouve ici sans fraction, je choisis la premiere formule * du Lemme, de laquelle comparant chaque terme avec celui qui lui répond dans la proposée, j'ai 1°. $\frac{2n}{m} = o$, parce que le plan xy ne se rencontrant point dans la proposée, on doit regarder ce plan comme étant multiplié par zero; d'où je tire $n = o$, & par conséquent * $m = e$: c'est pourquoi effaçant dans la formule tous les termes ou $\frac{n}{m}$ se rencontre, & mettant au lieu de e sa valeur m, je trouve $yy - 2ry - px + rr + ps = o$. 2°. La comparaison des termes correspondans $-2ry$ & $-2ay$ donne $r = a$. 3° Celle de $-px$ & $-bx$ fournit $p = b$. 4°. Celle des termes où les inconnues x & y ne se trouvent point, donne enfin $rr + ps = cc$, d'où en mettant pour r & p leurs valeurs a & b, je tire $s = \frac{cc - aa}{b}$ qui est une valeur négative lorsque a surpasse c, comme on le suppose ici. Je n'ai point comparé les premiers termes yy & yy entr'eux; parce qu'étant précisément les mêmes, cela ne feroit rien connoître. Or les valeurs de n, r, p, s, étant ainsi déterminées, je construits le lieu en me servant de la construction * de la formule, & observant ce qu'il y a dans la premiere † Remarque en cette sorte.

* *Art.* 308. n. 1.

* *Art.* 311.

* *Art.* 308. n. 11.

† *Art.* 311.

Puisque $BE\ (n) = o$, les points B, E, se confondent, & la ligne AE tombe * sur AP; c'est pourquoi je mene d'abord par le point fixe A la ligne $AD\ (r) = a$ parallele à PM, & du même côté, parce que sa valeur est positive. Je tire ensuite DG parallele à AP, sur laquelle je prends $DC = \frac{aa - cc}{b} = -s$ du côté opposé à

* *Art.* 311.

FIG. 167.

PM; parce que $s = \frac{cc-aa}{b}$, qui eſt une valeur négative.

* *Art.* 161. Je décris enfin * du diametre CG (qui ait pour parametre la ligne $CH\ (p) = b$, & pour ordonnées des droites paralleles à PM) une Parabole; & je dis que ſes deux portions OMM, RMS, renfermées dans l'angle PAO fait par AP & par la ligne AO menée parallelement à PM & du même côté, ſera le lieu de l'equation donnée.

Car menant d'un de leurs points quelconques M, la ligne MP qui faſſe avec AP l'angle donné ou pris à volonte APM, & qui rencontre DG au point G; on aura $GM = y-a$, ou $GM = a-y$, ſelon que le point M tombera audeſſus ou audeſſous du diametre CG; & CG ou

* *Art.* 19. $DG + CD = x + \frac{aa-cc}{b}$; & partant * par la proprieté de la Parabole, $\overline{GM}^2\ (yy-2ay+aa) = CG * CH\ (bx+aa-cc)$, c'eſt à dire $yy-2ay-bx+cc = 0$, qui eſt l'équation donnee. Donc &c.

REMARQUE.

314. SI l'on prolonge AO de l'autre côté de A vers X, il faut remarquer,

1°. Que la portion indéfinie SM de la Parabole, renfermée dans l'angle SAX, ſera le lieu de toutes les valeurs fauſſes & de l'inconnuë y, qui répondent aux valeurs vraies de l'autre inconnuë x dans l'équation donnée. En effet ſi l'on prend AP plus grande que AS, & qu'on mene PM parallele à AX, & du même côté, laquelle rencon-

* *Art.* 304. tre la portion SM en M; l'on aura * $PM = -y$, & partant la droite GM ou $GP + PM = a-y$, & on retrouvera par la proprieté de la Parabole, comme ci-deſſus, l'équation donnée.

2°. Que la portion RCO de cette Parabole, qui tombe dans l'angle TAO oppoſé au ſommet à l'angle SAX, ſera le lieu de toutes les valeurs vraies de l'inconnuë y

dans l'équation donnée, qui répondent aux valeurs fauſſes de l'autre inconnuë x; car faiſant * $AP = -x$, on retrouvera encore l'équation donnée. * Art. 304.

3°. Que s'il tomboit une portion de cette Parabole dans l'angle TAX oppoſé au ſommet à l'angle PAO elle ſeroit le lieu des valeurs fauſſes de l'inconnuë y, qui répondroient aux valeurs fauſſes de l'autre inconnuë x. De ſorte que cette Parabole eſt le lieu complet de toutes les valeurs tant vraies que fauſſes de l'inconnuë y, qui répondent à toutes les valeurs tant vraies que fauſſes de l'autre inconnuë x dans l'équation donnée $yy - 2ay - bx + cc = o$.

D'où l'on voit que dans cet Exemple il y a deux valeurs vraies PM, PM, de l'inconnuë y, qui répondent à la même valeur vraie AP de l'autre inconnuë x, lorſque cette ligne AP eſt moindre que AS; qu'il y a une valeur vraie PM, & une fauſſe $-PM$, lorſque AP ſurpaſſe AS; qu'il n'y a qu'une valeur vraie SV de y, l'autre étant nulle ou zero, lorſque $AP = AS$; qu'il y a deux valeurs vraies PM, PM, de l'inconnuë y, qui répondent à la même valeur fauſſe $-AP$ de l'inconnuë x, lorſque AP eſt moindre que AT; que ces deux valeurs deviennent égales chacune à la Tangente TC, lorſque $AP = AT$; & qu'enfin ſi l'on prenoit $AP\,(-x)$ plus grande que AT, comme l'appliquée PM ne rencontreroit alors la Parabole en aucun point, il s'enſuivroit qu'il n'y auroit aucune valeur vraie ou fauſſe de l'inconnuë y, qui pût répondre à cette valeur fauſſe $-AP$ de l'autre inconnuë x: c'eſt à dire que les valeurs de l'inconnuë y deviendroient en ce cas imaginaires.

Tout ceci ſe doit entendre de la même maniere dans tous les autres exemples qui ſuivent, tant dans la Parabole que dans les autres Sections Coniques: de ſorte que la Section Conique qu'on trouvera, ſera non-ſeulement le lieu de toutes les valeurs vraies de l'inconnuë y par rapport aux valeurs vraies de l'autre inconnuë x;

mais auſſi celui de toutes les valeurs tant vraies que fauſſes de l'inconnuë y par rapport aux valeurs tant vraies que fauſſes de l'autre inconnuë x.

EXEMPLE II.

315. SOIT l'équation donnée $yy + \frac{2b}{a}xy + \frac{bb}{aa}xx + 2cy - bx + cc = o$, dont il faille conſtruire le lieu.

Comme le quarré yy eſt ici ſans fraction, je choiſis de même que dans l'Exemple précédent, la premiere formule * du Lemme ; & j'ai par la comparaiſon de ſes termes avec ceux qui leur répondent dans la propoſée,

* *Art.* 308. n. 1.

* *Art.* 311. 1°. $\frac{2n}{m} = -\frac{2b}{a}$; d'où en faiſant * $m = a$, je tire $n = -b$.

2°. $\frac{nn}{mm} = \frac{bb}{aa}$; d'où il vient, comme ci-deſſus, $n = -b$.

3°. $r = -c$. 4°. $\frac{2nr - ep}{m} = -b$; & partant $p = \frac{ab + 2bc}{e}$, en mettant pour m, n, r, leurs valeurs a, $-b$, $-c$.

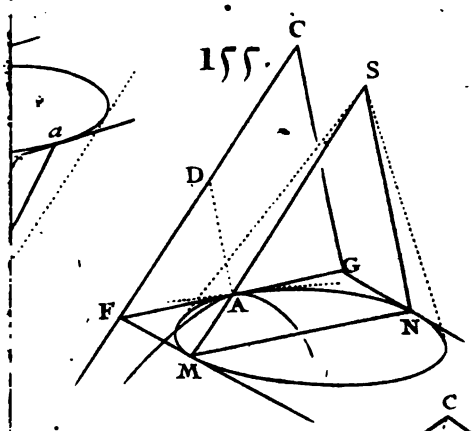
5°. $rr + ps = cc$, ce qui donne $s = o$, en mettant pour rr ſa valeur cc. Or ces valeurs de m, n, r, p, s, étant ainſi déterminées, je conſtruis le lieu de cette équation en me ſervant de la conſtruction * de la premiere formule en cette ſorte.

* *Art.* 308. n. 1.

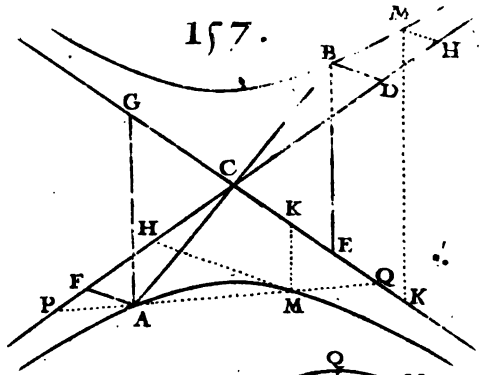
FIG. 168. Ayant pris ſur la ligne AP la partie $AB\ (m) = a$, je mene les droites $BE = b = -n$, $AD = c = -r$ paralleles à PM, & du côté oppoſé, parce que $n = -b$ & $r = -c$ qui ſont des valeurs négatives. Je tire enſuite par les points déterminées A, E, la ligne $AE\ (e)$ qui eſt donnée, & par le point D la ligne DG parallele à AE. Cela fait comme $DC\ (s)$ eſt nulle ou zero, le point C tombe ſur D ; c'eſt pourquoi je décris * du diametre DG (qui ait pour parametre $DH\ (p) = \frac{ab + 2bc}{e}$, & pour ordonnées des droites paralleles à PM) une Parabole ; & je dis que ſa portion OM renfermée dans l'angle PAH, où l'on ſuppoſe que doivent tomber tous les points M, ſera le lieu de l'équation donnée.

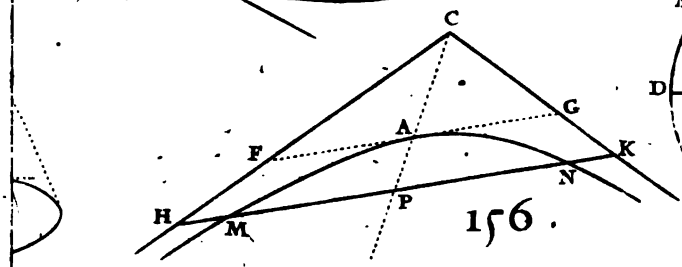
* *Art.* 161.

155.



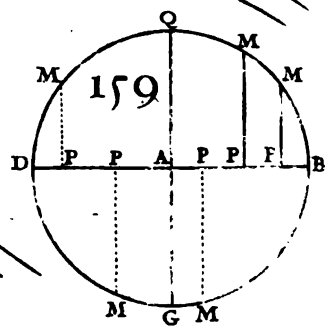
157.



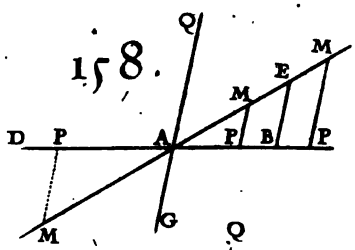


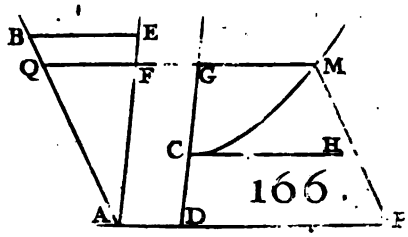
156.

159



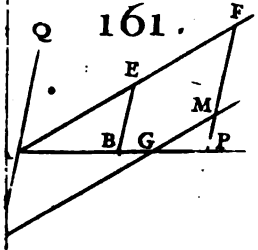
158.



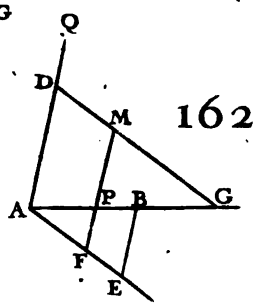


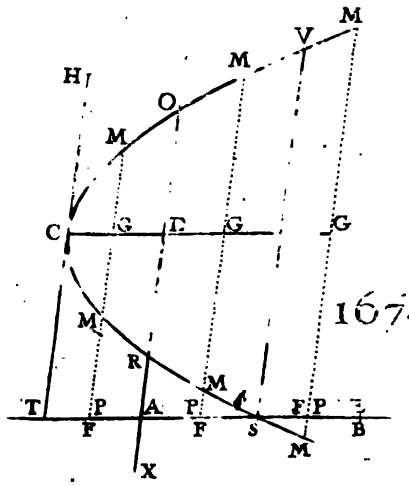
166.

161.



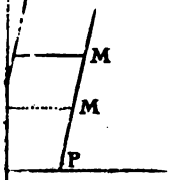
162.





167.

164.



165.

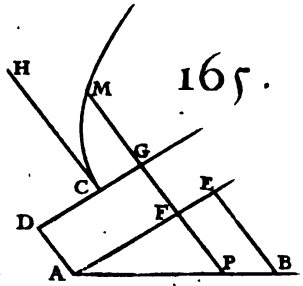


Planche 18. pag. 220.

Car ayant mené d'un de ſes points quelconques M, la ligne MP qui faſſe avec AP l'angle donné ou pris à volonté APM, & qui rencontre les paralleles AE, DG, aux points F, G; les triangles ſemblables ABE, APF, donneront ces deux proportions, $AB\ (a).\ AE\ (e) :: AP\ (x).\ AF$ ou $DG = \frac{ex}{a}$. Et $AB\ (a).\ BE\ (b) :: AP\ (x).\ PF = \frac{bx}{a}$. Et par conſéquent GM ou $PM + PF + FG = y + \frac{bx}{a} + c$. Or par la proprieté * de la Parabole, $\overline{GM}^2 = GD * DH$, c'eſt à dire, en mettant les valeurs analytiques, $yy + \frac{2b}{a}xy + \frac{bb}{aa}xx + 2cy - bx + cc = o$. Donc &c. * *Art.* 19.

REMARQUE I.

316. Si la ligne AP ne coupoit point la Parabole, mais qu'elle la touchât ou qu'elle tombât toute entiere au dehors, il s'enſuivroit qu'aucun des points cherchés M ne pourroit tomber dans l'angle PAH, comme l'on avoit ſuppoſé en faiſant la conſtruction; & qu'ainſi il n'y auroit aucune valeur vraie de l'inconnuë y qui répondit à une valeur vraie de l'autre inconnuë x, de quelque grandeur qu'elle pût être. FIG. 168.

Cette Remarque eſt générale pour tous les Exemples pareils à celui ci, non-ſeulement dans la Parabole, mais auſſi dans les autres Sections.

REMARQUE II.

317. Il eſt à propos de remarquer que ſi l'on avoit pris pour $AB\ (m)$ une autre grandeur que a, telle qu'elle pût être, les valeurs de $BE\ (n)$ & de $AE\ (e)$ changeroient à la verité: mais les rapports $\frac{n}{m}$, $\frac{e}{m}$, demeureroient toûjours les mêmes; parce que dans le triangle ABE l'angle ABE eſt donné, comme auſſi la raiſon

du côté AB au côté BE, ſçavoir dans cet Exemple $\frac{n}{m} = \frac{b}{a}$. Or comme il n'y a que ces raiſons de $\frac{n}{m}$, $\frac{e}{m}$, qui ſe puiſſent trouver dans les valeurs de p, r, s; il s'enſuit que ces valeurs demeurent toûjours les mêmes, telle grandeur poſitive que l'on puiſſe prendre pour la ligne AB (m): de ſorte qu'on n'a pris $m = a$ que pour rendre la conſtruction plus ſimple. Ce que l'on doit toûjours obſerver dans la ſuite.

EXEMPLE III.

318. ON demande le lieu de l'équation donnée $xx + \frac{2b}{a}yx + \frac{bb}{aa}yy - 2cx + by - \frac{2bc}{a}y = o$.

Comme c'eſt ici le quarré xx qui eſt délivré de fractions, je choiſis la ſeconde formule * du Lemme; & j'ai par la comparaiſon des termes correſpondans, 1°. $\frac{2n}{m} = -\frac{2b}{a}$; d'où en faiſant $m = a$, je tire $n = -b$. 2°. $\frac{nn}{mm} = \frac{bb}{aa}$; & partant, puiſque $m = a$, on trouve comme ci-deſſus $n = -b$. 3°. $r = c$. 4°. $\frac{2nr - ep}{m} = b - \frac{2bc}{a}$; ce qui donne $p = -\frac{ab}{e}$, en mettant à la place de m, n, r, leurs valeurs a, $-b$, c. 5°. $rr + ps = o$; parce que dans l'équation donnée il ne ſe trouve point de termes entierement connus, que l'on puiſſe comparer au terme $rr + ps$ de la formule; ce qui donne $s = -\frac{rr}{p} = \frac{cce}{ab}$, en mettant pour r & p leurs valeurs c & $-\frac{ab}{e}$. Or ces valeurs étant ainſi déterminées, je conſtruis le lieu requis en me ſervant de la conſtruction de la ſeconde formule * du Lemme, & obſervant exactement les articles 311. & 312. de la maniere qui ſuit.

* *Art.* 308. *n.* 1.

* *Art.* 308. *n.* 2.

FIG. 169. Ayant mené par le point fixe A, une ligne indéfinie AQ parallele à PM; je prens ſur cette ligne la partie AB (m) $= a$; & du point B je tire $BE = b = -n$ parallele à AP, & du côté oppoſé à PM, parce que la

valeur de n est négative ; & par les points déterminés A, E, la ligne AE (e) qui est donnée. Ayant pris sur AP la partie AD (r) $= c$ du côté de PM, je tire la droite indéfinie DG parallele à AE, sur laquelle je prends la partie DC (s) $= \frac{ccc}{ab}$ du côté de PM. Je décris ensuite * du diametre CG (qui ait pour ordonnées des droites paralleles à AP, & pour parametre la ligne $CH = \frac{ab}{e} = -p$) une Parabole qui s'étende * du côté opposé à celui où s'étend AQ, parce que $p = -\frac{ab}{e}$ qui est une valeur négative. Je dis que la portion OMR de cette Parabole, renfermée dans l'angle PAB, sera le lieu qu'on cherche.

* Art. 161.

* Art. 312.

Car ayant mené d'un de ses points quelconques M, la ligne MQ parallele à AP, & qui rencontre les paralleles AE, DG, aux points F, G ; les triangles semblables ABE, AQF, donneront ces deux proportions, AB (a). AE (e) :: AQ ou PM (y). AF ou $DG = \frac{ey}{a}$. Et AB (a). BE (b) :: AQ (y). $QF = \frac{by}{a}$. Et par conséquent GM ($QM + FQ - FG$) $= x + \frac{by}{a} - c$, ou GM ($FG - FQ - QM$) $= c - \frac{by}{a} - x$, selon que le point M tombe de part ou d'autre du diametre CD ; & la coupée CG ou $CD - DG = \frac{ccc}{ab} - \frac{ey}{a}$. Or * par la proprieté de la Parabole, $\overline{GM}^2 = CG * CH$: c'est à dire, en mettant à la place de ces lignes leurs valeurs analytiques $xx + \frac{2b}{a}yx + \frac{bb}{aa}yy - 2cx + by - \frac{2bc}{a}y = o$, qui est l'équation donnée. Donc &c.

* Art. 19.

REMARQUE.

319. S'IL arrivoit qu'en comparant les termes de l'équation donnée avec ceux de la formule, on trouvât que $p = o$; il est visible que la construction de la Parabole qui en devroit être le lieu, seroit impossible. Mais il faut bien remarquer que l'équation donnée se

peut toûjours alors abaiſſer en ſorte que ſon lieu devient
* *Art.* 308. une ligne droite ; ce qui ſe voit par les formules * du Lemme. Car effaçant, par exemple, dans la premiere les termes où p ſe rencontre, il vient $yy - \frac{2n}{m}xy + \frac{nn}{mm}xx - 2ry + \frac{2nr}{m}x + rr = o$, de laquelle extrayant la racine quarré, on trouve $y - \frac{nx}{m} - r = o$, ou $y = \frac{nx}{m} + r$, dont le lieu eſt une ligne droite que l'on conſtruira ſelon l'article 306. La même choſe arrivera de la ſeconde formule de l'article 308.

EXEMPLE IV.

320. SOIT propoſée l'equation $xx - ay = o$, de laquelle il faut trouver le lieu.

Comme c'eſt ici le quarré xx qui ſe trouve délivré de
* *Art.* 308. *n.* 1. fractions, je choiſis la ſeconde formule * du Lemme ; & j'ai par la comparaiſon des termes qui ſe répondent ; 1°. $\frac{2n}{m} = o$, parce que xy ne ſe trouve point dans la
* *Art.* 311. propoſée ; d'où je tire $n = o$, & par conſéquent * $m = e$. 2°. $\frac{nn}{mm} = o$, parce que le quarré yy ne s'y trouve pas non plus ; d'où je tire encore $n = o$. 3°. $r = o$, parce que l'inconnuë x ne ſe trouve point au premier degré dans la propoſée : c'eſt pourquoi effaçant dans la formule tous les termes où $\frac{n}{m}$ & r ſe rencontrent, & mettant pour e ſa valeur m ; il vient $xx - py + ps = o$, dont il reſte à comparer les termes avec ceux qui leur répondent dans la propoſée. 4°. La comparaiſon des termes $-py$ & $-ay$ donnent $p = a$. 5°. Puiſque dans la propoſée il ne ſe trouve aucun terme entierement connu que l'on puiſſe comparer au terme ps ; il s'enſuit que $ps = o$, & qu'ainſi $s = o$. Or ces valeurs de n, r, p, s, ainſi déterminées me ſervent à conſtruire le lieu qu'on demande, ayant égard à la conſtruction de la ſeconde formule de
* *Art.* 311. l'article 308. & à l'article 311. en cette ſorte.

FIG. 170. Puiſque BE $(n) = o$, la ligne AE tombe * ſur AQ menée parallelement à PM & du même côté ; comme auſſi

auſſi DG, parce que $AD\,(r) = o$. Or puiſque $CD\,(s) = o$, le point C tombe ſur le point D lequel tombe en A comme l'on vient de voir. Je décris donc * une Parabole du diametre AQ, qui ait pour parametre $AH\,(p) = o$, & pour ordonnees des droites MQ paralleles à AP : je dis que ſa portion indéfinie AM renfermée dans l'angle PAQ, eſt le lieu cherché. * Art. 161.

Car ayant mené d'un de ſes points quelconques M les droites MP, MQ, paralleles à AQ & à AP, on aura par la proprieté * de la Parabole $QM^2\,(xx) = AQ * AH\,(ay)$, & partant $xx - ay = o$, qui étoit l'équation propoſée. *Ce qu'il falloit démontrer.* * Art. 193.

DÉMONSTRATION DU PROBLEME.

321. SI l'on met dans la formule générale * à la place de m, n, r, s, p, les valeurs que l'on aura trouvées par la comparaiſon de ces termes avec ceux de l'équation propoſée, telle qu'elle puiſſe être, pourvû qu'elle ait les conditions marquées dans le Problême ; il eſt clair que cette formule générale ſe changera en la propoſée : & partant que ſi l'on prend auſſi ces valeurs dans la conſtruction * du Lemme, le lieu de la formule générale ſe changera en celui de l'équation propoſée. Or c'eſt ce qu'on a enſeigné dans le Problême accompagné de ſes deux Remarques, comme les Exemples précédens le font aſſés voir. Donc &c. * Art. 308. * Art. 308.

LEMME FONDAMENTAL.

Pour la conſtruction des lieux à l'Ellipſe ou au Cercle.

322. SOIENT encore comme dans la définition premiere deux lignes droites inconnuës & indéterminées $AP\,(x)$, $PM\,(y)$; & ſoient de plus des lignes droites données m, n, p, r, s, t. Cela poſé, FIG. 171.

On prendra sur la ligne AP, la partie $AB = m$; & ayant mené les droites $BE = n$, $AD = r$, paralleles à PM, & du même côté, on tirera par le point A la droite AE qui est donnée, & que j'appelle e; & par le point D, la droite indéfinie DG parallele à AE, sur laquelle on prendra la partie $DC = s$ du côté de PM; & de part & d'autre du point C, les parties CK, CL, égales chacune à t. On décrira ensuite une Ellipse * du diametre LK $(2t)$, qui ait pour parametre $KH = p$, & pour ordonnées des droites paralleles à PM. Je dis que sa portion OMR renfermée dans l'angle PAD fait par la ligne AP & par une ligne AD menée par le point fixe A parallelement à PM & du même côté, sera le lieu de l'équation ou formule générale que voici.

* Art. 161.

$$yy - \frac{2n}{m}xy + \frac{nn}{mm}xx - 2ry + \frac{2nr}{m}x + rr = o.$$
$$+ \frac{eep}{2mmt} \quad - \frac{2eps}{2mt} \quad - \frac{ptt}{2t} \quad + \frac{pss}{2t}$$

Car ayant mené d'un des points quelconques M, de cette portion d'Ellipse, la ligne MP qui fasse avec AP l'angle donné ou pris à volonté APM, & qui rencontre les paralleles AE, DG, aux points F, G; les triangles semblables ABE, APF, donneront AF ou $DG = \frac{ex}{m}$, & $PF = \frac{nx}{m}$. On aura donc $GM = y - \frac{ex}{m} - r$, & $CG = \frac{ex}{m} - s$. Or par la proprieté de l'Ellipse * $KL(2t).KH(p) :: LG * GK$ ou $\overline{CK}^2 - \overline{CG}^2 \left(tt - ss + \frac{2esx}{m} - \frac{eexx}{mm} \right). \overline{GM}^2 \left(yy - \frac{2n}{m}xy - 2ry + \frac{nn}{mm}xx + \frac{2nr}{m}x + rr \right) = \frac{ptt - pss}{2t} + \frac{epsx}{mt} - \frac{epxx}{2mmt}$.

* Art. 55. & 41.

Donc &c.

S'il arrive que le diametre KL $(2t)$ & son parametre KH (p) soient égaux entr'eux, on aura toûjours $\overline{GM} = LG * GK$; d'où il est évident selon les Elemens de Geometrie, que si l'angle CGM est droit, l'Ellipse se changera alors en un cercle qui aura pour diametre la ligne KL.

COROLLAIRE.

323. Il eſt clair que les deux quarrés yy & xx ſe trouvent toûjours avec les mêmes ſignes dans cette formule ; & que lorſque le plan xy s'y rencontre, le quarré $\frac{nn}{mm}$ de la moitié de la fraction $\frac{2n}{m}$ qui multiplie ce plan, doit être moindre que la fraction $\frac{nn}{mm} + \frac{eep}{2mmt}$ qui multiplie le quarré xx.

PROPOSITION III.

Problême.

324. CONSTRUIRE *le lieu d'une équation donnée, dans laquelle les deux quarrés* y y *&* x x *ſe rencontrent avec les mêmes ſignes ſans le plan* x y, *ou avec ce plan, en ſorte que le quarré de la moitié de la fraction qui le multiplie, ſoit moindre que la fraction qui multiplie le quarré* x x. *On ſuppoſe toûjours ici que le quarré* y y *ſoit délivré de fractions.*

On comparera les termes de l'équation donnée, avec ceux qui leur répondent dans la formule générale * du Lemme précédent ; & on tirera de la comparaiſon de ces termes, des valeurs des quantités m, n, p, r, s, t, par le moyen deſquelles valeurs on décrira comme l'on a enſeigné dans ce Lemme (en obſervant exactement l'art. 311.) une Ellipſe qui ſera le lieu cherché.

* *Art.* 322.

EXEMPLE I.

325. Soit propoſé de trouver le lieu de cette équation $yy + xy + \frac{1}{2}xx - 2ay + bx + cc = o$, dans laquelle le quarré de $\frac{1}{2}$ moitié de la fraction $\frac{1}{1}$ ou 1 qui multiplie xy, eſt moindre que la fraction $\frac{1}{2}$ qui multiplie xx.

La comparaiſon de chaque terme de la formule générale

* *Art.* 322. du Lemme* avec celui qui lui répond dans cette équation, donne 1°. $\frac{2n}{m} = -1$; car n'y ayant ici aucune fraction litterale qui multiplie le plan xy, on le doit considerer comme étant multiplié par l'unité numerique 1 : & partant si l'on fait $m = a$, l'on aura $n = -\frac{1}{2}a$. 2°. $\frac{nn}{mm} + \frac{eep}{2mms} = \frac{1}{2}$; d'où l'on tire $\frac{p}{s} = \frac{mm-2nn}{ee} = \frac{aa}{2ee}$ en mettant pour m, n, leurs valeurs $a, -\frac{1}{2}a$: & par conséquent $p = \frac{aas}{2ee}$. 3°. $r = a$. 4°. $\frac{2nr}{m} - \frac{2eps}{2mt} = b$; d'où en mettant pour $m, n, r, \frac{p}{s}$, leurs valeurs $a, -\frac{1}{2}a, a, \frac{aa}{2ee}$, il vient $s = \frac{-2ae-2eb}{a}$. 5°. $rr - \frac{ptt}{2s} + \frac{pss}{2s} = cc$: & partant $tt = ss + \frac{2srr}{p} - \frac{2scc}{p} = ss + 4ee - \frac{4ccee}{aa}$, en mettant pour $\frac{p}{s}, r$, les valeurs $\frac{aa}{2ee}, a$, qu'on leur vient de trouver. Or les valeurs de m, n, r, s, t, p, étant ainsi déterminées, je décris l'Ellipse cherchée en me servant de la construction du Lem-

* *Art.* 322. me* & de l'article 311. en cette sorte.

FIG. 172. Je prens sur la ligne AP la partie $AB\ (m) = a$; & ayant mené parallelement à PM & du même côté la ligne $AD\ (r) = a$, & du côté opposé la droite $BE = \frac{1}{2}a = -n$, parce que $n = -\frac{1}{2}a$ qui est une valeur négative, je tire par le point A la droite $AE\ (e)$ qui est donnée ; & par le point D, la droite DG parallele à AE, sur laquelle je prends la partie $DC = \frac{2ae+2be}{a} = -s$ du côté opposé à PM ; & de part & d'autre du point C, les parties CK, CL, égales

* *Art.* 161. chacune à $t = \sqrt{ss + 4ee - \frac{4ccee}{aa}}$. Je décris ensuite* une Ellipse du diametre LK, qui ait pour ordonnées des droites paralleles à PM, & pour parametre la ligne $KH\ (p) = \frac{aas}{2ee}$. Je dis que sa portion OMR renfermée dans l'angle PAD, est le lieu de l'équation donnée.

Car ayant mené d'un de ses points quelconques M,

la ligne MP qui faſſe avec AP l'angle donné ou pris à volonté APM, & qui rencontre les paralleles AE, DG, aux points F, G; les triangles ſemblables ABE, APF donneront $AB\,(a).\,AE\,(e)::AP\,(x).\,AF$ ou $DG = \frac{ex}{a}$. Et $AB\,(a).\,BE\,(\frac{1}{2}a)::AP\,(x).\,PF = \frac{1}{2}x$. On aura donc $GM = y + \frac{1}{2}x - a$; & CG ou $DG + DC = \frac{ex}{a} - s$, puiſque $DC = -s$. Or par la propriété * de l'Ellipſe $KL\,(2t).\,KH\,(\frac{4st}{2ee})::LG * GK$ ou $\overline{CK}^2 - \overline{CG}^2$ $(tt - ss + \frac{2esx}{a} - \frac{eexx}{aa})$. $\overline{GM}^2$ $(yy + xy - 2ay + \frac{1}{4}xx - ax + aa)$. D'où en mettant à la place de $tt - ss$ & de s, leurs valeurs $4ee - \frac{4cccc}{aa}$ & $-\frac{2ae-2be}{a}$, multipliant enſuite les extrêmes & les moyens, & diviſant de part & d'autre par $2t$, l'on retrouve l'équation même propoſée. Donc &c.

* *Art.* 55. & 41.

REMARQUE.

326. S'IL arrive que $ss + 4ee$ ſoit égale ou moindre que $\frac{4cccc}{aa}$, il eſt évident que la valeur de t deviendra nulle ou imaginaire; & qu'ainſi il ſera pour lors impoſſible de conſtruire l'Ellipſe qui devroit être le lieu de l'équation donnée. Et comme cette équation renfermeroit néceſſairement des contradictions, il s'enſuit qu'il ne pourroit y avoir aucune ligne qui en pût être le lieu; c'eſt à dire que toutes les valeurs de l'inconnuë y qui devroient répondre à toutes les valeurs tant vraies que fauſſes de l'autre inconnuë x, ſeroient toutes imaginaires.

Ceci ſe voit clairement dans la formule générale * du Lemme qui, en tranſpoſant quelques termes, devient $yy - \frac{2n}{m}xy - 2ry + \frac{nn}{mm}xx + \frac{2nr}{m}x + rr = \frac{ppt - pss}{2f} + \frac{2pesx}{2mf} - \frac{eepxx}{2mmf}$, dans laquelle équation le premier membre eſt le quarré de $y - \frac{n}{m}x - r$; & le ſecond, le quarré de s

* *Art.* 322.

moins le quarré de $s - \frac{ex}{m}$, multiplié par la fraction $\frac{p}{2t}$. Or il eſt viſible que ſi la valeur du quarré tt eſt nulle ou négative, la valeur de ce ſecond membre ſera négative; & qu'ainſi l'on aura dans ces deux cas un quarré, ſçavoir le premier membre, égal à une valeur négative; ce qui eſt une contradiction manifeſte.

EXEMPLE II.

327. ON demande le lieu de l'équation $yy + \frac{b}{a}xy + xx + cy + fx - ag = e$, dans laquelle on ſuppoſe ſuivant l'art. 323. que $\frac{bb}{4aa}$ eſt moindre que la fraction $\frac{1}{1}$ ou 1 qui multiplie le quarré xx; c'eſt à dire que b eſt moindre que $2a$.

* Art. 322. La comparaiſon des termes de la formule * générale avec ceux qui leur répondent dans l'équation propoſée, donne 1°. $\frac{2n}{m} = -\frac{b}{a}$; d'où en faiſant $m = a$, on tire $n = -\frac{1}{2}b$ 2°. $\frac{nn}{mm} + \frac{epp}{2mmt} = 1$; d'où en mettant pour m, n, leurs valeurs a, $-\frac{1}{2}b$, l'on tire $\frac{p}{t} = \frac{4aa-bb}{2ee}$: & partant $p = \frac{4aat-bbt}{2ee}$. 3°. $r = -\frac{1}{2}c$. 4°. $s = \frac{bce-2afe}{4aa-bb}$. 5°. $t = \sqrt{ss + \frac{ccee+4agee}{4aa-bb}}$. Ce qui fournit cette conſtruction.

Fig. 173. Ayant pris ſur la ligne droite indéfinie AP la partie $AB\,(m) = a$, & mené parallelement à PM & du côté oppoſé les droites $BE = \frac{1}{2}b = -n$, $AD = \frac{1}{2}c = -r$, on tirera par le point A la droite $AE\,(e)$ qui eſt donnée, & par le point D la droite DG parallele à AE, ſur laquelle on prendra la partie $DC\,(s) = \frac{bce-2afe}{4aa-bb}$ du côté de PM, ſi bc ſurpaſſe $2af$, comme on le ſuppoſe ici; & du côté oppoſé, s'il eſt moindre; enſuite on prendra de part & d'autre du point C, les parties CK & CL égales chacune à $t = \sqrt{ss + \frac{ccee+4agee}{4aa-bb}}$. Cela fait, on décrira * une

* Art. 161.

Ellipſe du diametre LK $(2t)$ qui ait pour ordonnées des droites paralleles à PM, & pour parametre une ligne KH $(p) = \frac{4aat-bbt}{2ee}$. Je dis que ſa portion OR ſera le lieu de l'équation propoſée.

Car ayant mené d'un de ſes points quelconques M, la droite MP qui faſſe avec AP l'angle donné ou pris à volonté APM, & qui rencontre les paralleles AE, LK, aux points F, G; on aura $PF = \frac{bx}{2a}$, & AF ou $DG = \frac{ex}{a}$; ce qui donnera MG ou $MP + PF + FG = y + \frac{bx}{2a} + \frac{1}{2}c$, & $CG = \frac{ex}{a} - s$ ou $s - \frac{ex}{a}$. Or par la proprieté * de l'Ellipſe $LK(2t).KH\left(\frac{4aat-bbt}{2ee}\right) :: LG \times GK\left(tt - ss + \frac{2esx}{a} - \frac{eexx}{aa}\right).\overline{GM}^2\left(yy + \frac{b}{a}xy + cy + \frac{bbxx}{4aa} + \frac{2a}{bc}x + \frac{1}{2}cc\right)$. Ce qui (en mettant pour $tt - ss$ & pour s leurs valeurs $\frac{ccee+4agee}{4aa-bb}$ & $\frac{bce-2afe}{4aa-bb}$, multipliant enſuite les extrêmes & les moyens, & diviſant par $2t$) donne l'équation même propoſée.

* *Art.* 55. & 41.

Il eſt à propos de remarquer que ſi l'angle AEB étoit droit, l'angle CGM le ſeroit auſſi; & le diametre LK $(2t)$ ſeroit égal au parametre $KH\left(\frac{4aat-bbt}{2ee}\right)$, puiſque $ee = aa - \frac{1}{4}bb$ à cauſe du triangle rectangle AEB. D'où l'on voit que l'Ellipſe deviendroit alors un cercle qui auroit pour rayon la droite CK ou CL $(t) = \sqrt{ss + \frac{1}{4}cc + ag}$, & que $DC(s) = \frac{bc-2af}{4e}$; ce qui rend la conſtruction beaucoup plus ſimple.

EXEMPLE III.

328. SOIT propoſé de trouver le lieu de l'équation $yy + xx - ax = o$.

Je compare les termes de la formule * générale, avec ceux qui leur répondent dans l'équation donnée; & j'ai 1°. $\frac{2n}{m} = o$, parce que le terme xy manquant, on le doit

* *Art.* 322.

conſiderer comme étant multiplié par zero ; d'où je tire $n = o$: & partant $m = e$. 2°. $\frac{nn}{mm} + \frac{eep}{2mms} = 1$; c'eſt à dire, $\frac{p}{2t} = 1$ en mettant pour n & m leurs valeurs o & e : & partant $p = 2t$. 3°. $r = o$; parce que l'inconnuë y ne ſe trouvant point au premier degré dans l'équation donnée, on la doit auſſi conſiderer comme étant multipliée par zero : c'eſt pourquoi effaçant dans la formule generale * tous les termes où $\frac{n}{m}$ & r ſe rencontrent, & mettant pour e & $\frac{p}{2t}$ leurs valeurs m & 1, elle ſe changera en celle-ci $yy + xx - 2sx - tt + ss = o$, dont il reſte à comparer les termes avec ceux de la propoſée. 4°. $2s = a$; & partant $s = \frac{1}{2}a$. 5°. $ss - tt = o$; puiſqu'il n'y a point de termes entierement connus dans l'équation donnée : & partant $tt = ss = \frac{1}{4}aa$; & en extrayant de part & d'autre la racine quarrée, $t = \frac{1}{2}a$. Or ces valeurs étant ainſi déterminées, je conſtruis le lieu en cette ſorte.

* *Art.* 322.

FIG. 174. Puiſque $BE\ (n) = o$, il s'enſuit que AE tombe ſur AP, laquelle tombe auſſi ſur DG, puiſqu'on a encore $AD\ (r) = o$; de ſorte que le point D tombe en A. C'eſt pourquoi prenant ſur AP, la partie $AC\ (s) = \frac{1}{2}a$ du côté de PM ; & de part & d'autre du point C, les parties CK, CL ; égales chacune à $t = \frac{1}{2}a$ (le point L tombe ici ſur le point A) ; on décrira * du diametre AK qui ait pour ordonnées des droites paralleles à PM, & pour parametre la ligne $KH\ (p) = 2t = a$, une Ellipſe qui ſera le lieu cherché.

* *Art.* 161.

Car ayant mené d'un de ſes points quelconques M la droite MP qui faſſe avec AP l'angle donné ou pris à volonté APM, on aura * $AK\ (a) . KH\ (a) :: AP + PK\ (ax - xx) . \overline{PM}^2\ (yy)$. Ce qui donne $yy + xx - ax = o$.

* *Art.* 55. & 41.

Il eſt évident que ſi l'angle APM eſt droit, l'Ellipſe devient alors un cercle qui a pour diametre la ligne $AK = a$.

REMARQ.

REMARQUE.

329. IL peut arriver deux differens cas, où le lieu de l'équation donnée eſt un cercle.

Premier cas. Lorſque les quarrés yy & xx ſe trouvent tous deux avec les mêmes ſignes & ſans fraction dans une équation, où le plan xy ſe trouve auſſi; & que de plus l'angle AEB eſt droit (ce qui arrive lorſqu'ayant mené AF perpendiculaire ſur PM la raiſon de PF à AP, qui eſt la même que celle de BE à AB eſt exprimée par la moitié de la fraction qui multiplie le plan xy) le lieu de cette équation ſera toûjours un cercle comme l'on a déja vû dans l'article 324, & la raiſon en eſt évidente par la formule generale. Car l'on aura pour la comparaiſon des termes correſpondans où ſe trouve le quarré xx, cette égalité $\frac{nn}{mm} + \frac{eep}{2imm} = 1$; d'où l'on tire $\frac{p}{2i} = \frac{mm-nn}{ee} = 1$, puiſque à cauſe du triangle rectangle AEB le quarré $mm = nn + ee$. Or l'angle AEB étant droit, l'angle CGM que fait le diametre LK avec ſes ordonnées ſera auſſi droit; & par conſéquent puiſque le diametre LK eſt égal à ſon parametre KH, il s'enſuit que l'Ellipſe devient alors un cercle.

Second cas. Lorſque les quarrés yy & xx ſe trouvent tous deux avec les mêmes ſignes & ſans fraction dans une équation, où le plan xy ne ſe rencontre pas, & que de plus l'angle APM eſt droit: ſon lieu ſera toûjours un cercle, comme l'on vient de voir dans l'article 328; & cela ſe prouve par le moyen de la formule generale. Car puiſque le plan xy ne ſe trouve point dans l'équation donnée, la fraction $\frac{2n}{m}$ de la formule ſera nulle ou zero; & partant $BE\ (n) = o$, & $m = e$. D'où l'on voit. 1°. Que le diametre LK eſt parallele à la ligne AP, & qu'ainſi l'angle CGM qu'il fait avec ſes ordonnées étant égal à l'angle APM ſera

droit. 2°. Que la fraction $\frac{sn}{mm} + \frac{eep}{2mmt}$ qui multiplie le quarré xx dans la formule devient $\frac{p}{2t}$, & qu'ainſi on aura $\frac{p}{2t} = 1$: c'eſt à dire que le diametre LK ſera égal à ſon parametre KH. L'Ellipſe qui eſt le lieu de l'équation donnée ſera donc alors un cercle. Or comme alors la formule generale ſe change en celle-ci

$$yy + xx - 2ry - 2sx + rr = o,$$
$$- tt$$
$$+ ss$$

on pourra, ſi l'on veut abreger le calcul, en ſe ſervant d'abord de cette formule, pour trouver par la comparaiſon de ſes termes avec ceux de la propoſée, les valeurs de r, s, t, qui ſervent à décrire le cercle qui en eſt le lieu.

LEMME FONDAMENTAL.

Pour la conſtruction des lieux à l'Hyperbole par rapport à ſes diametres.

FIG. 175. 176.

330. LES mêmes choſes étant poſées que dans le Lemme précédent pour l'Ellipſe, on décrira * du diametre LK $(2t)$ qui ait pour parametre KH (p), & pour ordonnées des droites paralleles à PM, une Hyperbole ou deux Hyperboles oppoſées. Je dis que ſa portion OM, ou leurs portions renfermées dans l'angle PAD fait par la ligne AP & par une ligne AD menée par le point fixe A parallelement à PM & du même côté, ſera le lieu de cette équation ou formule.

* *Art.* 161.

$$yy - \frac{2n}{m}xy + \frac{nn}{mm}xx - 2ry + \frac{2nr}{m}x + rr = o.$$
$$- \frac{eep}{2mmt} \qquad + \frac{2eps}{2mt}x - \frac{pns}{2t}$$
$$- \frac{pss}{2t}$$

dans laquelle on doit obſerver qu'il y a $+\frac{pss}{2t}$ lorſque

le diametre LK eſt un premier diametre, & $-\frac{ttt}{2t}$ lorſque c'eſt un ſecond.

Car ayant mené d'un de ſes points quelconques M la ligne MP, qui faſſe avec AP l'angle donné ou pris à volonté APM, & qui rencontre les paralleles AE, DG, aux points F, G, on aura par la proprieté de l'Hyperbole* $KL\ (2t).\ KH\ (p)::\overline{CG}^2 \pm \overline{CK}^2 \left(\frac{eexx}{mm} - \frac{2esx}{m}\right.$ * Art. 84. & 118.
$\left. + ss \pm tt\right).\ \overline{GM}^2 = \frac{peexx}{2mmt} - \frac{2epsx}{2mt} + \frac{pss}{2t} \pm \frac{ptt}{2t} = yy - \frac{2n}{m}xy - 2ry + \frac{nn}{mm}xx + \frac{2nr}{m}x + rr$. Donc &c.

S'il arrive que le diametre $KL\ (2t)$ & ſon parametre $KH\ (p)$ ſoient égaux entr'eux ; l'Hyperbole ſera équilatere.

COROLLAIRE.

331. IL eſt clair, 1°. Que les deux quarrés yy & xx ſe trouvent toûjours avec differens ſignes dans cette formule, lorſque le plan xy ne s'y rencontre point ; ou bien lorſqu'il s'y trouve, & que $\frac{pep}{2mmt}$ ſurpaſſe $\frac{nn}{mm}$. 2°. Qu'ils s'y peuvent trouver avec les mêmes ſignes, mais avec ces conditions que le plan xy s'y rencontre, & que le quarré $\frac{nn}{mm}$ de la moitié de la fraction qui le multiplie, ſoit plus grand que la fraction $\frac{nn}{mm} - \frac{eep}{2mmt}$ qui multiplie le quarré xx.

PROPOSITION IV.

Problême.

332. CONSTRUIRE *le lieu d'une équation donnée, dans laquelle, ou les deux quarrés* y y *&* x x *ſe rencontrent avec differens ſignes, ou bien avec les mêmes ſignes, mais avec ces deux conditions que le plan* x y *s'y trouve, & que le quarré de la moitié de la fraction qui le multiplie ſoit plus grand*

que la fraction qui multiplie le quarré x x. *On ſuppoſe encore ici que le quarré* y y *ſoit délivré de fractions.*

On conſtruit l'Hyperbole qui en eſt le lieu, comme l'on vient de faire l'Ellipſe dans le Problême précédent. Les Exemples qui ſuivent le feront voir.

EXEMPLE I.

333. SOIT $yy + \frac{2b}{a}xy + \frac{f}{a}xx + 2cy - 2gx - hh = o$, l'équation dont il faut conſtruire le lieu, & dans laquelle on ſuppoſe que le quarré $\frac{bb}{aa}$ ſurpaſſe $\frac{f}{a}$.

Je compare les termes de cette équation avec ceux qui leur répondent dans la formule du Lemme; & j'ai 1°. $\frac{2n}{m} = -\frac{2b}{a}$, & partant ſi l'on fait $m = a$, on aura $n = -b$. 2°. $\frac{eep}{2mmt} - \frac{nn}{mm} = -\frac{f}{a}$, donc $\frac{p}{2t} = \frac{bb-af}{ee}$, & $p = \frac{2bbt-2aft}{ee}$. 3°. $r = -c$. 4°. $\frac{2nr}{m} + \frac{2eps}{2mt} = -2g$, d'où en mettant pour m, n, r, $\frac{p}{2t}$ les valeurs que l'on vient de trouver, on tire $s = \frac{-bce-age}{bb-af}$. 5°. $\pm tt = ss - \frac{2rrt-2hht}{p} = ss - \frac{eecc-eehh}{bb-af}$, ſçavoir $+tt$ lorſque le quarré ss ſurpaſſe $\frac{eecc+eehh}{bb-af}$, & $-tt$ lorſqu'il eſt moindre, parce que le quarré tt doit être poſitif; ce qui fait deux differens cas. Or les valeurs de m, n, r, s, t, p, étant ainſi déterminées, je conſtruis le lieu en me reglant ſur la conſtruction du Lemme, de la maniere qui ſuit.

FIG. 177. 178. Ayant pris ſur AP, la partie $AB = a$, & mené parallelement à PM & du côté oppoſé les droites $BE = b = -n$, $AD = c = -r$, je tire par les points A, E, la droite AE (e) qui eſt donnée, & par le point D la droite indéfinie DG parallele à AE ſur laquelle je prends la partie $DC = \frac{eag+ebc}{bb-af} = -s$ du côté oppoſé à PM, & de part & d'autre du point C les parties

CL, CK, égales chacune à $t = \sqrt{ss - \frac{eecc - eehh}{bb - af}}$ ou $\sqrt{\frac{eecc + eehh}{bb - af} - ss}$, selon que ss est plus grand ou moindre que $\frac{eecc + eehh}{bb - af}$. Cela fait, du diametre LK (qui ait pour ordonnées des droites paralleles à PM, & pour parametre la ligne $KH\ (p) = \frac{2bbt - 2aft}{ee}$) je décris une Hyperbole, en obſervant que LK *(fig.* 177.*)* doit être un premier diametre dans le premier cas, & un ſecond *(fig.* 178.*)* dans le dernier. Je dis que ſa portion OM ſera le lieu requis.

Car ayant mené d'un de ſes points quelconques M une parallele MP à AD, laquelle rencontre les lignes AB, AE, DG, aux points P, F, G; on aura $PF = \frac{bx}{a}$, & AF ou $DG = \frac{ex}{a}$. Et par conſéquent $MG = y + \frac{bx}{a} + c$, CG ou $DG + CD = \frac{ex}{a} - s$, puiſque $CD = -s$. Or par la proprieté de l'Hyperbole, $LK\ (2t).\ KH\ (\frac{2bbt - 2aft}{ee}) :: \overline{CG}^2 \pm \overline{CK}^2\ (\frac{eexx}{aa} - \frac{2esx}{a} + ss \pm tt).\ \overline{GM}^2\ (yy + \frac{2b}{a}xy + 2cy + \frac{bb}{aa}xx + \frac{2bc}{a}x + cc)$; ce qui, en mettant pour $ss \pm tt$ & s leurs valeurs $\frac{ccee + eehh}{bb - af}$ & $\frac{-bce - age}{bb - af}$, multipliant les extrêmes & les moyens, & diviſant par $2t$, donne l'équation propoſée. Donc &c.

REMARQUE.

334. S'IL arrive que $ss = \frac{ccee + eehh}{bb - af}$; il eſt clair que la valeur de tt devient nulle ou zero, & qu'ainſi la conſtruction de l'Hyperbole devient impoſſible. Mais il faut bien remarquer alors que l'équation propoſée s'abaiſſe toûjours, en ſorte que ſon lieu, qui devroit être une ou deux Hyperboles oppoſées, devient une ou deux lignes droites. En effet dans nôtre exemple on a réduit l'équation donnée à cette proportion $ee.\ bb - af ::$

$\frac{eexx}{aa} - \frac{2esx}{a} + ss \mp tt. yy + \frac{2b}{a}xy + \frac{bb}{aa}xx + 2cy + \frac{2bc}{a}x + cc$; d'où, en effaçant tt qui eſt nul, multipliant les extrêmes & les moyens, & extrayant de part & d'autre la racine quarrée, l'on tire $ey + \frac{ebx}{a} + ec = \frac{ex}{a} - s\sqrt{bb-af}$, c'eſt à dire en mettant pour $-s$ ſa valeur $\frac{bce+agz}{bb-af}$, & diviſant de part & d'autre par e, cette équation $y + \frac{bx}{a} + c = \frac{x\sqrt{bb-af}}{a} + \frac{ag+bc}{\sqrt{bb-af}}$ ou $y = \frac{-b+\sqrt{bb-af}}{a}x + \frac{ag+bc}{\sqrt{bb-af}} - c$, qui en faiſant $\frac{n}{m} = \frac{-b+\sqrt{bb-af}}{a}$, & $p = \frac{ag+bc}{\sqrt{bb-af}} - c$, ſe change en cette autre $y = p - \frac{n}{m}x$ dont le lieu eſt une ligne droite que l'on conſtruit ſelon l'article 306.

La raiſon de ceci eſt évidente par la formule generale du Lemme ; car effaçant dans cette formule le terme $\mp \frac{ptt}{2t}$ qui renferme le quarré tt que l'on ſuppoſe égal à zero ou nul, elle ſe change en tranſpoſant certains termes, & extrayant les racines quarrées en cette autre $y - \frac{n}{m}x - r = \frac{ex}{m} - s\sqrt{\frac{p}{2t}}$ ou $s - \frac{ex}{m}\sqrt{\frac{p}{2t}}$ où les inconnuës x & y ne ſont plus qu'au premier degré, & dont le lieu par conſéquent devient des lignes droites.

EXEMPLE II.

335. ON demande le lieu de l'équation donnée $yy - xx + 2ay + ax = o$.

La comparaiſon des termes correſpondans donne 1°. $\frac{2n}{m} = o$, parce que le terme xy ne ſe trouve point dans la propoſée ; d'où l'on tire $n = o$, & par conſéquent $m = e$. 2°. $\frac{p}{2t} = 1$, & partant $p = 2t$. 3°. $r = -a$.

$4°.\frac{2ps}{2t} = a$, d'où l'on tire $s = \frac{1}{2}a$. $5°.\ rr \mp \frac{ptt}{2t} - \frac{pss}{2t} = o$, & ainſi $\mp tt = ss - \frac{2rrt}{p} = -\frac{1}{4}aa$ en mettant pour $r, \frac{2t}{p}, s$ leurs valeurs $-a, 1, \frac{1}{2}a$; d'où je connois qu'il faut prendre dans le dernier terme de la formule $-tt$ & non pas $+tt$, afin que la valeur de tt ſoit poſitive. Je conſtruis enſuite le lieu en cette ſorte.

Puiſque $AD\ (r) = -a$, je mene par le point A parallelement à PM & du côté oppoſé la ligne $AD = a$; & puiſque $BE\ (n) = o$, je tire par le point D la droite DG parallele à AP, ſur laquelle je prends la partie $DC\ (s) = \frac{1}{2}a$ du côté de PM, & de part & d'autre du point C les parties CL, CK, égales chacune à $t = \sqrt{\frac{1}{4}aa}$. Enſuite du ſecond diametre LK (parce qu'on a pris $-tt$ dans le dernier terme de la formule) qui ait pour ordonnées des droites paralleles à PM, & pour parametre la droite $KH\ (p) = 2t = LK$, je décris une Hyperbole. Je dis que ſa portion OM ſera le lieu qu'on cherche. FIG. 179.

Car ayant mené d'un de ſes points quelconques M une parallele MP à AD, qui rencontre les droites AP, DG, aux points P, G; on aura $MG = y + a$, CG ou $DG - DC = x - \frac{1}{2}a$, & par la proprieté de l'Hyperbole $LK\ (2t).\ KH\ (2t) :: \overline{CG}^2 + \overline{CK}^2\ (xx - ax + \frac{1}{4}aa + tt).\ \overline{GM}^2\ (yy + 2ay + aa)$; ce qui donne en mettant pour tt ſa valeur $\frac{1}{4}aa$, l'équation même propoſée $yy + 2ay - xx + ax = o$.

Il eſt évident que l'Hyperbole eſt équilatere.

REMARQUE.

336. LORSQUE les deux quarrés yy & xx ſe trouvent avec differens ſignes & ſans fraction dans une équation, où le plan xy ne ſe rencontre point; ſon lieu ſera toûjours une Hyperbole équilatere. Car la fraction $\frac{2n}{m}$ de la formule ſera nulle ou zero; & partant

$BE\ (n) = o$, & $m = e$. D'où il suit que la fraction $\frac{nn}{mm} - \frac{eep}{2mmt}$ qui multiplie le quarré xx dans la formule devient $-\frac{p}{2t}$; & qu'ainsi on aura $-\frac{p}{2t} = 1$, c'est à dire, que le diametre LK sera égal à son parametre KH, ou, ce qui est la même chose, que l'Hyperbole sera équilatere. Or comme la formule generale se change alors en celle ci

$$yy - xx - 2ry + 2sx + rr = o,$$
$$\mp tt$$
$$- ss$$

il s'ensuit qu'on peut s'en servir d'abord pour trouver les valeurs de r, s, t, qui servent à construire l'Hyperbole équilatere qui est le lieu de l'équation donnée; ce qui abrege le calcul.

LEMME FONDAMENTAL.

Pour la construction des lieux à l'Hyperbole entre ses Asymptotes.

337. SOIENT comme dans la définition premiere, deux lignes inconnuës & indéterminées $AP\ (x)$, $PM\ (y)$ qui fassent entr'elles un angle donné ou pris à volonté APM; & soient de plus des lignes droites données m, n, p, r, s. Cela posé.

FIG. 180. 1°. On prendra sur la ligne AP, la partie $AB = m$; & ayant mené les droites $BE = n$, $AD = r$, paralleles à PM, & du même côté; on tirera par le point A la droite AE qui est donnée, & que j'appelle e, & par le point D la droite indéfinie DG parallele à AE, sur laquelle ayant pris les parties $DC = s$, $CK = e$ du côté que s'étend AP, on menera parallelement à PM & du même côté la droite indéfinie CL, & la ligne $KH = p$, On décrira ensuite * entre les Asymptotes CL, CK, une

* *Art.* 130, 131.

une Hyperbole qui passe par le point H. Je dis qu'elle sera le lieu de l'équation ou formule.

$$xy - \frac{n}{m}xx - \frac{ms}{e}y + \frac{ns}{e}x + \frac{mrs}{e} = 0.$$
$$-rx \quad -mp$$

Car $GM = y - \frac{nx}{m} - r$, $CG = \frac{ex}{m} - s$, & par la propriété de l'Hyperbole * $CG * GM \left(\frac{exy}{m} - sy - \frac{enxx}{mm} + \frac{nsx}{m}\right.$ * *Art.* 101.
$\left. - \frac{erx}{m} + rs\right) = CK * KH\ (ep)$; ce qui donne en délivrant le terme xy de fractions, & mettant par ordre tous les termes, la même équation $xy - \frac{n}{m}xx - \frac{ms}{e}y$ &c. que cy dessus.

2°. On menera par le point fixe A, une ligne indéfinie AQ parallele à PM & du même côté ; & ayant pris sur cette ligne la partie $AB = m$, on tirera $BE = n$ parallele à AP & du même côté, & par les points déterminés A, E, la ligne AE que j'appelle e ; & ayant pris sur AP la partie $AD = r$ du côté de PM, on tirera la droite indéfinie DG parallele à AE, sur laquelle on prendra les parties $DC = s$, $CK = e$ du côté que s'étend PM, & on menera parallelement à AP & du même côté, la droite indéfinie CL & la ligne $KH = p$. On décrira ensuite * entre les asymptotes CL, CK, une Hyperbole qui passe par le point H. Je dis qu'elle sera le lieu de cette seconde équation ou formule. FIG. 181. * *Art.* 130. 131.

$$xy - \frac{n}{m}yy - \frac{ms}{e}x + \frac{ns}{e}y + \frac{mrs}{e} = 0.$$
$$-ry \quad -mp$$

Car ayant mené d'un de ses points quelconques M, la ligne MQ parallele à AP, & qui rencontre les paralleles AE, DG, aux points F, G ; les triangles semblables ABE, AQF, donneront $AB\ (m).\ AE\ (e) ::$ AQ ou $PM\ (y).\ AF$ ou $DG = \frac{ey}{m}$, & $AB\ (m).\ BE$ $(n) ::\ AQ\ (y).\ QF = \frac{ny}{m}$. Et par conséquent $GM = x$

$-\frac{ny}{m}-r$, $CG=\frac{ey}{m}-s$. Or par la proprieté de l'Hyperbole $CG*GM=CK*KH$, ce qui donne, en mettant pour ces lignes leurs valeurs analytiques, & délivrant le terme xy de fractions, la même ſeconde formule que cy-deſſus. Donc &c.

COROLLAIRE.

338. IL eſt clair 1°. Que le terme xy ſe rencontre toûjours dans ces deux formules, puiſque n'étant multiplié par aucune fraction, on ne peut point la ſuppoſer nulle pour le faire évanoüir. 2°. Qu'il ne s'y peut rencontrer que l'un des quarrés xx ou yy, lequel s'évanoüit ſi la fraction $\frac{n}{m}$ qui le multiplie eſt nulle.

PROPOSITION V.

Problême.

339. TROUVER *le lieu d'une équation donnée dans laquelle le plan* x y *ſe rencontre, ſans aucun des quarrés* x x *&* y y, *ou ſeulement avec l'un des deux.*

On délivrera le plan xy de fractions, & on comparera les termes de l'équation donnée avec ceux qui luy répondent dans la premiere formule lorſque le quarré xx s'y rencontre, & avec ceux de la ſeconde lorſque c'eſt le quarré yy, & enfin avec celle des deux qu'on voudra lorſque pas un des quarrés xx & yy ne s'y trouve. On tirera enſuite de la comparaiſon de ces termes, des valeurs des quantités m, n, p, r, s, par le moyen deſquelles on décrira une Hyperbole entre ſes aſymptotes comme l'on a enſeigné dans le Lemme précédent, en obſervant toûjours de mener ou de prendre du côté oppoſé à AP & à PM les lignes dont les valeurs ſont negatives. Les Exemples qui ſuivent éclairciront ces regles.

EXEMPLE I.

340. ON demande le lieu de $xy - \frac{b}{a}xx - cy = o$. I

Comme c'eſt le quarré xx qui ſe rencontre dans l'équation donnée, je choiſis la premiere formule, & j'ai par la comparaiſon de ſes termes avec ceux de la propoſée, 1°. $\frac{n}{m} = \frac{b}{a}$, d'où en faiſant $m = a$, je tire $n = b$. 2°. $\frac{ms}{e} = c$, & partant $s = \frac{ec}{a}$. 3°. $\frac{ns}{e} - r = o$, parce que l'inconnuë x ne ſe trouve point au premier degré dans l'équation donnée, & partant $r = \frac{bc}{a}$. 4°. $\frac{mrs}{e} - mp = o$, parce qu'il ne ſe trouve point de termes entierement connus; & partant $p = \frac{rs}{e} = \frac{bcc}{aa}$. Or comme les valeurs de AP (m), BE (n), CD (s), AD (r), KH (p) ſont toutes poſitives, je conſtruis le lieu préciſément comme dans le Lemme (*fig.* 180.) en obſervant de prendre pour les lignes les valeurs que l'on vient de trouver.

Car $GM = y - \frac{bx}{a} - \frac{bc}{a}$, CG ou $DG - DC = \frac{ex - ec}{a}$, FIG. 180. & par la propriété de l'Hyperbole $CG * GM = CK * KH$ c'eſt à dire, en mettant les valeurs analytiques, l'équation même donnée. Donc &c.

EXEMPLE II.

341. SOIT $xy + \frac{b}{a}yy - cy - ff = o$, l'équation dont il faut conſtruire le lieu.

Comme c'eſt le quarré yy qui ſe trouve dans l'équation donnée, je choiſis la ſeconde formule, & j'ai par la comparaiſon de ſes termes avec ceux de la propoſée, 1°. $\frac{n}{m} = -\frac{b}{a}$, & ſi l'on fait $m = a$, on aura $n = -b$. 2°. $\frac{ms}{e} = o$, & partant $s = o$. 3°. $r = c$. 4°. $mp = ff$, &

partant $p = \frac{ff}{a}$. Ce qui donne la conſtruction ſuivante.

FIG. 182. Ayant mené par le point fixe A, une ligne indéfinie AQ parallele à PM & du même côté, & ayant pris ſur cette ligne, la partie $AB\ (m) = a$, je tire $BE = b = -n$ parallele à AP & du côté oppoſé, & par les points déterminés A, E, la ligne $AE\ (e)$. Je prends ſur AP, la partie $AD\ (r) = c$ du côté de PM, & je tire la droite indéfinie DG parallele à AE, & comme les points D, C, tombent l'un ſur l'autre, parce que $DC\ (s) = o$, je prends ſur cette ligne la partie $DK = e$ du côté que s'étend PM, & ayant mené parallelement à AP & du même côté la ligne $KH\ (p) = \frac{ff}{a}$, & la droite indéfinie DL qui tombe ici ſur AP, je décris entre les Aſymptotes DL, DK, une Hyperbole qui paſſe par le point H. Je dis qu'elle ſera le lieu requis.

Car ayant mené d'un de ſes points quelconques M, la droite MQ parallele à AP & qui rencontre les paralleles AE, DG, aux points F, G, on aura GM ou $MQ + QF - FG = x + \frac{by}{a} - c$, DG ou $AF = \frac{ey}{a}$, & partant $DG \times GM = \frac{exy}{a} + \frac{eyy}{aa} - \frac{ecy}{a} = CK \times KH\ (\frac{eff}{a})$. Ce qui donne, en délivrant le terme xy de fractions, l'équation propoſée $xy + \frac{b}{a}yy - cy - ff = o$.

REMARQUE.

342. SI l'on prend pour l'arbitraire $AB\ (m)$ une autre valeur que a, celles de $CK\ (e)$ & de $KH\ (p)$ changeront, mais les valeurs du rectangle $CK \times KH\ (ep)$, & des droites $AD\ (r)$, $CD\ (s)$ demeureront toûjours les mêmes; car elles ne renferment dans leurs expreſſions que les rapports $\frac{n}{m}$, $\frac{n}{e}$, $\frac{m}{e}$, qui ne chan-

gent point, puiſque dans le triangle ABE l'angle ABE eſt donné, & la raiſon $\frac{n}{m}$ (qui dans cet exemple eſt $\frac{b}{a}$) du côté AB (m) au côté BE (n). Or comme l'Hyperbole qui doit paſſer par le point H, ſera toûjours la même *, telle grandeur que l'on puiſſe donner à CK (e) & à KH (p), pourvû que le rectangle $CK * KH$ demeure le même; il s'enſuit que l'on conſtruira toûjours la même Hyperbole, telle grandeur que l'on puiſſe prendre pour l'arbitraire AB (m). * Art. 101.

EXEMPLE III.

343. IL faut conſtruire le lieu de l'équation donnée $xy - ay + bx + cc = o$.

Comme pas un des quarrés xx & yy ne ſe trouve dans l'équation propoſée, je puis prendre indifféremment l'une ou l'autre des deux formules, par exemple, la premiere, de laquelle comparant les termes avec ceux de la propoſée, j'ai 1°. $\frac{n}{m} = o$, & partant $n = o$, & $m = e$; je fais $m = a$. 2°. $\frac{ms}{e}$ ou $s = a$. 3°. $r = -b$, puiſque $\frac{ns}{e} = o$. 4°. $rs - mp = cc$, & partant $p = -b - \frac{cc}{a}$. Or ces valeurs de m, n, r, s, p, étant ainſi déterminées, je conſtruis le lieu de la maniere qui ſuit.

Puiſque AD (r) $= -b$, je mene parallelement à PM & du côté oppoſé la ligne $AD = b$; & puiſque BE (n) $= o$, je tire la droite indéfinie DG parallele à AP ſur laquelle ayant pris les parties DC (s) $= a$, CK (e) $= m = a$ du côté que s'étend AP, je tire la droite indéfinie CL, & la ligne $KH = b + \frac{cc}{a} = -p$ parallele à PM & du côté oppoſé. Je décris enſuite l'Hyperbole oppoſée à celle qui ayant pour Aſymptotes les droites CL, CK, paſſe par le point H. Je dis FIG. 183.

que ſa portion indéfinie OM renfermée dans l'angle PAS, faite par la droite indéfinie AP & par la ligne AS menée parallelement à PM & du même côté, ſera le lieu cherché.

Car GM ou $PG + PM = y + b$ & CG ou $CD - DG = a - x$; & par conſéquent $CG * GM = ay - xy + ab - bx = CA * KH\ (ab + cc)$; ce qui, en effaçant de part & d'autre le rectangle ab, & tranſpoſant à l'ordinaire, donne $xy - ay + bx + cc = o$ qui eſt l'équation propoſée.

Il auroit été inutile dans cet Exemple de décrire l'Hyperbole qui paſſe par le point H; car aucun de ſes points ne pourroit tomber dans l'angle PAS, où l'on ſuppoſe que doivent tomber les points M.

REMARQUE.

344. S'IL arrive qu'en comparant les termes de la formule avec ceux de l'équation donnée, on trouvât que $p = o$; on voit qu'il ſeroit alors impoſſible de décrire l'Hyperbole qui en devroit être le lieu, puiſque ſa puiſſance qui eſt égale au rectangle pe ſeroit nulle. Mais alors l'équation ſe pourroit toûjours abaiſſer, en ſorte que ſon lieu deviendroit une ligne droite; car effaçant par exemple dans la premiere formule du Lemme le terme mp, elle devient $xy - \frac{n}{m}xx - \frac{ms}{e}y + \frac{ns}{e}x - rx + \frac{mrs}{e} = o$, qui étant diviſée par $\frac{ex}{m} - s$ donne $y - \frac{nx}{m} - r = o$, dont le lieu * eſt une ligne droite.

* *Art.* 306.

PROPOSITION VI.

Problême.

345. CONSTRUIRE *tout lieu du ſecond degré, ſon équation étant donnée.*

Tous les termes de l'équation étant mis d'un même côté, en ſorte que l'un des membres ſoit zero, je diſtingue deux differens cas.

Premier cas. Lorſque le plan xy ne ſe trouve point dans l'équation donnée. 1°. S'il n'y a que l'un des quarrés yy ou xx, le lieu ſera une * Parabole. 2°. Si les deux quarrés yy & xx s'y trouvent avec les mêmes ſignes, le lieu ſera une * Ellipſe ou un cercle. 3°. Si ces deux quarrés s'y rencontrent avec differens ſignes, le lieu ſera une * Hyperbole ou deux Hyperboles oppoſées rapportées à ſes diametres.

* *Art.* 310.
* *Art.* 324.
* *Art.* 332.

Second cas. Lorſque le plan xy ſe trouve dans l'équation donnée. 1°. Si pas un des quarrés yy & xx ne s'y rencontre ou ſeulement l'un des deux, le lieu ſera * une Hyperbole entre ſes Aſymptotes. 2°. Si les deux quarrés yy & xx s'y trouvent avec differens ſignes, le lieu ſera * une Hyperbole rapportée à ſes diametres. 3°. Si ces deux quarrés s'y rencontrent avec les mêmes ſignes, on délivrera le quarré yy de fractions, & le lieu ſera * une Parabole lorſque le quarré de la moitié de la fraction qui multiplie xy eſt égal à la fraction qui multiplie le quarré xx; une * Ellipſe ou un cercle lorſqu'il eſt moindre; & enfin une * Hyperbole ou deux Hyperboles oppoſées rapportées à ſes diametres lorſqu'il eſt plus grand.

* *Art.* 339.
* *Art.* 332.
* *Art.* 310.
* *Art.* 324.
* *Art.* 332.

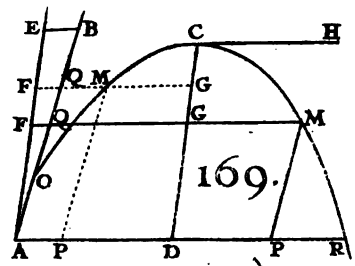
On décrira le lieu ſelon l'article 310. s'il eſt une Parabole; ſelon l'article 314. s'il eſt une Ellipſe ou un cercle; ſelon l'article 332. s'il eſt une Hyperbole ou deux Hyperboles oppoſées rapportées à ſes diametres; & enfin ſelon l'article 339. ſi c'eſt une Hyperbole entre ſes Aſymptotes. Tout ceci n'eſt qu'une ſuite de ces quatre articles.

COROLLAIRE.

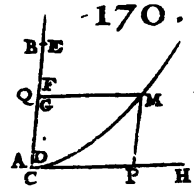
346. UNE équation du ſecond degré étant donnée, comme la Section Conique que l'on trouve par

* *Art.* 314. les regles preſcrites eſt le lieu * de toutes les valeurs tant vraies que fauſſes de l'inconnuë y, qui répondent aux valeurs tant vraies que fauſſes de l'autre inconnuë x ; il s'enſuit qu'il ne peut y avoir que cette ſeule Section qui ſoit le lieu de l'équation donnée.

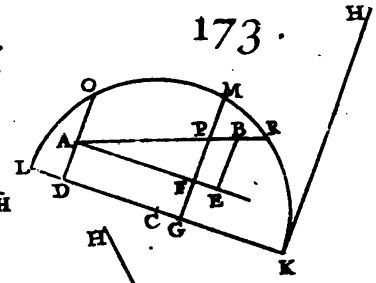
LIVRE HUIT.



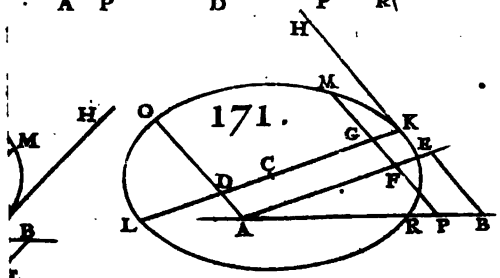
169.



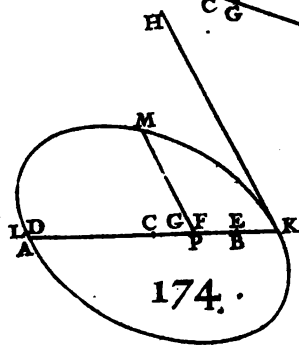
170.



173.



171.



174.

LIVRE HUITIE'ME.

Des Problêmes indéterminés.

PROPOSITION GENERALE.

347. TROUVER *le lieu d'une infinité de points qui ayent tous certaines conditions marquées ; lorſque ce lieu ne paſſe point le ſecond degré.* FIG. 184.

1°. On ſuppoſera comme connuës & déterminées deux lignes droites inconnuës & indéterminées AP (x), PM (y), qui faſſent entr'elles un angle APM donné ou pris à diſcretion ; & dont l'une AP ait une origine fixe & invariable en un point A, & s'étende le long d'une ligne donnée de poſition ; l'autre PM qui détermine toûjours par ſon extremité M, l'un des points cherchés, change continuellement d'origine, & ſoit toûjours parallele à la même ligne. 2°. On tirera les autres lignes que l'on jugera utiles à la ſolution du Problême, & on les exprimera par des lettres ; ſçavoir, les connuës par les premieres lettres de l'Alphabet, & les inconnuës par les dernieres. 3°. On regardera la queſtion comme reſoluë, & après en avoir parcouru toutes les conditions, on arrivera enfin à une équation qui ne renfermera que les deux inconnuës x & y mêlées avec des connuës. 4°. Cette équation dans laquelle on ſuppoſe que les inconnuës x & y ayent au plus deux dimenſions, étant formée, on en conſtruira le lieu ſelon les regles preſcrites dans le Livre précédent ; & le lieu ainſi conſtruit reſoudra la queſtion. Tout ceci s'éclaircira par les Exemples qui ſuivent.

EXEMPLE I.

348. TROUVER dans l'angle donné BAC le point M, tel qu'ayant mené de ce point les deux droites MF, MG, qui faſſent ſur les côtés AB, AC, toûjours vers la même part, des angles donnés MFB, MGC ; la FIG. 184.

droite MF ſoit toûjours à la droite MG en la raiſon donnée de a à b. Et comme il y a une infinité de ces points, on demande la ligne qui les renferme tous, & qui en eſt par conſéquent le lieu.

Par le point M, que l'on ſuppoſe être un des points cherchés, ayant mené la ligne MP parallele à AC; on conſiderera les deux droites inconnuës & indéterminées $AP(x)$, $PM(y)$, comme connuës & déterminées. On prendra ſur le côté AB la partie $AB = a$, on tirera les droites BC, BD, paralleles à MF, MG, & qui rencontrent aux points C, D, l'autre côté AC prolongé, s'il eſt neceſſaire; & on nommera les connuës AC, c; BC, f; BD, g. Preſentement menant MQ parallele à AB, les triangles ſemblables ACB, PMF, & ABD, QMG, donneront ces deux proportions: $AC(c).CB(f) :: MP(y).MF = \frac{fy}{c}$, & $AB(a).BD(g) :: MQ$ ou $AP(x).MG = \frac{gx}{a}$; ce qui ſatisfait à la premiere condition du Problême, puiſque les lignes MF, MG, ſont toûjours ſuppoſées paralleles aux deux mêmes droites BC, BD, qui font ſur les côtés AB, AC, les angles donnés. Or par la ſeconde condition qui reſte à accomplir, il faut que $MF\left(\frac{fy}{c}\right).MG\left(\frac{gx}{a}\right) :: a, b$; d'où l'on tire l'équation $y = \frac{cgx}{bf}$ qui renferme toutes les conditions du Problême, & dont le lieu ſera par conſéquent celui que l'on cherche. Il ſe conſtruit * ainſi.

* *Art.* 306.

Ayant pris ſur la ligne AP, la partie $AH = b$, ſoit menée $HE = \frac{cg}{f}$ parallele à PM & du même côté, & ſoit tirée la droite indéfinie AE. Je dis qu'elle ſera le lieu de tous les points cherchés M.

Car ayant mené par un de ſes points quelconques M les droites MP, MQ, paralleles aux deux côtés AC, AB, & les droites MF, MG, paralleles à BC, BD, & qui font par conſéquent ſur les deux côtés AB, AC, les angles donnés; on aura à cauſe des triangles ſembla-

bles AHE, APM, cette proportion ; $AH\ (b).\ HE\left(\frac{ex}{f}\right) :: AP\ (x).\ PM\ (y) = \frac{ex}{bf}$, & à cauſe des triangles ſemblables ACB, PMF, & ABD, QMG, ces deux autres : $AC\ (c).\ CB\ (f) :: MP\left(\frac{ex}{bf}\right).\ MF = \frac{ex}{b}$; & $AB\ (a).\ BD\ (g) :: MQ$ ou $AP\ (x).\ MG = \frac{gx}{a}$. Et par conſéquent $MF\left(\frac{ex}{b}\right).\ MG\left(\frac{gx}{a}\right) :: a.\ b.$ Ce qui étoit propoſé.

Je n'ai reſolu cette queſtion par le calcul, que pour la rapporter à la Propoſition generale, & commencer par des Exemples ſimples & aiſés à en faire voir l'application ; car on peut reſoudre ce Problême ſans aucun calcul, & d'une maniere plus facile en cette ſorte. FIG. 185.

Soient tirées les droites AK, AL, qui faſſent ſur AB, AC, les angles donnés KAB, LAC, & qui ſoient entr'elles en la raiſon donnée de a à b. Soient menées les droites KM, LM, paralleles aux côtés AB, AC, & qui ſe rencontrent au point M ; par où, & par le ſommet A de l'angle donné BAC, ſoit tirée la ligne AM: Je dis qu'elle ſera le lieu cherché.

Car ayant mené d'un de ſes points quelconques E les droites ER, ES, paralleles à AK, AL ; on aura à cauſe des triangles ſemblables AER, MAK, & AES, MAL, ces proportions $ER.\ AK :: AE.\ AM :: ES.\ AL$. Et partant $ER.\ ES :: AK.\ AL :: a.\ b.$

EXEMPLE II.

349. LES paralleles AB, CD, étant données de poſition ; trouver le lieu de tous les points M tellement placés entre ces lignes, qu'ayant tiré les droites MP, MG ; qui faſſent avec elles toûjours vers la même part des angles donnés MPB, MGD ; elles ſoient toûjours entr'elles en la raiſon donnée de a à b. FIG. 186.

Ayant pris pour l'origine fixe des indéterminées AP (x), un point quelconque A de la ligne AB, & les deux

droites inconnuës & indéterminées $AP\ (x)$, $PM\ (y)$ étant ſuppoſées connuës & déterminées, on menera les lignes AC, AE, paralleles aux deux droites, MP, MG; & on nommera les connuës AC, c; AE, f; Cela fait, on prolongera PM juſqu'à ce qu'elle rencontre CD en F; & les triangles ſemblables CAE, FMG, donneront $AC\ (c).\ AE\ (f) :: MF\ (c-y).\ MG = \frac{cf-fy}{c}$. Or ſelon la condition du Problême qui reſte à accomplir, il faut que $MP\ (y).\ MG\ \left(\frac{cf-fy}{c}\right) :: a.b$; d'où l'on tire l'équation $y = \frac{acf}{bc+af}$ qui renferme toutes les conditions du Pro-

* *Art.* 307. blême, & dont le lieu qui eſt * une ligne droite indéfinie HM menée parallelement à AB en ſorte que $AH = \frac{acf}{bc+af}$, eſt par conſéquent le lieu cherché.

EXEMPLE III.

FIG. 187. 350. DEUX points A, B, étant donnez, en trouver un troiſiéme M, tel qu'ayant mené les droites MA, MB; elles ſoient toûjours entr'elles en raiſon donnée de a à b. Et comme il y a une infinité de ces points M, il eſt queſtion de décrire le lieu qui les renferme tous.

Il peut arriver trois differens cas ſelon que a eſt moindre, plus grand, ou égal à b.

Premier cas. Par le point M, que je ſuppoſe être un de ceux qu'on cherche, ayant mené la ligne MP perpendiculaire ſur AB (car n'y ayant point d'angle donné dans le Problême, on choiſit l'angle droit comme le plus ſimple), & les deux droites inconnuës & indéterminées $AP\ (x)$, $PM\ (y)$ étant ſuppoſées connuës & déterminées; on nommera la donnée AB, c; & à cauſe des triangles rectangles APM, BPM, on aura les quarrés $\overline{AM}^2 = xx+yy$, $\overline{BM}^2 = cc-2cx+xx+yy$. Or par la condition du Problême, $\overline{AM}^2\ (xx+yy).\ \overline{BM}^2\ (cc-2cx+xx+yy) :: aa.bb$. D'où (en multipliant les extrêmes & les moyens & diviſant enſuite

par $bb-aa$) on forme cette équation $yy+xx+\frac{2aacx}{bb-aa}-\frac{aacc}{bb-aa}=0$, qui renferme la condition du Problême, & dont le lieu qui eſt par conſéquent celui qu'on demande, ſe conſtruit par le moyen de l'article 322. (Liv. preced.) en cette ſorte.

Soit priſe ſur la ligne AP, la partie $AC=\frac{aac}{bb-aa}$ du côté oppoſé à PM; & ſoit décrite du centre C, & du rayon CD ou $CE=\frac{abc}{bb-aa}$ la circonference d'un cercle. Je dis que ſa portion DMO renfermée dans l'angle PAO, fait par la ligne AP & par la droite AO menée parallelement à PM & du même côté, ſera le lieu de l'équation que l'on vient de trouver. FIG. 187.

Car ayant mené d'un de ſes points quelconques M, la perpendiculaire MP ſur AB, on aura par la proprieté du cercle $\overline{CD}^2-\overline{CP}^2$ ou $EP*PD=\overline{PM}^2$; c'eſt à dire en mettant pour ces quarrés leurs valeurs analytiques, l'équation precedente.

Si l'on ſuppoſe à preſent que les points M tombent dans l'angle EAR oppoſé au ſommet à l'angle BAO dans lequel on a ſuppoſé en faiſant le calcul qu'ils étoient ſitués, on trouvera en faiſant * $AP=-x$, & $PM=-y$, la même équation que ci-deſſus, tant par la condition du Problême, que par la proprieté de la portion RME de la même circonference que l'on vient de décrire; d'où il ſuit que cette portion eſt le lieu de tous les points cherchés M, lorſqu'ils tombent dans l'angle RAE. Et ſi l'on ſuppoſe enfin que les points M tombent dans l'angle BAR & enſuite dans l'angle EAQ, on trouvera de même (en obſervant de faire $PM=-y$, lorſqu'il tombe de l'autre côté de la ligne AB; & $AP=-x$, lorſque le point P tombe de l'autre côté du point fixe A) que les portions DR, EO, de la même circonference ſeront les lieux de ces points; & qu'ainſi la circonferen- * Art. 304.

ce entiere qui a pour diametre la ligne DE, eſt le lieu complet de tous les points requis M.

Second cas. On trouvera par un raiſonnement ſemblable à celui du premier cas, cette équation $yy + xx - \frac{2aacx}{aa-bb} + \frac{aacc}{aa-bb} = o$. dont le lieu ſe conſtruit ainſi.

FIG. 188. Sòit priſe ſur AP, la partie $AC = \frac{aac}{aa-bb}$ du côté de PM; & ſoit décrite du centre C, & du rayon CD ou $CE = \frac{abc}{aa-bb}$ un cercle. Je dis que ſa circonference ſera le lieu de tous les points requis M. Cela ſe prouve de même que dans le premier cas.

Si l'on conſidere dans ces deux cas que la circonference qui a pour diametre DE, & qui eſt le lieu de tous les points cherchés M, doit couper la ligne AB en deux points D, E, tels que $AD.DB :: a.b$, & $AE.EB :: a.b$; puiſque le point M tombant en D la droite AM devient AD; & BM, BD; & de même que le point M tombant en E, la droite AM devient AE, & BM, BE : on abregera de beaucoup les conſtructions precedentes. Car il eſt viſible qu'ayant diviſé la ligne AB prolongée du côté qu'il ſera neceſſaire, en deux points D, E, tels que $AD.DB :: a.b$, & $AE.EB :: a.b$; la ligne DE ſera en l'un & l'autre cas le diametre de la circonference qui eſt lieu cherché.

Troiſiéme cas. Puiſque dans ce cas $a = b$, l'équation precedente ſe change en celle-ci $x = \frac{1}{2}c$; d'où l'on voit* que ſi l'on prend AP égale à la moitié de AB & qu'on tire la droite PM perpendiculaire ſur AB, cette ligne PM indéfiniment prolongée de part & d'autre, ſera le lieu de tous les points requis M. Ce qui eſt d'ailleurs évident par les Elemens de Geometrie.

* *Art.* 307.

FIG. 189.

EXEMPLE IV.

FIG. 190. 351. DEUX lignes droites DE, DN, indéfiniment prolongées de part & d'autre du point D, étant données

de position sur un plan, avec un point C hors de ces lignes ; soit imaginé un angle donné CEM se mouvoir par son sommet E le long de DE, en sorte que son côté EC qui rencontre DN en N, passe toûjours par le même point C, & que son autre côté EM soit toûjours troisiéme proportionnel à NC, CE. On demande le lieu de tous les points M dans ce mouvement.

Soient menées CA parallele à DN ; & CB qui fasse sur DE au point B un angle égal à l'angle donné CEM, du côté qu'il sera necessaire, afin que CE tombant sur CB la droite EM tombe sur DE. Cela posé je distingue la question en trois differens cas : car ou le sommet E de l'angle donné CEM se meut sur la droite DE de l'autre côté du point B par rapport au point A ; ou entre les points B, A ; ou enfin de l'autre côté du point A par rapport au point B.

Premier cas. Lorsque le sommet E se meut sur la ligne DE de l'autre côté du point B par rapport au point A. Ayant mené du côté du point C la ligne AQ qui fasse sur DE au point A l'angle BAQ égal à l'angle ABC, on tirera par l'un des points cherchés M, que l'on regarde comme donné, la ligne MP parallele à AQ, & qui rencontre DE en P ; & on aura deux triangles semblables CBE, EPM ; car les deux angles CBE, EPM, sont égaux chacun à l'angle donné CEM, & de plus les angles BCE, PEM, sont aussi égaux entr'eux ; puisque dans le triangle CBE l'angle externe CEP ou $CEM + PEM$ est égal aux deux internes opposés BCE & CBE ou CEM. Si donc l'on nomme les données AD, a ; AB, b ; BC, c ; & les inconnuës & indéterminées AP, x ; PM, y ; AE, z ; on aura, tant à cause des paralleles DN, AC, que de la condition du Problême, ces proportions AD (a). AE (z) :: CN. CE :: CE. EM :: CB (c). EP ($x-z$) :: BE ($z-b$). PM (y) ; d'où l'on forme (en multipliant les extrêmes & les moyens) ces deux équations $ax-az=cz$ & $ay=zz-bz$, qui, en prenant, pour abreger,

$f = a + c$, & faisant évanoüir z, se reduisent à celle ci $xx - \frac{bf}{a}x - \frac{ff}{a}y = o$ qui ne renferme plus que les inconnuës x & y, & dont le lieu, qui est celui que l'on cherche, se construit * ainsi.

* *Art.* 310.

Soit prise sur la ligne AP, la droite $AF = \frac{bf}{2a}$ du côté de PM; & ayant mené FL parallele à PM, soit prise sur cette ligne du côté opposé à PM, la partie $FG = \frac{bb}{4a}$. Soit décrite du diametre GL qui ait pour origine le point G, pour parametre $GH = \frac{ff}{a}$, & pour ordonnées des droites LM paralleles à AP, une Parabole qui s'étende du côté de PM. Je dis que sa portion indéfinie OM renfermée dans l'angle $PA\mathcal{Q}$, sera le lieu de tous les points cherchés M.

Car ayant mené d'un de ses points quelconques M, la ligne $M\mathcal{Q}$ parallele à AP & qui rencontre le diametre CL en L, on aura ML ou $PF = x - \frac{bf}{2a}$ & $GL = y + \frac{bb}{4a}$, & par la proprieté de la Parabole, $\overline{ML}^2 \left(xx - \frac{bf}{a}x + \frac{bbff}{4aa}\right) = LG * GH \left(\frac{ff}{a}y + \frac{bbff}{4aa}\right)$; ce qui en transposant à l'ordinaire donne l'équation $xx - \frac{bf}{a}x - \frac{ff}{a}y = o$, qu'il falloit construire.

Second cas. Lorsque le sommet E parcourt la partie BA. Il est clair dans ce cas que les points M tomberont de l'autre côté de DE, puisque l'angle donné CEM sera toûjours plus grand que l'angle CEP qui diminuë continuellement. C'est pourquoi j'ai $PM = -y$, & comme je trouve par un raisonnement semblable au precedent, la même équation; il s'ensuit que la portion AGO de la Parabole que l'on vient de décrire, sera le lieu de tous les points M; puisqu'elle donne aussi par sa proprieté cette même équation.

Troisiéme cas. Lorsque le sommet se meut de l'autre côté.

côté du point A par rapport au point B. Il eſt clair encore dans ce cas que tous les points cherchés M doivent tomber au deſſous de la ligne DE; & on trouvera comme dans le premier cas $AD. AE :: CN. CE :: CE. EM :: CB. EP$. Et partant $AD. CB :: AE. EP$. D'où l'on voit que EP eſt plus grande, moindre, ou égale à EA ſelon que CB eſt plus grande, moindre, ou égale à AD; & qu'ainſi prolongeant AQ au deſſous de DE vers K, tous les points cherchés M tombent dans l'angle BAK dans le premier de ces trois cas, dans ſon complement à deux droits DAK dans le ſecond cas, & enfin ſur la droite AK dans le troiſiéme cas. Je ſuppoſe ici que CB ſoit plus grande que AD; & comme faiſant $PM = -y$, parce qu'il tombe de l'autre côté de AP, je ne trouve plus la même équation que dans le premier cas, je ne fais plus d'attention à la conſtruction de ce cas. C'eſt pourquoi nommant à l'ordinaire AP, x; PM, y; j'arrive à cette équation $xx + \frac{bg}{a}x - \frac{gg}{a}y = o$; dans laquelle $g = c - a$, dont le lieu qui eſt celui que l'on cherche eſt une portion indéfinie AM d'une autre Parabole que la precedente laquelle s'étend vers le côté oppoſé, & qui ſe conſtruit * en cette ſorte.

* Art. 310.

Soit priſe ſur AP de l'autre côté de PM la partie $AS = \frac{bg}{2a}$; ſoit menée $ST = \frac{bb}{4a}$ parallele à AQ, & du côté oppoſé à PM; ſoit décrite du diametre TS qui ait pour origine le point T, pour parametre une ligne $= \frac{gg}{a}$, & pour ordonnées des droites paralleles à AP, une Parabole qui s'étende du côté de PM. Sa portion indéfinie AM renfermée dans l'angle PAK ſera le lieu de tous les points cherchés M dans ce dernier cas, où l'on ſuppoſe que CB ſurpaſſe AD.

Il eſt donc évident que le lieu cherché de tous les points M eſt compoſé de deux portions indéfinies de differentes Paraboles, dont l'une $AGOM$ s'étend du côté de C; & l'autre AM du côté oppoſé, & partent

toutes deux du point A ; car le côté CE de l'angle donné CEM tombant sur CA parallele à DN, il est clair que CN devient infinie, & qu'ainsi EM est nulle ou zero, puisqu'on a toûjours $NC. CE :: CE. EM$: c'est à dire que le point M se confond avec le point E qui tombe sur le point D. D'où l'on voit que AF est une ordonnée au diametre FG, & AS au diametre ST; ce qui donne lieu à la construction suivante qui est generale.

Ayant pris sur la ligne indéfinie AP de part & d'autre du point B les parties BO, BR, égales chacune à la quatriéme proportionnelle aux trois lignes DA, AB, BC; on menera par les points de milieu F, S, l'un de AO, l'autre de AR, les droites FG, ST, paralleles à AQ, & égales chacune à la troisiéme proportionnelle à $4AD$, & à AB; sçavoir, FG du côté opposé au point C, & ST du même côté. Cela fait, on décrira deux differentes Paraboles dont l'une aura pour diametre GF & pour ordonnée FA, & l'autre pour diametre TS & pour ordonnée SA; je dis que leurs portions indéfinies $MAGOM$ seront le lieu complet de tous les points cherchés M.

Car BO ou $BR = \frac{bc}{a}$, & partant AF ou $\frac{1}{2}AO = \frac{1}{2}b + \frac{bc}{2a} = \frac{bf}{2a}$; & de même AS ou $\frac{1}{2}AR = \frac{bc}{2a} - \frac{1}{2}b = \frac{bg}{2a}$. Donc &c.

On peut remarquer en passant que si l'angle donné, qui se meut par son sommet le long de la ligne DE, étoit égal au complement à deux droits de l'angle CEM, sans rien changer au reste ; c'est à dire que les points M tombassent sur la ligne EM prolongée de l'autre côté du point E : le lieu de tous les points M seroit alors les portions restantes des deux Paraboles que l'on vient de décrire.

Si les points A, B, C, étoient situés differemment de ce qu'on les suppose dans cette figure, à laquelle on a accommodé le raisonnement ; on arriveroit toûjours

comme l'on vient de faire à deux équations qui ne pourroient être differentes des precedentes que par quelques ſignes, & dont les lieux ſeroient par conſéquent des portions de Paraboles que l'on décriroit avec la même facilité.

Le Comte *Roger de Vintimille* a propoſé ce Problême avec quelques autres dans le Journal de Parme du mois d'avril de l'année 1693. ce qui a donné occaſion au Pere *Saquerius* de faire imprimer un petit Livre à Milan, dans lequel il avouë qu'il n'a pû reſoudre celui ci, quoiqu'il faſſe aſſez paroître par la ſolution des autres qu'il eſt fort verſé dans la Geometrie.

EXEMPLE V.

352. UNE ligne droite indéfinie AP étant donnée de poſition, avec deux points fixes A, C, l'un ſur cette droite, & l'autre au dehors ; ſoit décrite une Parabole AM qui ait pour parametre une ligne quelconque, & pour axe la ligne AP dont l'origine ſoit en A ; & ſoit menée du point donné C une perpendiculaire CM à cette Parabole. On demande le lieu de tous les points M, dont il eſt viſible qu'il y a une infinité ; puiſque changeant continuellement de parametres, on peut décrire une infinité de Paraboles differentes, qui ayent toutes pour axes la même droite indéfinie AP, dont l'origine ſoit toûjours en A. FIG. 191.

Ayant mené par le point donné C la perpendiculaire CB ſur AP, & par un des points cherchés M que l'on regarde comme donné, les droites MP, MK, paralleles à BC, AP, & la tangente MT ; on nommera les données AB, a ; BC, b ; & les inconnuës & indéterminés AP, x ; PM, y ; ce qui donne $CK = b - y$, $MK = a + x$. Or par la condition du Problême, l'angle CMT eſt droit ; & par conſéquent les triangles rectangles TPM, CKM, ſeront ſemblables ; car ſi l'on ôte des angles droits CMT, KMP, le même angle KMT,

* *Art.* 22. & 23. les reſtes CMK, TMP, ſeront égaux Donc TP * $(2x)$. $PM\,(y) :: CK\,(b-y).\ KM\,(a+x)$, d'où l'on forme en multipliant les extrêmes & les moyens cette équation $yy-by+2xx+2ax=o$, dont le lieu qui eſt
* *Art.* 322. celui qu'on demande eſt * une Ellipſe que l'on conſtruit*
* *Art.* 324. en cette ſorte.

Ayant mené $AD=\frac{1}{2}b$ perpendiculaire à AP & du côté de PM, & tiré la droite indefinie DL parallele à AP, on prendra ſur cette ligne la partie $DE=\frac{1}{2}a$ du côté oppoſé à PM, & de part & d'autre du point E les parties EF, EG égales chacune à $\sqrt{\frac{1}{4}aa+\frac{1}{4}bb}$. Enſuite de l'axe FG qui ait pour parametre une ligne GH double de FG, on décrira une Ellipſe. Je dis que ſa portion AMO renfermée dans l'angle PAD eſt le lieu de l'équation precedente ; & par conſequent de tous les points cherchés M, lorſqu'ils tombent dans cet angle.

Car prolongeant PM, s'il eſt neceſſaire, juſqu'à ce qu'elle rencontre l'axe FG en L, on aura l'ordonnée $ML=\frac{1}{2}b-y$, & $EL=\frac{1}{2}a+x$, & par la proprieté de l'Ellipſe, $FL*LG$ ou $\overline{EF}^2-\overline{EL}^2\,(\frac{1}{4}bb-ax-xx)$. $\overline{LM}^2\,(\frac{1}{4}bb-by+yy) :: FG.GH :: 1.2$; ce qui donne en multipliant les extrêmes & les moyens $\frac{1}{4}bb-2ax-2xx=\frac{1}{4}bb-by+yy$. Donc &c.

Si l'on ſuppoſe à preſent que les points M tombent dans les angles BAD, BAR, on trouvera toûjours la même équation que ci-deſſus, tant par la condition du Problême que par la proprieté de l'Ellipſe ; en obſervant de faire $AP=-x$, & $PM=-y$, lorſque le point P tombe de l'autre côté de l'origine A, & PM, de l'autre côté de la ligne AP. D'où il ſuit que les portions de l'Ellipſe, que l'on vient de décrire, renfermées dans ces angles ſont le lieu de ces points.

On doit remarquer qu'il eſt impoſſible qu'aucun des points cherchés M, tombe dans l'angle PAR, oppoſé au ſommet à l'angle BAD dans lequel eſt ſitué le point donné C, d'où doivent partir toutes les perpendiculai-

res aux Paraboles. Car ſi d'un point quelconque pris dans cet angle PAR, on mene des droites comme MP, MT, perpendiculaires ſur AP & CM, il eſt viſible que les points P, T, tomberont du même côté du point A, & par conſequent que cette ligne MT ne pourra être tangente en M comme le demande la queſtion.

Si l'on ſuppoſe que AP (x) devienne nulle ou zero, l'équation precedente $yy - by + 2xx + ax = o$ ſe changera en celle-ci $yy - by = o$, dont les deux racines ſont $y = o$, & $y = b$; ce qui fait voir qu'en tirant AO parallele & égale à BC, le lieu des points cherchés M paſſera par les deux point A, O. On prouvera de même en ſuppoſant que le point P tombe de l'autre côté de l'origine A, & faiſant $AP\,(-x) = AB\,(a)$, que ce même lieu paſſera par les points B, C; de ſorte que l'Ellipſe doit être décrite autour du rectangle $ABCO$. Ceci donne lieu à une nouvelle conſtruction que voici.

Soit formé le rectangle $ABCO$, & ſoit décrite * autour de ce rectangle une Ellipſe, dont l'axe FG parallele aux côtés AB, OC, ſoit à ſon parametre GH, comme 1 eſt à 2. Il eſt évident qu'elle ſera le lieu cherché. * *Art.* 176.

REMARQUE I.

353. Si la nature des lignes courbes telles que AM étoit exprimée par l'équation generale $y^n = x^m a^{n-m}$ (les lettres m, n, marquent les expoſans des puiſſances de y & x tels qu'ils puiſſent être) qui renferme * non ſeulement la Parabole ordinaire, mais encore celles de tous les degrés à l'infini; on auroit TP * $\left(\frac{n}{m}x\right)$. $PM\,(y) :: CK\,(b-y)$. $KM\,(a+x)$: ce qui donne $yy - by + \frac{n}{m}xx + \frac{n}{m}ax = o$, dont le lieu qui eſt celui qu'on cherche, eſt une Ellipſe que l'on conſtruira ſelon l'article 322. ou bien ſelon l'article 176. ſi l'on obſerve que cette Ellipſe doit paſſer autour du rectangle donné $ABCO$, & que ſon axe FG parallele aux côtés AB, OC, doit être * *Art.* 229. * *Art.* 237.

à ſon parametre GH en la raiſon donnée de m à n.

REMARQUE II.

FIG. 191. 354. SI le centre E de l'Ellipſe qu'on vient de décrire tomboit ſur l'origine A de l'axe commun AP de toutes les Paraboles AM ; & l'axe FG de l'Ellipſe ſur l'axe AP des Paraboles : cette Ellipſe couperoit toutes ces differentes Paraboles à angles droits. On peut énoncer ce Theorême de la maniere qui ſuit.

FIG. 192. Soient une infinité de Paraboles comme AM de tel degré qu'on voudra, qui ayent toutes pour axe commun la même ligne AP, dont l'origine eſt toûjours au même point A ; & ſoit une Ellipſe qui ait pour centre le point A, & dont l'axe FG ſitué ſur AP ſoit à ſon parametre, comme le nombre m expoſant de la puiſſance de AP (x) eſt au nombre n expoſant de la puiſſance de PM (y), dans l'équation generale $y^n = x^m a^{n-m}$ qui exprime la nature des Paraboles AM. Je dis que cette Ellipſe coupera toutes ces Paraboles à angles droits.

Par le point M, où elle coupe telle de ces Paraboles qu'on voudra, ayant mené la tangente MT à cette Parabole, & MS perpendiculaire à cette tangente ; il eſt queſtion de prouver que MS touche l'Ellipſe au point M. Pour en venir à bout, on tirera la perpendiculaire MP ſur l'axe, & ayant nommé les indéterminées AP, x ; PM, y ; & la donnée FG, $2t$; on aura par la proprieté de l'Ellipſe $FP \cdot PG$ $(tt - xx)$. $\overline{PM}^2$ $(yy) :: m . n$, & partant $myy = ntt - nxx$. Or à cauſe des angles droits TPM, TMS, il vient TP * $\left(\frac{n}{m}x\right)$. PM $(y) :: PM$ (y). PS $= \frac{myy}{nx}$, & par conſéquent AS ou $AP + PS = \frac{nxx + myy}{nx}$ $= \frac{tt}{x}$ en mettant pour myy la valeur que l'on vient de trouver $ntt - nxx$. D'où l'on voit que $AP . AF :: AF . AS$, & qu'ainſi * la ligne MS touche l'Ellipſe au point M. *Ce qu'il falloit &c.*

* *Art.* 237.

* *Art.* 57.

EXEMPLE VI.

355. SOIENT imaginées une infinité d'Hyperboles qui ayent toutes pour Aſymptotes communes les mêmes droites AP, AO, données de poſition, qui ſont entr'elles un angle droit PAO ; & ſoient conçûës partir d'un point donné C une infinité de perpendiculaires comme CM à ces Hyperboles. On demande le lieu de tous les points M, où chacune des droites CM rencontre l'Hyperbole à laquelle elle eſt perpendiculaire. FIG. 193.

Ayant tiré les mêmes lignes que dans l'exemple precedent, & les ayant nommées par les mêmes lettres, on arrivera de même à cette proportion TP * (x). $PM\ (y) :: CK\ (b-y).\ KM\ (a-x)$; ce qui donne cette equation $yy-by-xx+ax=o$, dont voici * le lieu. * Art. 107. * Art. 330. ou 335.

Ayant pris ſur l'Aſymptote AO parallele à PM, la partie $AD=\frac{1}{2}b$, & mené DL parallele à AP ; on prendra ſur cette ligne la partie $DE=\frac{1}{2}a$ du côté de PM, & de part & d'autre du point E, les parties EF, EG, égales chacune à $\sqrt{\frac{1}{4}aa-\frac{1}{4}bb}$ ou $\sqrt{\frac{1}{4}bb-\frac{1}{4}aa}$ ſelon que a eſt plus grand ou moindre que b. On décrira enſuite de la ligne FG, comme premier axe dans le premier cas, & comme ſecond dans le deuxiéme, deux Hyperboles oppoſées équilateres. Je dis que leurs portions renfermées dans l'angle PAO, ſeront le lieu de cette équation, & par conſéquent celui de tous les points cherchés M.

Car prolongeant PM (s'il eſt neceſſaire) juſqu'à ce qu'elle rencontre l'axe FG, en L, on aura l'ordonnée $ML=\frac{1}{2}b-y$, & la partie $EL=x-\frac{1}{2}a$; & * par la proprieté des Hyperboles équilateres $\overline{EL}^2-\overline{EF}^2\ (xx-ax+\frac{1}{4}bb)=\overline{LM}^2\ (\frac{1}{4}bb-by+yy)$. Donc &c. * Art. 127.

Si $a=b$, la conſtruction precedente n'a plus de lieu, car la valeur du demi axe EF ou EG devient nulle. Et comme l'équation precedente devient celle-ci $yy-ay-xx+ax=o$, ou $yy-ay+\frac{1}{4}aa=xx-ax+\frac{1}{4}aa$

de laquelle extrayant de part & d'autre la racine quarrée, il vient $y - \frac{1}{2}a = x - \frac{1}{2}a$ ou $y = x$, & $\frac{1}{2}a - y = x - \frac{1}{2}a$ ou $y = a - x$; il s'enſuit que ſi l'on acheve le rectangle $ABCO$, & qu'on tire les deux diagonales AC, BO: elles ſeront le lieu de tous les points cherchés M. Car la diagonale AC eſt le lieu de la premiere équation $y = x$, & l'autre diagonale BO eſt le lieu de la deuxiéme $y = a - x$.

FIG. 194.

REMARQUE I.

356. SI la nature des lignes courbes qui ont pour Aſymptotes les droites AB, AO, étoit exprimée par l'équation generale $x^m y^n = a^{n+m}$ qui renferme * les Hyperboles de tous les dégrés à l'infini, on auroit TP^* $(\frac{n}{m}x)$. $PM\,(y) :: CK\,(b - y)$. $KM\,(a - x)$; ce qui donne $yy - by - \frac{n}{m}xx + \frac{n}{m}ax = 0$, dont le lieu ſe conſtruit * ainſi.

FIG. 193.

* Art. 229.

* Art. 237.

* Art. 330.

Ayant trouvé le point E comme dans l'exemple, on prendra ſur DL de part & d'autre du point E, les parties EF, EG, égales chacune à $\sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{m}{4n}bb}$ ou $\sqrt{\frac{m}{4n}bb - \frac{1}{4}aa}$; ſelon que naa eſt plus grand ou moindre que mbb. Enſuite de la ligne FG comme premier axe dans le premier cas, & comme ſecond dans le deuxiéme, qui ſoit à ſon parametre en la raiſon donnée de m à n, on décrira deux Hyperboles oppoſées: leurs portions renfermées dans l'angle OAB ſeront le lieu qu'on cherche.

Si $a.b :: \sqrt{m}.\sqrt{n}$, l'équation $yy - by - \frac{n}{m}xx + \frac{n}{m}ax = 0$ ſe change en celle-ci $yy - ay\sqrt{\frac{n}{m}} - \frac{n}{m}xx + \frac{n}{m}ax = 0$, ou $yy - ay\sqrt{\frac{n}{m}} + \frac{naa}{4m} = \frac{n}{m}xx - \frac{n}{m}ax + \frac{naa}{4m}$ de laquelle extrayant de part & d'autre la racine quarrée, il vient

FIG. 194.

vient $y - \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{n}{m}} = x\sqrt{\frac{n}{m}} - \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{n}{m}}$, ou $y = x\sqrt{\frac{n}{m}}$; & $\frac{1}{2}a\sqrt{\frac{n}{m}} - y = x\sqrt{\frac{n}{m}} - \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{n}{m}}$ ou $y = a\sqrt{\frac{n}{m}} - x\sqrt{\frac{n}{m}}$. D'où il suit que si l'on acheve le rectangle $ABCO$, & qu'on tire les diagonales BO, AC ; ces deux lignes droites seront le lieu de tous les points cherchés M : car la diagonale AC est le lieu de la premiere équation $y = x\sqrt{\frac{n}{m}}$, & l'autre diagonale BO le lieu de la seconde $y = a\sqrt{\frac{n}{m}} - x\sqrt{\frac{n}{m}}$.

On prouvera de même que dans l'Ellipse, que les Hyperboles opposées qui sont le lieu cherché, doivent être décrites autour du rectangle donné $ABCO$; & comme l'axe FG, parallele aux côtés AB, OC, doit être à son parametre en la raison donnée de m à n, il s'ensuit qu'on peut décrire, si l'on veut, ces Hyperboles par le moyen de l'article 176. (Liv. 4.) FIG. 193.

REMARQUE II.

357. SI le centre E de l'Hyperbole BFC tomboit sur le point A, & son axe FG sur la ligne AP ; je dis que cette Hyperbole couperoit à angles droits toutes celles qui ont pour Asymptotes les droites AP, AO ; ce qu'on peut énoncer ainsi. FIG. 193.

Soient une infinité d'Hyperboles de tel degré qu'on voudra, qui ayent toutes pour Asymptotes communes les mêmes droites AP, AO, qui font entr'elles un angle droit ; & soit une Hyperbole ordinaire FM qui ait pour centre le point A, & dont le premier axe FG situé sur AP, soit à son parametre comme le nombre m exposant de la puissance de AP (x) est au nombre n exposant de la puissance de PM (y) dans l'équation generale $x^m y^n = a^{m+n}$ qui exprime la nature des Hyperboles MAM. Je dis que l'Hyperbole FM coupe à angles droits toutes ces differentes Hyperboles. FIG. 195.

Ayant mené par le point M où elle coupe telle de ces Hyperboles qu'on voudra, une tangente MT à cette Hyperbole, & une perpendiculaire MS à cette tangente ; il s'agit de prouver que l'angle TMS ſera droit. pour le faire, on tirera MP perpendiculaire ſur l'Aſymptote AP ; & ayant nommé les indéterminés AP, x ; PM, y ; & la donnée $FG, 2t$; on aura par la proprieté de l'Hyperbole FM cette proportion $FP \times PG\ (xx-tt).\ \overline{PM}^2\ (yy) :: m.n$, & partant $myy = nxx - ntt$. Or à cauſe des angles droits TPM, TMS, il vient TP * $\left(\frac{n}{m}x\right)$. * *Art.* 237.

$PM\ (y) :: PM\ (y).\ PS = \frac{myy}{nx}$. Et par conſequent AS ou $AP - PS = \frac{nxx-myy}{nx} = \frac{tt}{x}$ en mettant pour myy la valeur qu'on vient de trouver $nxx - ntt$. D'où l'on voit que AS eſt troiſiéme proportionnelle à AP, AF ; & qu'ainſi * la ligne MS touche l'Hyperbole FM au point M. *Ce qu'il falloit démontrer.* * *Art.* 121.

EXEMPLE VII.

FIG. 196. 358. LA Parabole BAC étant donnée, on demande le lieu de tous les points M, tels qu'ayant mené de chacun de ces points, deux tangentes MB, MC, à cette Parabole ; l'angle BMC qu'elles comprennent ſoit toûjours égal à un angle donné.

Il peut arriver que l'angle donné BMC ſoit aigu, obtus, ou droit ; ce qui fait trois differens cas.

Premier cas. Lorſque l'angle donné BMC eſt aigu. Ayant mené * l'axe AD de la Parabole donnée BAC, qui rencontre les tangentes MB, MC, aux points F, G, on tirera ſur cet axe des points touchans B, C, & du point de concours M, les perpendiculaires BD, CE, MP. Et ayant mené MN qui faſſe ſur l'axe AD l'angle FNM égal à l'angle FMG complement à deux droits de l'angle donné BMC, on nommera les inconnuës & indéterminées AP, x ; PM, y ; AF, s ; AG, t ; * *Art.* 160.

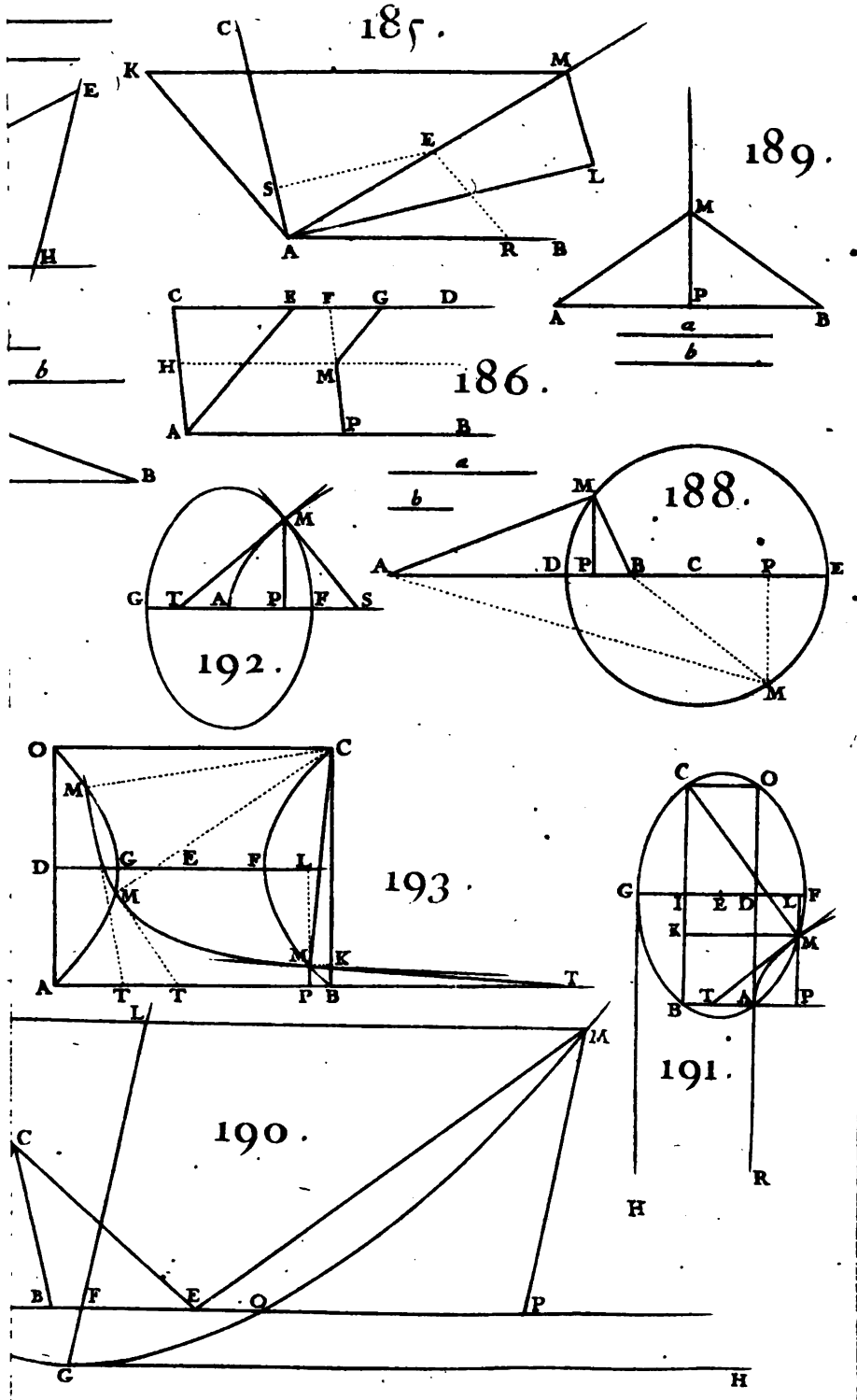


Planche 20. pag. 266.

& le parametre de l'axe AD, ſçavoir, AV, a; lequel eſt donné, puiſque la Parabole BAC eſt donnée. Cela poſé; à cauſe du triangle rectangle FPM, on aura le quarré $\overline{FM}^2 = ss - 2sx + xx + yy$, lequel étant diviſé par $FG\ (s-t)$ donnera $\frac{ss-2sx+xx+yy}{s-t} = FN$, à cauſe des triangles ſemblables FMG, FMN; & partant PN ou $FP - FN = \frac{sx+tx-st-xx-yy}{s-t}$. Je cherche à preſent par le moyen de la Parabole donnée BAC des valeurs de $s+t$, st, & $s-t$ par rapport à x & y, afin qu'étant ſubſtituées, dans la valeur de PN, cette ligne ne renferme plus dans ſon expreſſion d'autres inconnuës que x & y. Ce que je fais ainſi.

Les triangles ſemblables FPM, FDB; & GPM, GEC, donnent $FP\ (s-x)\ PM\ (y) :: FD^*\ (2s).\ BD^*\ (\sqrt{as})$. * Art. 22. Et $GP\ (x-t).\ PM\ (y) :: GE\ (2t).\ CE\ (\sqrt{at})$. D'où je forme ces deux équations $ss - 2xs - \frac{4yy}{a}s + xx = o$, & $tt - 2xt - \frac{4yy}{a}t + xx = o$; c'eſt à dire (en faiſant $p = 2x + \frac{4yy}{a}$ pour faciliter le calcul) $ss - ps + xx = o$, & $tt - pt + xx = o$. Je retranche la ſeconde équation de la premiere, & j'ai $ss - tt - ps + pt = o$ qui étant diviſée par $s-t$ donne $s+t = p$; & partant $s = p - t$, & $ss = ps - ts = ps - xx$ à cauſe de la premiere équation, d'où je tire $st = xx$. Si l'on ôte $4xx$ valeur de $4st$ de pp valeur de $ss + 2ts + tt$, on formera enfin cette égalité $ss - 2st + tt = pp - 4xx$, & extrayant de part & d'autre la racine quarrée, on aura $s - t = \sqrt{pp - 4xx} = \frac{4y\sqrt{ax+yy}}{a}$ en mettant pour p ſa valeur $2x + \frac{4yy}{a}$.

Si l'on met à preſent à la place de $s+t$, st, & $s-t$, leurs valeurs $2x + \frac{4yy}{a}$, xx, & $\frac{4y\sqrt{ax+yy}}{a}$ dans $\frac{sx+tx-st-xx-yy}{s-t}$, on trouvera $PN = \frac{4xy-ay}{4\sqrt{ax+yy}}$. Or ſi

l'on prend sur l'axe la partie NQ égale au parametre AV (a), & qu'on tire QT parallele à PM, & qui rencontre en T la droite MN prolongée autant qu'il sera necessaire ; il est visible que la ligne QT sera donnée, puisque dans le triangle rectangle NQT, l'angle QNT qui est égal à l'angle donné BMC est donné, & que de plus le côté NQ qui est égal au parametre AV de l'axe de la Parabole, est aussi donné. Soit donc la donnée $QT = b$, & à cause des triangles semblables NPM, NQT, on aura cette proportion, $NP \left(\frac{4xy-aj}{4\sqrt{yy+ax}}\right)$. $PM(y) :: a.b$, & partant $4a\sqrt{yy+ax} = 4bx-ab$, c'est à dire en ôtant les incommensurables $yy - \frac{bb}{aa}xx + ax + \frac{bb}{2a}x - \frac{1}{16}bb = 0$, dont le lieu (qui est celui qu'on cherche) se construit * en cette sorte.

* *Art.* 330. & 332.

Soit prise sur l'axe AD de la Parabole, la partie $AH = \frac{1}{4}a + \frac{a^3}{2bb}$ du côté de PM ; & de part & d'autre du point H les parties HI, HK, égales chacune à $\frac{aa\sqrt{aa+bb}}{2bb}$; & soit décrite du premier axe IK qui soit à son parametre KL comme aa est à bb, une Hyperbole KM. Je dis qu'elle sera le lieu de l'équation que l'on vient de trouver.

Car $HP = x - \frac{1}{4}a - \frac{a^3}{2bb}$, & par la proprieté de l'Hyperbole $\overline{HP}^2 - \overline{HK}^2 \left(xx - \frac{1}{2}ax - \frac{a^3}{bb}x + \frac{1}{16}aa\right).\overline{PM}^2 (yy) :: IK.KL :: aa.bb$; ce qui donne, en multipliant les extrêmes & les moyens, l'équation precedente.

Il est à propos de remarquer que dans ce cas FN sera toûjours moindre que FP ; puisque l'angle FNM, qu'on a pris égal au complement à deux droits de l'angle donné, est obtus. C'est pourquoi $\frac{4xy-aj}{4\sqrt{yy+ax}}$ valeur de $FP - FN$ doit être positive ; & par consequent x doit toûjours surpasser $\frac{1}{4}a$. D'où l'on voit que quoiqu'il y ait

une portion de l'Hyperbole oppoſée à KM qui ſoit renfermée dans l'angle PAV fait par la ligne AP & par la droite AV menée parallelement à PM & du même côté, elle ne peut pas neanmoins faire partie du lieu des points M ; parce que AI étant moindre que $\frac{1}{4}a$, l'indéterminée AP qui ſeroit alors moindre que AI, ſeroit à plus forte raiſon moindre que $\frac{1}{4}a$.

Second cas. Lorſque l'angle donné eſt obtus. En ſuppoſant que les points M tombent dans l'angle PAV, & par un raiſonnement ſemblable à celui du premier cas, on trouvera la même équation ; & par conſequent la conſtruction du lieu demeurera la même. Mais il faut obſerver dans ce ſecond cas que FN ſera plus grande que FP, & qu'ainſi la valeur $\frac{4xy-ay}{4\sqrt{yy+ax}}$ de $FP-FN$ deviendra negative ; d'où il ſuit que x ſera toûjous moindre que $\frac{1}{4}a$, & partant que le lieu cherché ſera alors la portion de l'Hyperbole qui s'étend du même côté de la Parabole, laquelle ſe trouve renfermée dans cet angle PAV. Et comme en ſuppoſant que les points M tombent dans l'angle DAV, on trouve encore la même équation, il s'enſuit que cette Hyperbole entiere ſera le lieu de tous les points cherchés M.

De-là il eſt évident que ſi une Hyperbole KM eſt le lieu de tous les points M lorſque l'angle donné BMC eſt aigu, ſon oppoſée ſera le lieu de tous ces points lorſque l'angle donné ſera égal au complement à deux droits de l'angle BMC, parce qu'alors les lignes données a & b qui déterminent la conſtruction des Hyperboles demeurent les mêmes.

Troiſiéme cas. Lorſque l'angle donné eſt droit. Il eſt clair que FN eſt alors égale à FP, & qu'ainſi la valeur $\frac{4xy+ay}{4\sqrt{yy+ax}}$ de $FP-FN$ ſera nulle ou zero. D'où l'on voit * que ſi l'on prend ſur l'axe AD prolongé vers ſon origine A la partie $AP=\frac{1}{4}a$, & qu'on lui mene la perpendiculaire indéfinie PM ; cette ligne qui n'eſt autre FIG. 196. 197. * *Art.* 306.

que la directrice comme l'on peut voir dans les définitions de la Parabole, ſera le lieu cherché.

COROLLAIRE.

FIG. 196. 197. 359. Si l'on mene le demi-ſecond axe HO, & qu'on tire l'hypothenuſe KO; les triangles rectangles KHO, NQT ſeront ſemblables : car puiſque le ſecond axe eſt moyen proportionnel entre le premier IK & ſon parametre KL, il s'enſuit que $\overline{KH}^2 . \overline{HO}^2 :: IK . KL :: aa . bb$, & qu'ainſi $KH . HO :: NQ\,(a) . QT\,(b)$. L'angle HKO (qui ſelon la définition 11. du 3. Livre, eſt égal à la moitié de l'angle fait par les Aſymptotes de l'Hyperbole KM) ſera donc égal à l'angle QNT; c'eſt à dire, à l'angle donné BMC; & on aura $NQ\,(a) . QT\,(b) :: KH\left(\frac{aa\sqrt{aa+bb}}{2bb}\right) . HO = \frac{a\sqrt{aa+bb}}{2b}$; & $NQ\,(a) . NT\,(\sqrt{aa+bb}) :: KH\left(\frac{aa\sqrt{aa+bb}}{2bb}\right) . KO = \frac{a^3+abb}{2bb}$. Or ſi l'on poſe l'hypothenuſe KO du triangle rectangle KHO fait par les deux demi-axes HK, HO, ſur le premier axe IK depuis le centre H, en R & S; il eſt clair * que ces deux points ſeront les deux foyers de l'Hyperbole KM & de ſon oppoſée; & que $RA = \frac{1}{4}a$, puiſque $HR = \frac{a^3+abb}{2bb}$ & $AH = \frac{1}{4}a + \frac{a^3}{2bb}$. D'où l'on voit que le foyer R de l'Hyperbole KM eſt encore le foyer * de la Parabole BAC, & que $SR\left(\frac{a^3+abb}{bb}\right) . HO\left(\frac{a\sqrt{aa+bb}}{2b}\right) :: HO\left(\frac{a\sqrt{aa+bb}}{2b}\right) . AR\,(\frac{1}{4}a)$, puiſqu'en multipliant les extrêmes & les moyens, on forme le même produit. Ce qui donne lieu à ce Theorême.

* *Art.* 74.

* *Def.* 3. 4. 5. I.

FIG. 196. Si ſur la diſtance SR des foyers d'une Hyperbole KM, on prend du côté de S, la partie RA troiſiéme proportionnelle à cette diſtance SR, & à la moitié HO de ſon ſecond axe; & qu'ayant décrit * une Parabole BAC qui ait pour foyer le point R, & pour axe la li-

* *Art.* 4.

gne AR dont l'origine ſoit en A, on tire d'un point quelconque M de l'Hyperbole KM deux tangentes MB, MC, à cette Parabole : je dis que l'angle BMC qu'elles comprennent, ſera toûjours égal à la moitié de l'angle fait par les Aſymptotes ; & que ſi l'on prend le point M ſur l'Hyperbole oppoſée, l'angle compris par les tangentes, ſera toûjours égal au complement à deux droits de la moitié de l'angle fait par les Aſymptotes.

EXEMPLE VIII.

360. UNE ligne droite indéfinie BAP étant donnée de poſition ſur un plan avec deux points fixes A, D, l'un ſur cette ligne & l'autre au dehors ; on demande le lieu de tous les points M, dont la proprieté ſoit telle qu'ayant mené de chacun de ces points aux deux points fixes A, D, les droites MA, MD : la ligne AM ſoit toûjours égale à la partie ME de l'autre droite DM, priſe entre le point M & le point E où elle rencontre la ligne MP. FIG. 198.

Du point donné D & du point M que l'on ſuppoſe être l'un des points cherchés, ayant mené les perpendiculaires BD, MP, ſur la ligne AP, on nommera les données AB, $2a$; BD, $2b$; & les inconnuës & indéterminées AP, x ; PM, y : & on aura $AP = PE$; puiſque (*hyp.*) $AM = ME$. Or les triangles ſemblables EBD, EPM, donnent EB ou $AE - AB$ $(2x - 2a)$. BD $(2b)$ :: EP (x). PM (y). En multipliant donc les extrêmes & les moyens, on formera cette équation $xy - ay = bx$, qui renferme la condition marquée dans le Problême, & dont le lieu qui eſt * une Hyperbole équilatere entre les Aſymptotes ſe conſtruit ainſi. * *Art.* 337.

Soit tirée la ligne AD que l'on diviſera par le milieu en C, par où l'on menera les droites CF, CG, l'une parallele & l'autre perpendiculaire à AP : ſoient décrites entre les Aſymptotes CF, CG, indéfiniment prolongées de part & d'autre du point C, par les points D, A, * * *Art.* 130. 131.

* *Def.* 16. III. les deux Hyperboles oppoſées DM, AM, qui ſont * équilateres. Je dis qu'elles ſeront le lieu complet de tous les points cherchés M.

Car les Aſymptotes CF, CG, diviſent les droites AB, BD en deux parties égales aux points L, K, puiſque AD eſt diviſée par le milieu en C ; & partant lorſque les points P tombent ſur AB prolongée indefiniment du côté de B, comme l'on vient de ſuppoſer en faiſant le calcul, la ligne PL ou $CH = x - a$, $HM = y - b$; * *Art.* 100. & par la proprieté * de l'Hyperbole $CH * HM$ $(xy - ay - bx + ab) = CK * KD$ (ab) ; ce qui donne $xy - ay = bx$.

Si l'on ſuppoſe à preſent que les points P tombent ſur BA indefiniment prolongée du côté de A, ou ſur la partie déterminée AB ; on trouvera toûjours (en obſervant de faire $AP = -x$, & $PM = -y$ lorſqu'ils tombent de l'autre coté du point A & de la ligne AP) la même équation $xy - ay = bx$, tant par la condition marquée dans le Problême que par la proprieté de l'Hyperbole AM ou DM. Donc &c.

COROLLAIRE.

361. DE-LA il eſt évident que les parties MR, MS des deux droites AM, DM, compriſes entre le point M & l'une ou l'autre des Aſymptotes, ſont égales entr'elles. Car 1°. Lorſque l'Aſymptote, comme CF, eſt parallele à la ligne AP, l'angle RSM eſt égal à l'angle AEM, & l'angle SRM à l'angle MAE. 2°. Lorſque l'Aſymptote, comme CG, eſt perpendiculaire à AP, l'angle RSM ſera le complement à un droit de l'angle AEM à cauſe du triangle rectangle SLE, & de même l'angle SRM ou ſon oppoſé au ſommet ARL eſt le complement à un droit de l'angle EAM à cauſe du triangle rectangle RAL. Donc puiſque les angles EAM, AEM, ſont égaux, il s'enſuit que le triangle RMS ſera iſoſcelle, & qu'ainſi les côtés MR, MS, ſeront égaux entr'eux.

entr'eux. Ce Corollaire nous fournit le Theorême ſuivant.

Si l'on mene d'un point quelconque M d'une Hyperbole équilatere, deux droites MD, MA, aux extremités d'un de ſes premiers diametres AD, leſquelles rencontrent l'une ou l'autre Aſymptote aux points R, S: je dis que les parties MR, MS, de ces deux droites ſeront égales entr'elles.

EXEMPLE IX.

362. DEUX cercles EGF, BNO, dont les centres ſont C, A, étant donnés, & ayant mené par un point quelconque G du cercle EGF une tangente indéfinie GNO qui coupe l'autre cercle BNO en deux points N, O, par leſquels ſoient tirées les tangentes NM, OM; on demande le lieu de tous les points de concours M. FIG. 199.

Ayant tiré MP perpendiculaire ſur CA, qui paſſe par les centres C, A, des cercles donnés; on menera les droites CG, AM, qui ſeront paralleles, puiſque l'une & l'autre eſt perpendiculaire ſur la même droite GO qu'elles rencontrent aux points G, Q; & on nommera les données AB ou AO, a; CE ou CF ou CG, b; CA, c; & les inconnuës & indéterminées AP, x; PM, y. Cela fait, les triangles rectangles ſemblables AOM, AQO, donneront $AM\ (\sqrt{xx+yy}).\ AO\ (a) ::\ AO\ (a).\ AQ = \frac{aa}{\sqrt{xx+yy}}$. Et menant CH parallele à GO, qui rencontre en H, MA prolongée, s'il eſt neceſſaire, on aura à cauſe des triangles rectangles ſemblables MAP, CAH, cette proportion: $PA\ (x).\ AM\ (\sqrt{xx+yy}) ::\ AH$ ou $CG - AQ\ \left(b - \frac{aa}{\sqrt{xx+yy}}\right).\ AC\ (c)$; ce qui donne $b\sqrt{xx+yy} = aa + cx$, c'eſt à dire, en ôtant les incommenſurables, l'équation $yy + \frac{bb-cc}{bb}xx - \frac{2aac}{bb}x - \frac{a^4}{bb} = 0$, dont le lieu eſt * une Parabole, une Ellipſe, ou une Hyperbole ſelon que $CE\ (b)$ eſt égale, * Art. 345.

plus grande, ou moindre que CA (c). Voici la construction du dernier cas.

Soit prise sur la ligne AP la partie $AR = \frac{aac}{cc-bb}$ du côté opposé à PM ; & de part & d'autre du point R les parties RI, RK, égales chacune à $\frac{aab}{cc-bb}$; & soit décrite du premier axe IK qui ait pour parametre $KL = \frac{2aa}{b}$ une Hyperbole. Je dis que sa portion indéfinie DM renfermée dans l'angle PAD fait par la ligne AP & par la droite AD menée parallelement à PM & du même côté, sera le lieu de cette équation.

Car par la proprieté de l'Hyperbole, $\overline{RP}^2 - \overline{KI}^2 \left(\frac{a^4 + 2aacx}{cc-bb} + xx\right) . \overline{PM}^2 (yy) :: IK\left(\frac{2aab}{cc-bb}\right) . KL\left(\frac{2aa}{b}\right)$; ce qui donne l'équation precedente.

Si l'on suppose à present que les points M tombent dans l'angle KAD qui est à côté de l'angle PAD, on trouvera encore (en faisant $AP = -x$) la même équation, d'où il suit que la portion déterminée ID de l'Hyperbole IM, avec la moitié entiere de l'Hyperbole qui lui est opposée sera le lieu de ces points, & qu'ainsi ces deux Hyperboles opposées composent le lieu complet de tous les points cherchés M : où l'on doit observer que la portion SIT renfermée dans le cercle BNO est inutile, puisqu'aucun des points de concours M des deux tangentes NM, OM, à ce cercle, ne peuvent tomber au dedans.

Il est à propos de remarquer que $RA\left(\frac{aac}{cc-bb}\right) = \sqrt{\overline{KK} + \frac{1}{4}IK \times KL}$, comme l'on voit en mettant pour ces lignes leurs valeurs analytiques ; & qu'ainsi puisque le rectangle $IK \times KL$ vaut le quarré de la moitié du second axe, le point A sera * l'un des foyers de l'Hyperbole IM. Or puisque AI ou $AR - RI = \frac{aac-aab}{cc-bb} = \frac{aa}{c+b}$, & $AK = AR + RK = \frac{aac+aab}{cc-bb} = \frac{aa}{c-b}$, il s'ensuit qu'on peut abreger la construction

* *Art.* 74.

precedente en cette ſorte.

Soient priſes ſur la ligne AC du côté de C, les parties AI, AK, troiſiémes proportionnelles à $AF\ (c+b)$, $AB\ (a)$, & à $AE\ (c-b)$, $AB\ (a)$; & ſoient décrites du premier axe IK, & du foyer A * deux Hyperboles oppoſées. Il eſt évident qu'elles ſeront le lieu de tous les points cherchés M. * Art. 76.

Lorſque $CE\ (b)$ eſt plus grande que $CA\ (c)$, la conſtruction de l'Ellipſe qui eſt le lieu des points cherchés M, ſe fera de la même maniere que pour l'Hyperbole, en obſervant de prendre la partie AK de l'autre côté du point A par rapport au point C. Et enfin lorſque $CE\ (b)=CA\ (c)$, il n'y aura qu'à prendre ſur la ligne AC du côté de C, la partie AI troiſiéme proportionnelle à AF, AB, & décrire enſuite une Parabole qui ait pour foyer le point A, & pour axe la ligne IA dont l'origine ſoit en I. FIG. 200.

COROLLAIRE I. POUR L'ELLIPSE & LES HYPERBOLES OPPOSE'ES.

363. DE-LA il eſt évident que ſi de l'un des foyers A d'une Ellipſe ou de deux Hyperboles oppoſées, dont le premier axe eſt IK, on décrit un cercle quelconque BNO; & qu'ayant pris ſur cet axe les parties AE, AF, troiſiémes proportionnelles à AK, AB, & à AI, & AB, (ſçavoir AE du côté du point K, & AF du côté du point I) on décrive du diametre EF un cercle EGF: il eſt évident, dis-je, que ſi l'on tire d'un point quelconque M de la Section, deux tangentes MN, MO, au cercle BNO, la ligne ON qui joint les points touchans étant prolongée, s'il eſt neceſſaire, touchera toûjours l'autre cercle EGF. FIG. 199.

COROLLAIRE II. POUR LA PARABOLE.

364. IL ſuit encore de la reſolution de ce Problême, que ſi du foyer A d'une Parabole IM dont l'axe IA a FIG. 200.

ſon origine en I, on décrit un cercle quelconque BNO; & qu'ayant pris ſur l'axe du côté de ſon origine, la partie AF troiſieme proportionnelle à AI, AB, on décrive un cercle AGF du diametre AF; & qu'enfin l'on tire d'un point quelconque M de la Parabole deux tangentes MN, MO, au cercle BNO: la ligne NO qui joint les points touchans, étant prolongée, s'il eſt neceſſaire, touchera toûjours le cercle AGF en un point G.

EXEMPLE V.

FIG. 201. 202. 203.

365 UNE ligne droite indéfinie AP étant donnée ſur un plan, avec un point fixe F hors d'elle; trouver le lieu de tous les points M, dont la proprieté ſoit telle qu'ayant mené de chacun de ces points une perpendiculaire MP ſur AP, & au point F une ligne droite MF; la raiſon de MP à MF ſoit toûjours la même, que celle de la donnée a à la donnée b.

Ayant mené du point donné F ſur la ligne AP la perpendiculaire FA, & du point M que l'on ſuppoſe être l'un des cherchés, une parallele MQ à AP, on nommera la donnée AF, c; & les inconnuës & indéterminées AP, x; PM, y; qui font entr'elles un angle droit APM. Cela poſé, le triangle rectangle MQF donne $\overline{MF}^2 = \overline{FQ}^2 (cc - 2cy + yy) + \overline{MQ}^2 (xx)$, & à cauſe de la condition marquée dans le Problême on aura $\overline{MP}^2 (yy). MI^2 (cc - 2cy + yy + xx) :: aa. bb$; d'où (en multipliant les moyens & les extrêmes) on tire cette équation $aayy - bbyy - 2aacy + aaxx + aacc = 0$, dont il s'agit maintenant de conſtruire le lieu. Pour en venir à bout, il faut diſtinguer trois differens cas ſelon que a eſt plus grand, moindre, ou égal à b.

Premier cas. En diviſant par $aa - bb$, on trouve cette équation $yy - \frac{2aac}{aa-bb}y + \frac{aa}{aa-bb}xx + \frac{aacc}{aa-bb} = 0$,

* *Art.* 324. dont le lieu eſt une Ellipſe * que l'on conſtruit en cette ſorte.

Soit prise sur AF du côté de F, la partie $AC = \frac{aac}{aa-bb}$; FIG. 201. & ayant mené par le point C une parallele KH à AP, soient prises sur cette ligne de part & d'autre du point C, les parties CH, CK, égales chacune à $\sqrt{\frac{bbcc}{aa-bb}}$. Ensuite de l'axe KH qui soit à son parametre KL comme $aa-bb$ est à aa, soit décrite une Ellipse. Je dis qu'elle sera le lieu de l'équation precedente, & par conséquent de tous les points cherchés M.

Car par la proprieté de l'Ellipse, $KE * EH$ ou $\overline{CH}^2 - \overline{CE}^2 \left(\frac{bbcc}{aa-bb} - xx\right)$. $\overline{EM}^2 \left(\frac{a^4cc}{aa-bb^2} - \frac{2aacy}{aa-bb} + yy\right) :: KH. KL :: aa-bb. aa$; ce qui, en multipliant les extrêmes & les moyens, rend la même équation que ci dessus.

Puisque $\overline{CH}^2. \overline{CB}^2 :: KH. KL :: aa-bb. aa$, il s'ensuit que le demi-axe CB ou $CD = \frac{abc}{aa-bb}$; & qu'ainsi DF ou $DC + CF = \frac{abc+bbc}{aa-bb} = \frac{bc}{a-b}$, & FB ou $CB - CF = \frac{abc-bbc}{aa-bb} = \frac{bc}{a+b}$. Donc $DF * FB = \frac{bbcc}{aa-bb} = \overline{CH}^2$; & partant le point F est * l'un des foyers de cette Ellipse qui a pour grand axe la ligne BD. Ces remarques nous fournissent une construction beaucoup plus simple que la precedente : La voici. * Art. 35.

Soient prises sur FA du côté de A la partie $FB = \frac{bc}{a+b}$, & du côté opposé la partie $FD = \frac{bc}{a-b}$. Ayant pris DG égal à BF du côté de F; soit décrite des foyers F, G, & de l'axe BD * une Ellipse ; il est évident qu'elle satisfera à la question. * Art. 36.

Second cas. On aura dans ce cas $yy + \frac{2aac}{bb-aa}y - \frac{aa}{bb-aa}xx - \frac{aacc}{bb-aa} = o$, parce que a est moindre que b. Le lieu de cette équation sera deux Hyperboles opposées, que l'on pourra construire selon l'article 332. (Liv. 7). Après

avoir fait les mêmes remarques, que dans le cas precedent, on trouvera cette construction.

FIG. 202. Soient prises sur FA du côté du point A les parties $FB = \frac{bc}{b+a}$, $FD = \frac{bc}{b-a}$. Ayant pris DG égal à BF du côté opposé au point F, soient * décrites des foyers F, G, & du premier axe BD, deux Hyperboles opposées BM, DM. Elles seront le lieu de tous les points cherchés M.

* *Art.* 76.

Troisiéme cas. L'équation generale $aayy - bbyy - 2aacy + aaxx + aacc = o$ se changeant en cette autre $xx - 2cy + cc = o$, parce que $a = b$, son lieu est une Parabole qu'il est facile de construire selon l'article 310. (Liv. 7.) mais on voit tout d'un coup & sans avoir besoin d'aucun calcul, que si l'on décrit une Parabole qui ait pour directrice la ligne AP, & pour foyer le point F, selon qu'il est enseigné dans la définition premiere du premier Livre, elle sera le lieu requis.

FIG. 203.

COROLLAIRE I.

366. IL est clair dans le premier cas, que $CF\left(\frac{bbc}{aa-bb}\right) . CB\left(\frac{abc}{aa-bb}\right) :: CB\left(\frac{abc}{aa-bb}\right) . CA\left(\frac{aac}{aa-bb}\right) :: a . b$, & l'on trouve la même chose dans le second cas : ce qui donne lieu à ce Theorême.

FIG. 201. 202. Si dans une Ellipse ou deux Hyperboles opposées qui ont pour centre le point C, pour foyers les deux points F, G, & pour premier axe la ligne BD, on prend CA troisiéme proportionnelle à CF, CB, du côté du foyer F ; & qu'on mene la droite indéfinie AP perpendiculaire sur BD : je dis que si d'un point quelconque M de la Section, l'on tire sur AP la perpendiculaire MP, & au foyer F la droite MF ; la raison de MP à MF, sera toûjours la même que du premier axe BD à la distance FG des foyers.

Dans les Corollaires suivans cette ligne droite indéfinie AP s'appellera *Directrice* à l'égard de ces deux

Sections ; auſſi-bien qu'à l'égard de la Parabole. D'où l'on voit qu'il eſt facile de décrire une Section conique qui ait pour foyer un point donné F, pour directrice une ligne donnée de poſition AP, & qui paſſe par un point donné M : car tirant au foyer F la ligne MF, & ſur la directrice AP la perpendiculaire MP, & nommant les données MP, a ; MF, b ; il n'y aura qu'à décrire le lieu des points M tels que MP ſoit toûjours à MF comme a eſt à b.

COROLLAIRE II.

367. SI l'on joint deux points quelconques M, N, d'une Section conique, par une ligne droite qui rencontre la directrice en C ; & que du foyer F, on tire les droites FM, FN, FC : je dis que la ligne FC coupe en deux parties égales l'angle NFH complement à deux droits de l'angle NFM, lorſque les points M, N, tombent ſur une Parabole, Ellipſe, ou Hyperbole ; & l'angle NFM, lorſqu'ils tombent ſur deux Hyperboles oppoſées. FIG. 204. 205.

Car tirant les perpendiculaires MP, NQ, ſur la directrice, & la ligne ND parallele à MF ; les triangles ſemblables MPC, NQC, & MFC, NDC, donnent $MP. NQ :: MC. NC :: MF. ND$. Et partant $MP. MF :: NQ. ND$. Or par la proprieté de la Section conique qui a pour directrice la ligne PQ, & pour foyer le point F, on aura $MP. MF :: NQ. NF$. Les lignes ND, NF, ſeront donc égales entr'elles ; c'eſt pourquoi dans le premier cas l'angle NDF ou CFH ſera égal à l'angle CFN, & dans le ſecond l'angle FDN ou CFM ſera égal à l'angle CFN. Ce qu'il falloit prouver.

COROLLAIRE III.

368. DE-LA on voit comment on peut décrire une Parabole, Ellipſe, ou Hyperbole qui paſſe par trois FIG. 204.

points donnes M, N, O, & qui ait pour foyer le point donné F.

Soient menées par le foyer F, les droites FC, FE, qui diviſent par le milieu les angles NFH, NFK, complemens à deux droits des angles donnés MFN, OFN; & par les points C, E, où elles rencontrent les lignes MN, ON, qui joignent les points donnés, ſoit tirée une ligne droite indefinie CE. Soit décrite une Section conique qui ait pour directrice la ligne CE, pour foyer le point F, & qui paſſe par le point M: il eſt clair ſelon le Corollaire precedent qu'elle paſſera auſſi par les deux autres points N, O.

COROLLAIRE IV.

FIG. 205. 369. ON tire encore du Corollaire ſecond une maniere de décrire deux Hyperboles oppoſées qui ayent pour foyer le point F; & dont l'une d'elles paſſe par deux points donnés M, O, & l'autre par un point donné N.

Soit menée par le point F la ligne FE qui diviſe par le milieu l'angle HFO complement à deux droits de l'angle MFO formé par les droites FM, FO, tirées du point F aux deux points M, O, qui doivent ſe trouver dans la même Hyperbole; & ſoit encore menée par le même point F la ligne FC, qui diviſe en deux parties égales l'angle MFN formé par les droites FM, FN, tirées du point F aux deux points M, N, qui doivent tomber ſur les deux Hyperboles oppoſées. Par les points E, C, où les lignes FE, FC, rencontrent les droites MO, MN, qui joignent les points donnés, ſoit tirée une ligne droite indéfinie EC. Soient enfin décrites deux Hyperboles oppoſées, qui ayent pour foyer le point F, pour directrice la ligne EC, & dont l'une d'elles paſſe par le point M: il eſt évident qu'elles ſatisfont à la queſtion.

COROL. V.

COROLLAIRE. V.

370. LES mêmes choſes étant poſées que dans le Corollaire ſecond ; il eſt viſible que l'angle MFN difference de l'angle CFM & de ſon complement à deux droits CFH ou CFN, diminuë à meſure que le point N approche du point M ; de ſorte qu'il s'évanoüit tout-à-fait, lorſque le point N tombe ſur le point M. L'angle CFM ſera donc égal alors à ſon complement à deux droits, & par conſequent il ſera droit. Or comme la ligne MN devient alors la tangente MT, puiſqu'elle paſſe * par deux points infiniment proches de la courbe ; on voit naître une maniere generale & toute nouvelle de mener d'un point donné M ſur une Section conique, une tangente MT, un foyer F avec l'axe qui paſſe par ce foyer étant donnés. FIG. 204. * *Art.* 188.

Car ayant trouvé la directrice comme il eſt enſeigné dans le Corollaire ſecond, on menera du point donné M au foyer F la droite MF, ſur laquelle on tirera la perpendiculaire FT qui rencontre la directrice en T, par où & par le point donné M on tirera la tangente cherchée MT.

EXEMPLE XI.

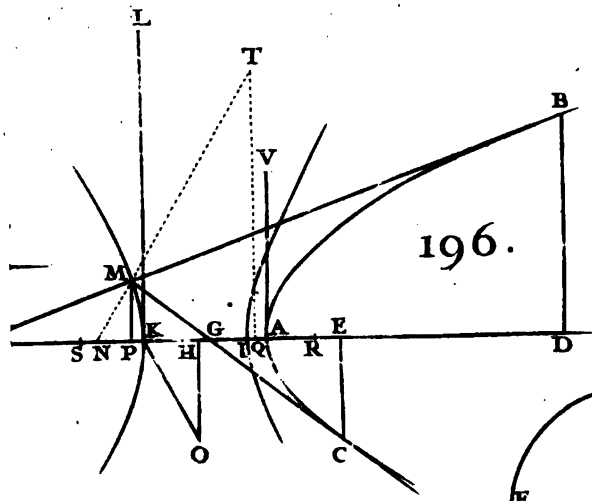
371. DEUX angles KAM, KBM, mobiles autour des points fixes A, B, étant donnés ſur un plan, avec une ligne droite indéfinie FK qui ne paſſe par aucun de ces points ; ſoit imaginé le point de concours K des deux côtés AK, BK, ſe mouvoir le long de la droite FK, & ſoit propoſé de trouver la nature de la ligne courbe que décrit dans ce mouvement le concours M des deux autres côtés AM, BM, prolongés lorſqu'il eſt neceſſaire de l'autre côté des points A, B. FIG. 206.

Sur AB, comme corde, je décris de l'autre côté du point M, un arc de cercle capable d'un angle BDA qui vaille quatre droits moins les deux angles donnés KAM, KBM ; & ayant achevé le cercle entier dont

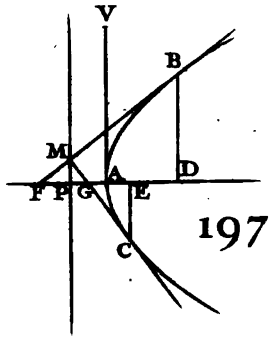
cet arc fait partie, il peut arriver que la droite indéfinie FK tombe toute entiere au dehors de ce cercle, ou qu'elle paſſe au dedans, ou enfin qu'elle le touche ce qui fait trois differens cas que j'explique en particulier.

Premier cas. Du centre C du cercle $BDAE$ je mene ſur FK, la perpendiculaire CF qui le rencontre aux points D, E; & je fais paſſer par le point D (plus proche de la ligne FK que l'autre point E) les deux côtés DA, DB, des deux angles DAP, DBQ, égaux aux angles KAM, KBM, leſquels côtés étant prolongés vers D rencontrent la ligne FK, aux points G, H. Or par la conſtruction l'angle BDA plus les deux angles DAP, DBQ, vaut quatre droits; & comme le même angle BDA plus les deux angles DAB, DBA, vaut deux droits; il s'enſuit que les angles BAP, BAQ, vallent deux droits, & qu'ainſi les lignes AP, BQ, ſont paralleles entr'elles. Cela poſé.

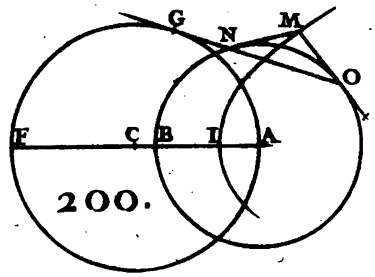
Soit mené du point K ſur les deux côtés AD, BD, les perpendiculaires KR, KS; & des points A, M, ſur les deux autres côtés BQ, AP, les perpendiculaires AI, MP, qui rencontrent BQ, aux points I, Q. Soient les données $FE = a$, $FD = b$, $BI = c$, $AI = d$, $FG = g$, $FH = h$, $DG = m$, $DH = n$; & les inconnuës $FK = z$, $AP = x$, $PM = y$; & à cauſe des triangles rectangles ſemblables, GDF, GKR, on aura ces deux proportions: $GD(m).GF(g) :: GK(z-g).GR = \frac{gz-gg}{m}$. Et $GD(m).DF(b) :: GK(z-g).KR = \frac{bz-bg}{m}$. Or les triangles rectangles ſemblables GDF, EDA, donnent auſſi $GD(m).DF(b) :: ED(a-b).AD = \frac{ab-bb}{m}$, & partant $AD+DG$ ou $AG = \frac{ab-bb+mm}{m}$, & $AG+GR$ ou $AR = \frac{ab-bb+mm+gz-gg}{m} = \frac{ab+gz}{m}$; parce que $mm = bb+gg$ à cauſe du triangle rectangle DFG. Mais les triangles rectangles ARK, APM ſont ſemblables



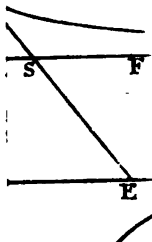
196.

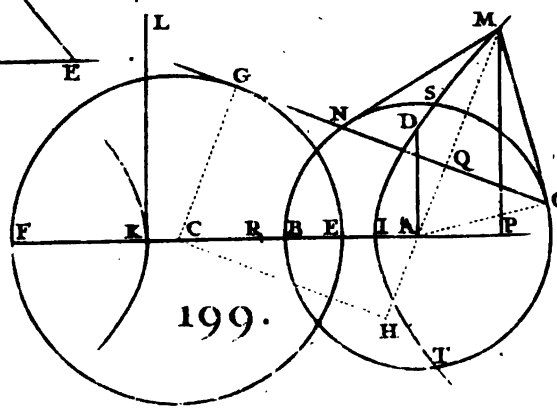


197.

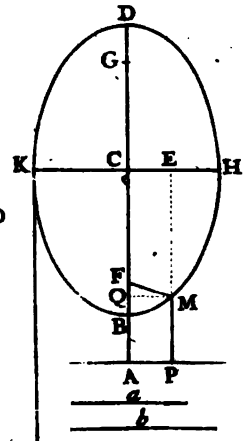


200.

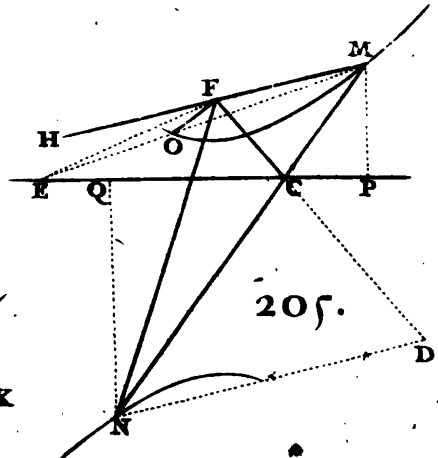




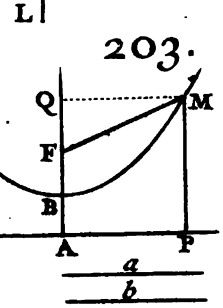
199.



201.



205.



203.

Planche 21. pag. 282.

car retranchant des angles égaux KAM, DAP le même angle KAP, les reſtes KAR, PAM, ſeront égaux ; & par conſéquent $AR\left(\frac{ab+gz}{m}\right).RK\left(\frac{bz-bg}{m}\right)::AP(x).PM(y)$, d'où l'on tire $z=\frac{aby+bgx}{bx-gy}$.

Maintenant les triangles rectangles ſemblables HDF, HKS donnent $HS=\frac{bz+bb}{n}$, $KS=\frac{bz+bb}{n}$; & les triangles rectangles ſemblables HFD, EBD, donnent $DH(n).DF(b)::DE(a-b).DB=\frac{ab-bb}{n}$. Et partant $BD+DH$ ou $BH=\frac{ab-bb+nn}{n}$, & $BH-HS$ ou $BS=\frac{ab-bb+nn-bz-bb}{n}=\frac{ab-bz}{n}$, parce que $nn=bb+hh$ à cauſe du triangle rectangle DFH. Or les triangles rectangles BSK, BQM, ſont ſemblables ; car retranchant des angles égaux DBQ, KBM, le même angle DBM, les reſtes KBS, MBQ, ſeront égaux ; & par conſéquent $BS\left(\frac{ab-bz}{n}\right).SK\left(\frac{bz+bb}{n}\right)::BQ(x-c).QM(y+d)$. D'où l'on tire $z=\frac{aby-bhx+bcb+abd}{bx+by-bc+bd}$.

Comparant cette derniere valeur de z avec la precedente, multipliant en croix, en faiſant pour abreger $GH(g+b)=f$, on arrive enfin en diviſant par abf à cette équation.

$$yy+dy+\frac{b}{a}xx-\frac{bc}{a}x=o.$$
$$-\frac{bc}{f}\qquad-\frac{bd}{f}$$
$$+\frac{cgb}{af}\qquad+\frac{dgb}{af}$$

dont le lieu que l'on pourra conſtruire ſelon l'article 324. (Liv. 7.) ſera une Ellipſe, parce que le terme $\frac{b}{a}xx$ ſera toûjours precedé dans ce premier cas du ſigne $+$, en quelque ſituation que ſe puiſſent trouver les points A, B, K.

Second cas. Après avoir nommé les lignes par les FIG. 207.

mêmes lettres que dans le premier cas, & fait les mêmes raiſonnemens ; on arrivera à cette équation.

$$yy + dy - \frac{b}{a}xx + \frac{bc}{a}x = o$$
$$- \frac{bc}{f} \qquad - \frac{bd}{f}$$
$$- \frac{cgb}{af} \qquad - \frac{dgb}{af}$$

qui ne differe de la precedente que dans quelques ſignes, & dont le lieu que l'on pourra conſtruire ſelon l'article 332. (Liv.7.) ſera toûjours deux Hyperboles oppoſées, parce que le terme $\frac{b}{a}xx$ ſera toûjours precedé du ſigne — dans ce ſecond cas.

Comme le plan xy ne ſe rencontre point dans les deux équations precedentes, & que l'angle APM eſt droit ; on connoît d'abord que l'un des axes de l'Ellipſe dans le premier cas, & des Hyperboles oppoſées dans le ſecond doit être parallele aux lignes AP, BQ ; & qu'il a avec ſon parametre la même raiſon que EF (a) à FD (b), parce que la fraction $\frac{b}{a}$ qui multiplie le quarré xx exprime ce rapport.

Lorſque le point K en parcourant la ligne indéfinie KF arrive au point O où cette ligne rencontre la circonference, il eſt clair que les côtés AM, BM, qui décrivent par leur point de concours M l'Hyperbole BAM deviennent paralleles entr'eux ; qu'ils ſe coupent vers le côté oppoſé, pendant que le point K parcourt la partie OL de la ligne KF renfermée dans la circonference ; qu'ils deviennent encore paralleles, lorſque le point K tombe en L, après quoi ils ſe rencontrent de nouveau vers le même côté. D'où l'on voit que le point M décrit l'Hyperbole BAM, pendant que le point K parcourt les deux parties indéfinies de la droite KF qui tombent de part & d'autre de la circonference ; & qu'il décrit ſon oppoſée, pendant que le point K parcourt la partie OL renfermée dans la circonference.

FIG. 208. *Troiſiéme cas.* Comme dans ce troiſiéme cas la droite

indéfinie FK touche la circonference du cercle $BDAE$ en quelque point F, il eſt clair que le point D des deux autres cas ſe confond ici avec le point F, & qu'ainſi les triangles DFG, DFH, s'évanoüiſſent : c'eſt pourquoi on ſe ſervira en leur place des triangles DAE, DBE, de la maniere qui ſuit.

Soient les données $AE = a$, $EB = b$, $EF = m$, $AF = g$, $BF = h$, $BI = c$, $AI = d$; & les inconnuës $FK = z$, $AP = x$, $PM = y$. Les triangles rectangles FKR, EFA ſont ſemblables ; car l'angle KFR ou ſon oppoſé au ſommet TFA fait par la tangente FT & la corde FA, a pour meſure la moitié de l'arc AF ; de même que l'angle FEA : Et partant $FE(m).EA(a) :: KF(z).FR = \frac{az}{m}$. Et $EF(m).FA(g) :: FK(z).KR = \frac{gz}{m}$. Or les triangles rectangles ſemblables ARK, APM, donnent AR ou $AF + FR\left(\frac{az+gm}{m}\right).RK\left(\frac{gz}{m}\right) :: AP(x).PM(y)$; d'où l'on tire $z = \frac{gmy}{gx-ay}$. On trouvera de même, à cauſe des triangles rectangles ſemblables EFB, FKS, que $FS = \frac{bz}{m}$, & $KS = \frac{hz}{m}$; & à cauſe des triangles rectangles ſemblables BSK, BQM, que BS ou $BF - FS\left(\frac{hm-bz}{m}\right).SK\left(\frac{hz}{m}\right) :: BQ(x-c).QM(y+d)$; ce qui donne $z = \frac{hmy+hmd}{hx-ch+bd+by}$.

Comparant ces deux valeurs de z, multipliant en croix, & mettant par ordre les termes, on trouve cette équation $yy + dy - \frac{cgh}{ah+bg}y - \frac{dgh}{ah+bg}x = o$, dont le lieu ſera toûjours une Parabole que l'on peut conſtruire ſelon l'article 310. (Liv. 7.) & qui aura ſon axe parallele aux droites AP, BQ.

Il eſt donc évident 1°. Que le lieu de tous les points cherchés M ſera toûjours une Section conique, dont l'axe ou l'un des axes ſera parallele aux lignes AP, BQ ; & en

particulier qu'il ſera une Ellipſe dans le premier cas, deux Hyperboles oppoſées dans le ſecond, & une Parabole dans le troiſiéme ; & que dans le premier & le ſecond cas, l'axe qui eſt parallele à AP, aura avec ſon parametre, la même raiſon que EF à FD. 2°. Que dans le premier & le troiſiécas les deux points fixes A, B, autour deſquels tournent les angles mobiles KAM, KBM tomberont toûjours du même côté de la ligne FK, au lieu que dans le ſecond ils peuvent tomber non ſeulement du même côté de cette ligne, mais encore de part & d'autre ; parce que la circonference du cercle $ADBE$ ſur laquelle ils ſont ſitués, eſt coupée alors en deux portions par la ligne FK.

REMARQUE I.

FIG. 206. 207. 208. 372. 1°. UNE ligne quelconque qui paſſe par l'un des points fixes A ou B, comme AM, étant donnée, on pourra toûjours trouver ſur cette ligne le point M où elle rencontre la Section qui eſt le lieu requis, en cette ſorte. Ayant mené la droite AK qui faſſe avec AM l'angle MAK égal à l'angle donné qui doit tourner autour du point fixe A, on menera du point K où elle rencontre la droite FK, par le point fixe B, l'angle KBM égal à l'autre angle donné, qui doit tourner autour de l'autre point fixe B ; & le point M où le côté BM de cet angle rencontre la ligne AM, ſera celui qu'on cherche. 2°. Lorſque le point K en parcourant la ligne FK, ſe trouve tellement ſitué que le côté AM de l'angle KAM tombe ſur la ligne AB ; il eſt viſible que le point de concours M des deux côtés AM, BM, tombe alors ſur le point B, & qu'ainſi le lieu des points M paſſe par le point fixe B ; on prouvera de même qu'il paſſe par le point A.

FIG. 206. De-là on voit que pour décrire la Section conique qui eſt le lieu des points cherchés M, ſans avoir beſoin des équations precedentes, il n'y a qu'à mener comme dans l'exemple les droites AP, AI ; ſur leſquelles ayant

trouvé, ſelon cette remarque, les points où elles rencontrent la Section, & achevé le rectangle qui a pour côtés ces deux lignes, il n'y aura qu'à décrire * autour de ce rectangle, l'Ellipſe ou les deux Hyperboles oppoſées (ſelon que FK tombe au dehors ou au dedans du cercle), dont l'axe qui eſt parallele à AP ſoit à ſon conjugué, comme le quarré de EF eſt au quarré de DF. Si la Section eſt une Parabole (ce qui arrive lorſque la ligne KF touche le cercle BDA); on trouvera ſur la ligne AI le point où elle rencontre la Section, & on décrira ſelon l'article 170. (Liv. 4.) une Parabole qui paſſe par ce point, & par les deux autres donnés A, B; & dont les diametres ſoient paralleles aux lignes AP, BQ.

* *Art.* 176. & 178.

FIG. 208.

REMARQUE II.

373 LORSQUE le point K en parcourant la ligne FK eſt tellement ſitué que le côté AM de l'angle KAM tombe ſur AB, il eſt clair non-ſeulement que le point M tombe en B; mais auſſi que le côté BM de l'angle KBM devient tangente * en B de la ligne courbe qui eſt le lieu du point M, puiſque le point M peut être regardé alors comme étant infiniment près du point B. D'où il ſuit que pour mener une tangente de ce lieu en B, il n'y a qu'à mener par le point A une ligne droite AC qui faſſe avec BA un angle BAC égal à l'angle donné KAM, & tirer enſuite une ligne BD, qui faſſe avec BC l'angle CBD égal à l'autre angle donné KBM; car le côté BM de cet angle, qui devient BD, touchera la Section en B. Il en eſt de même de l'autre point fixe A.

FIG. 209.

* *Art.* 188.

De-là on tire encore une maniere trés-facile de décrire la Section conique qui eſt le lieu de tous les points M ſans avoir beſoin des équations precedentes, ni même d'aucun calcul. Ayant mené par le point fixe B une tangente BD, & par l'autre point fixe A une parallele AE à cette tangente, on trouvera * ſur cette ligne le point E où elle rencontre la Section, & l'ayant diviſée par le milieu en H on tirera BH, ſur laquelle on cherchera *

FIG. 209.

* *Art.* 372.

* *Art.* 372.

auſſi le point G où elle rencontre la Section. Cela fait, on décrira * du diametre BG & de l'ordonnée HA ou HE, une Section conique, qui ſera celle qu'on demande. Car il eſt viſible que la ligne BG qui diviſe par le milieu en H la ligne AE terminée par la Section & parallele à la tangente en B, en ſera un diametre qui aura pour ordonnée la ligne AH. Où l'on doit remarquer que lorſque le point H tombe entre les points B, G, la Section eſt une Ellipſe ; que lorſqu'il tombe de part ou d'autre de ces deux points, ce ſont deux Hyperboles oppoſées ; & qu'enfin lorſque la ligne BG eſt infinie, la Section eſt une Parabole.

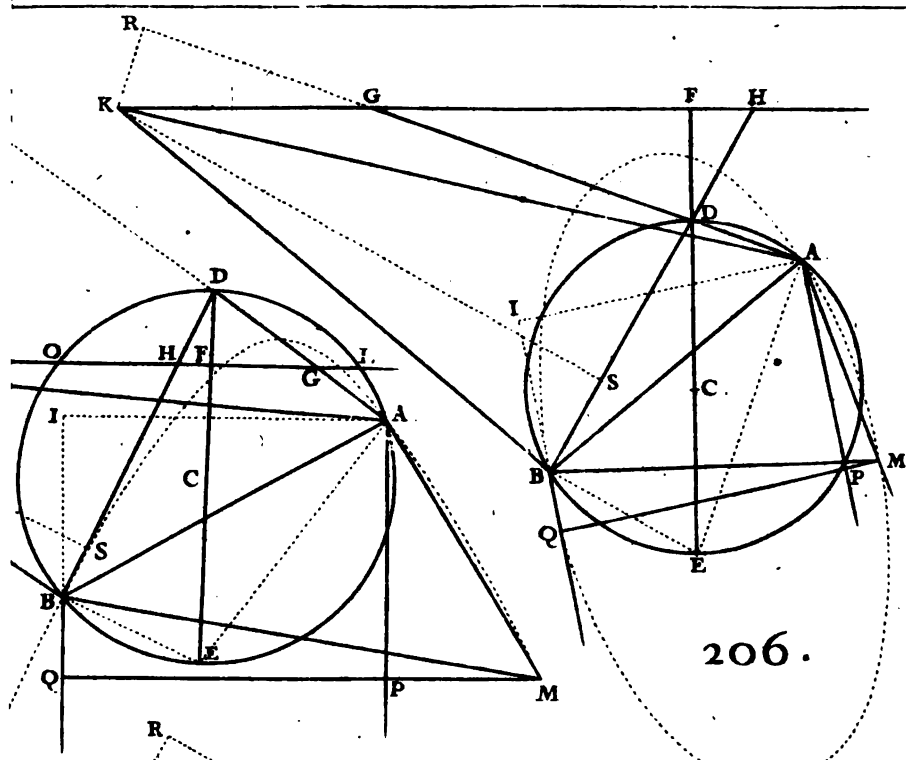
* *Art.* 162. 161.

COROLLAIRE I.

FIG. 210. 374. CET exemple nous fournit le moyen de faire paſſer par quatre points donnés A, B, H, M, une Section conique d'une eſpece déterminée.

Car 1°. Soit la Section conique une Ellipſe, dont le grand axe ſoit à ſon parametre, en la raiſon donnée de a à b. Je forme le triangle ABH, en joignant trois des points donnés par des lignes droites ; & du quatriéme point M, je fais paſſer par les points A, B, les angles MAK, MBK, égaux aux angles GAH, RBA, complements à deux droits des angles HAB, HBA. Je décris ſur AB comme corde de l'autre côté du point M un arc de cercle BDA capable d'un angle qui vaille quatre droits moins les deux angles KAM, KBM ; & du centre C de cet arc, je décris un autre cercle dont le rayon CF ſoit au rayon CD du premier, comme $a+b$ eſt à $a-b$; & du point de concours K des deux côtés AK, BK, des angles MAK, MBK, je tire une tangente KF à ce dernier cercle. Maintenant je dis que ſi l'on fait mouvoir le point K le long de la droite indéfinie FK ; le point de concours M des deux autres côtés AM, BM, prolongés lorſqu'il ſera neceſſaire de l'autre côté des points A, B, décrira dans ce mouvement l'Ellipſe qu'on demande. Car il eſt evident ſelon

ce



206.

208.

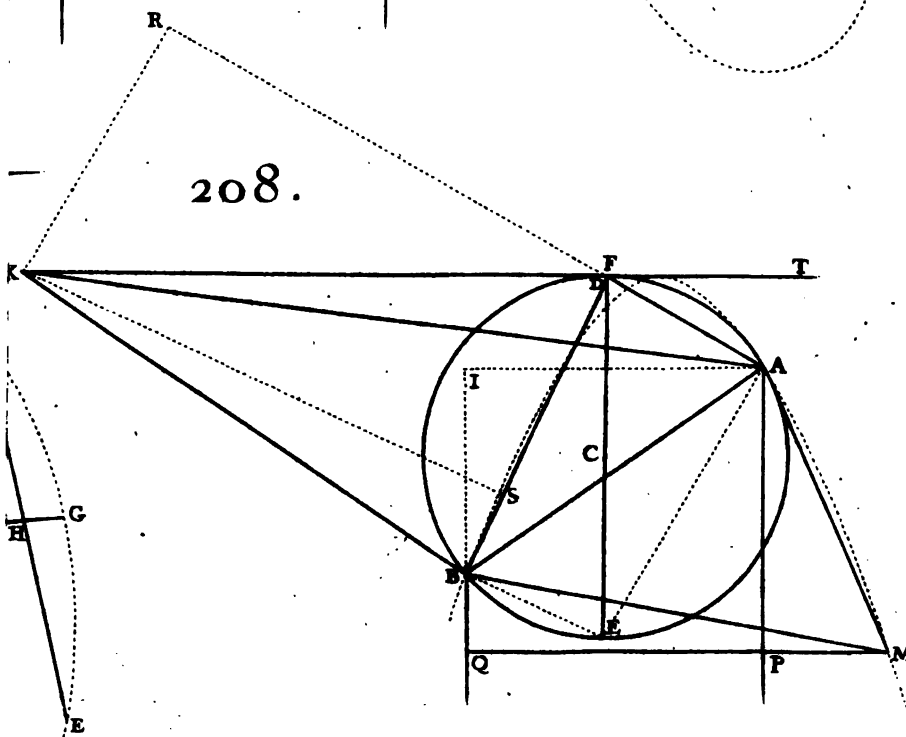


Planche 22 . pag . 288 .

ce qu'on a dit dans le premier cas de l'exemple, que le lieu des points M sera une Ellipse, dont le grand axe sera à son parametre comme $EF\ (a)$ à $Dt\ (b)$; & de plus qu'elle passera par les points A, M, B, H, puisque le point K etant en G, le côté AM tombera sur AH, & le côté BM sur BR.

2° Lorsque c'est une Hyperbole ou deux Hyperboles opposées qu'il est question de décrire par quatre points donnés A, B, H, M, & dont le grand axe soit à son parametre en la raison donnée de a à b; la construction demeure la même, excepté que le rayon CF du cercle concentrique au cercle $BDAE$, doit être au rayon CD, comme $a - b$ est à $a + b$.

3°. Lorsqu'il s'agit de décrire une Parabole par quatre points donnés A, B, H, M. Ayant decrit comme dans le premier cas le cercle $BDAE$, on menera du point de concours K une tangente à ce cercle, qui sera la droite indéfinie sur laquelle faisant mouvoir le point K, l'autre point de concours M décrira la Parabole qu'on demande.

Comme l'on peut mener d'un même point deux tangentes à un cercle, il s'ensuit qu'on peut décrire deux differentes Sections coniques qui satisfont également lorsque le Problême est possible; car lorsque le point K tombe au dedans du cercle qui a pour rayon CF, il est visible que le Problême est impossible.

On pourra décrire la Section conique par le moyen de ses axes en se servant de l'article 372. ou par le moyen d'un de ses diametres & d'une ordonnée à ce diametre, en se servant de l'article 373.

COROLLAIRE II.

375. ON tire encore de cet exemple, une nouvelle maniere de décrire une Section conique qui passe par cinq points donnés A, B, H, M, N. Car ayant joint trois quelconques de ces points A, B, H, par des FIG. 211.

lignes droites, on fera paſſer par les autres points M, N, & par les deux points fixes A, B, les angles MAK, NAS, égaux chacun à l'angle HAG complement à deux droits de l'angle HAB, & les angles MBK, NBS égaux chacun à l'angle ABR complement à deux droits de l'angle ABH ; & on tirera par les points de concours K, S, une ligne droite indéfinie S, K, ſur laquelle faiſant mouvoir le point K, il eſt clair que le point de concours M decrira dans ce mouvement la Section conique qu'on demande ; puiſqu'elle paſſera par les cinq points donnés A, B, H, M, N.

LIVRE NEUVIEME.

De la conſtruction des Egalités.

PROPOSITION I.

Problême.

376. CONSTRUIRE *toute égalité donnée, dans laquelle l'inconnuë ne ſe trouve qu'au premier degré.*

Soit en premier lieu l'inconnuë x égale à une ou à pluſieurs fractions ſimples, telles que $\frac{ab}{c}$, ou $\frac{abe}{cf}$, ou $\frac{abeh}{cfg}$ &c. Ayant fait $c.b::a.l$, il eſt clair que cette quatriéme proportionnelle $l=\frac{ab}{c}$; & ſi l'on fait $f.l::e.m$, l'on aura $m=\frac{el}{f}=\frac{abe}{cf}$; & faiſant enfin $g.m::h.n$, il vient $n=\frac{mh}{g}=\frac{abeh}{cfg}$ en mettant pour m ſa valeur $\frac{abe}{cf}$. De ſorte qu'on aura l'inconnuë x égale à l, ou à m, ou à n, &c. ſelon que x ſera égale à $\frac{ab}{c}$, ou à $\frac{abe}{cf}$, ou à $\frac{abeh}{cfg}$ &c. Or il eſt viſible qu'en augmentant le nombre des proportions, autant qu'il ſera neceſſaire, on trouvera toûjours une ligne droite égale à une fraction ſimple donnée, tel que puiſſe être le nombre des dimenſions de ſon numerateur. D'où l'on voit que l'on pourra toûjours trouver une ligne x égale à une quantité compoſée de pluſieurs fractions ſimples; car ayant trouvé en particulier des lignes droites egales à chacune de ces fractions, il n'y aura qu'à les ajoûter, ou retrancher ſelon qu'il ſera marqué par les ſignes $+$ & $-$. Qu'il faille, par exemple, trouver une ligne $x=a+\frac{ab}{c}+\frac{aab}{cf}-\frac{aacc}{b^3}$, on ajoûtera les deux lignes $b=\frac{ab}{c}$ & $l=\frac{aab}{cf}$ à la ligne a pour en compoſer une ſeule, de laquelle ayant retran-

ché la ligne $m = \frac{aacc}{b^3}$, le reſte ſera la valeur cherchée de l'inconnuë x, c'eſt à dire qu'on aura $x = a + b + l - m$.

Soit en ſecond lieu l'inconnuë x égale à une ou à pluſieurs fractions compoſées, c'eſt à dire, dont les denominateurs ayent pluſieurs termes. On cherchera d'abord, comme l'on vient d'enſeigner ci-deſſus, une ligne égale au denominateur diviſé par une ligne arbitraire, lorſque chacun de ſes termes n'a que deux dimenſions, par un plan lorſqu'ils en ont trois, par un ſolide lorſqu'ils en ont quatre, &c; ce qui reünira tous les termes du dénominateur en un ſeul, lequel etant ſubſtituë en leur place, changera la fraction compoſée en une ou en pluſieurs ſimples ſelon que le numerateur eſt compoſé d'un ou de pluſieurs termes; & ayant trouvé comme ci-deſſus une ligne qui leur ſoit égale, elle ſera celle qu'on cherche. Ceci s'éclaircira par les exemples qui ſuivent.

On demande une ligne $x = \frac{age - bee}{bb + af}$, je cherche d'abord une ligne $m = f + \frac{bb}{a}$, c'eſt à dire égale au dénominateur $af + bb$ diviſé par la ligne a; ce qui donne $bb + af = am$, & ayant trouvé enſuite une ligne $n = \frac{age - bee}{am} = \frac{ge}{m} - \frac{bee}{am}$; il eſt clair que la ligne cherchée $x = n$. De même ſi l'on demandoit une ligne $x = \frac{a^3b + aacc - abcf}{aaf + ccf + bff}$, on trouveroit une ligne $m = a + \frac{cc}{a} + \frac{bf}{a}$, c'eſt à dire égale au dénominateur $aaf + ccf + bff$ diviſé par le plan af; ce qui donne $afm = aaf + ccf + bff$, & enſuite une autre ligne $= \frac{a^3b + aacc - abcf}{afm} = \frac{aab}{fm} + \frac{acc}{fm} - \frac{bc}{m} = x$. Il en eſt ainſi de tous les autres exemples que chacun ſe peut former à plaiſir.

Il eſt inutile d'avertir que ſi l'on demandoit une ligne x égale à une ou à pluſieurs fractions tant ſimples que

compoſées ; il faudroit chercher en particuliér des lignes égales à chacune de ces fractions, pour les ajoûter enſuite ou les retrancher les unes des autres, ſelon que les ſignes + ou — le feroient connoître.

COROLLAIRE I.

377. IL eſt facile par le moyen de cette Propoſition de trouver 1°. Une fraction ſimple $\frac{x}{a}$ ou $\frac{a}{x}$, dont le dénominateur ou le numerateur a ſoit donné, égale à une ou à pluſieurs fractions ſimples ou compoſées ; car il n'y aura qu'à trouver une ligne x égale à la ligne a multipliée ou diviſée par ces fractions. Qu'il faille trouver par exemple, une fraction $\frac{x}{a} = \frac{cc+ff}{af+cf} + \frac{aa}{gg}$, il eſt viſible qu'il n'y aura qu'à trouver une ligne $x = \frac{acc+aff}{af+cf} + \frac{a^3}{gg}$. 2°. Un plan ax, dont l'un des côtés a eſt donné, égal à un ou à pluſieurs plans ſi compoſé qu'ils puiſſent être ; car il ne faut pour cela que trouver une ligne x égale à tous ces plans diviſés par a. 3°. Un ſolide aax ou abx, dont deux des côtés a, a, ou a, b, ſont donnés, égal à pluſieurs ſolides ; puiſqu'il ne faut pour cela que trouver une ligne x égale à tous ces ſolides diviſés par le quarré aa ou par le plan ab. 4°. Un ſurſolide a^3x ou $abcx$ dont trois côtés a, a, a, ou a, b, c, ſont donnés, égal à pluſieurs ſurſolides ; puiſqu'il ne faut encore pour cela que trouver une ligne x égale à tous ces ſurſolides diviſés par le cube a^3 ou par le ſolide abc. Et il en eſt de même de pluſieurs produits de cinq dimenſions, de ſix &c. que l'on peut toûjours reduire en un ſeul dont tous les côtés, excepté un, ſoient donnés.

COROLLAIRE II.

378. DE-LA on voit que pour trouver un quarré égal à pluſieurs plans donnés, il les faut reünir

tous en un ſeul, & trouver enſuite une moyenne proportionnelle entre ſes deux côtés ; car il eſt clair qu'elle ſera le côté du quarré qu'on demande. Qu'il faille, par exemple, trouver un quarré $xx = ss - \frac{cccc - ecbb}{bb + af}$ (les lignes a, b, c, e, f, b, s, ſont données), je cherche une ligne $m = \frac{ss}{e} - \frac{ccc - cbb}{bb + af}$ pour avoir un plan $em = ss - \frac{cccc - ecbb}{bb + af}$, & ayant trouvé une moyenne proportionnelle x entre les deux côtés e, m, du plan em, il eſt clair que $xx = em = ss - \frac{cccc - ecbb}{bb + af}$.

Pour trouver une ligne x dont le quarré x^4 ſoit égal à pluſieurs ſurſolides donnés ; je cherche, comme ci deſſus, un quarré zz égal à tous les ſurſolides donnés diviſés par le quarré aa donné ou pris à volonté. Je prends enſuite une moyenne proportionnelle x entre les deux lignes a & z, & je dis qu'elle ſera celle qu'on demande ; car $xx = az$, & , en quarrant chaque membre, $x^4 = aazz$, c'eſt à dire x^4 égal à tous les ſurſolides donnés.

REMARQUE.

379. QUOIQUE la methode que l'on vient d'expliquer ſoit general pour tous les cas poſſibles, il ne s'enſuit pas neanmoins qu'elle ſoit toûjours la plus ſimple. C'eſt pourquoi je vais donner ici des exemples particuliers que l'on reſoud d'une maniere plus aiſée en s'écartant un peu de la methode generale, & qui pourront ſervir de methodes pour tous les cas ſemblables.

1°. Soit $x = \frac{abcc - aabb}{abc + c^3}$. Je cherche d'abord une ligne $m = \frac{ab}{c}$, & ſubſtituant à la place de ab ſa valeur cm, je trouve $x = \frac{c^3 m - ccmm}{ccm + c^3} = \frac{cm - mm}{m + c}$; d'où je connois qu'en faiſant $c + m . c - m :: m . n$, j'ai cette quatriéme proportionnelle $n = x$. Il eſt donc viſible qu'on n'a eu beſoin que de deux proportions pour trouver la valeur de x, au lieu

que ſi l'on tente la methode generale, on trouvera qu'il en faut au moins trois.

2°. Soit $x = \sqrt{aa+bb}$. Je fais un triangle rectangle, dont l'un des côtés $= a$, & l'autre $= b$; & ſon hypothenuſe ſera la valeur de x. S'il falloit trouver une ligne $x = \sqrt{aa-bb}$, il n'y auroit qu'à trouver une moyenne proportionnelle x entre les deux lignes $a+b$ & $a-b$; car ſon quarré xx doit être égal au produit des extrêmes $aa-bb$. Ou bien je fais un triangle rectangle dont l'hypothenuſe $= a$, & l'un des côtés $= b$; l'autre côté ſera la valeur de x.

3°. Soit $xx = ss + 4ee - \frac{4ccee}{aa}$. Je prends l'hypothenuſe m d'un triangle rectangle dont l'un des côtés $= s$, & l'autre $= 2e$, & ayant trouvé une autre ligne $n = \frac{2ce}{a}$, j'ai $xx = mm-nn$ & $x = \sqrt{mm-nn}$ que je reſous comme je viens de faire $x = \sqrt{aa-bb}$ dans l'exemple precedent.

4°. Soit enfin $xx = ss - \frac{cccc-eehh}{bb+af}$. Je prends une moyenne proportionnelle entre les côtés a, f, du plan af, pour avoir un quarré $ll = af$, je trouve enſuite un quarré $mm = bb+ll$, & un autre quarré $nn = cc+bb$ par le moyen de deux triangles rectangles, comme dans le ſecond exemple, & j'ai par la ſubſtitution $xx = ss - \frac{eenn}{mm}$; & trouvant enfin une ligne $g = \frac{en}{m}$, il vient $x = \sqrt{ss-gg}$ que l'on reſoud comme ci-deſſus.

PROPOSITION II.

Problême.

380. TROUVER *les racines de toutes ſortes d'Egalités du ſecond degré.*

Toutes les Egalités du ſecond degré ſe peuvent ré-

duire à l'une de ces deux formes, $xx \mp ax - bb = o$, ou
* *Art.* 376. $xx + ax + bb = o$; en trouvant une ligne a * égale à toutes les quantités connuës qui multiplient l'inconnuë x,
* *Art.* 378. & un quarré bb * egal a tous les plans entierement connus. Cela posé.

FIG. 212. 1°. Soit $xx + ax - bb = o$. Je forme un angle droit CAB dont l'un des côtés $CA = \frac{1}{2}a$, & l'autre côté $AB = b$; & ayant mené l'hypothenuse BC prolongée au delà de C, je décris du centre C & du rayon CA, un cercle qui coupe BC en deux points E, D. Je dis que les droites BD, BE, sont les deux racines de l'égalité proposée $xx \mp ax - bb$: sçavoir BE la racine vraie, & BD la fausse de l'égalité $xx + ax - bb = o$, & au contraire BD la vraie & BE la fausse de l'égalite $xx - ax - bb = o$.

Car faisant $BE = x$, on aura BD ou $BE + ED = a + x$; & si l'on fait $BD = -x$, on trouvera BE ou $BD - ED = -x - a$. Donc en l'un & l'autre cas $DB * BE = xx + ax = \overline{AB}^2$ (bb) par la proprieté du cercle, c'est à dire $xx + ax - bb = o$. Au contraire si l'on fait $BD = x$ ou $BE = -x$, on trouvera $DB * BE = xx - ax = bb$ ou $xx - ax - bb = o$.

FIG. 213. 2°. Soit $xx \mp ax + bb = o$. Je forme comme dans le premier cas, un angle droit CAB dont l'un des côtés $CA = \frac{1}{2}a$, & l'autre $AB = b$; & ayant mené une droite indéfinie BD parallele à AC, je décris du centre C & du rayon CA un arc de cercle qui coupe la ligne BD aux points E, D. Je dis que les droites BE, BD, sont les racines de l'égalité proposée $xx \mp ax + bb = o$: sçavoir les deux vraies de l'égalité $xx - ax + bb = o$, & les deux fausses de l'égalité $xx + ax + bb = o$.

Car achevant la demi-circonferenee $AEDH$, & menant les paralleles EF, DG à AB; on aura en faisant BE ou $AF = x$, le rectangle $AF * FH = ax - xx = \overline{FE}^2$ (bb) par la proprieté du cercle. De même si l'on fait BD ou $AG = x$, on aura $AG * GH = ax - xx = \overline{GD}^2$ (bb) : c'est à dire en l'un & l'autre cas

cas $xx - ax + bb = o$. Si l'on veut que BE ou $AF = -x$, & BD ou $AG = -x$, on trouvera $AF \times FH$ & $AG \times GH = -xx - ax = \overline{FE}^2$ ou $\overline{GD}^2$ (bb) c'eſt à dire $xx + ax + bb = o$.

Si le cercle qui a pour centre le point C, & pour rayon la droite CA, ne coupe ni ne touche la parallele BD, (ce qui arrive toûjours lorſque AB ſurpaſſe CA) ; les racines de l'égalité ſeront toutes deux imaginaires : mais s'il la touche en un point, les deux racines BE, BD, deviennent égales chacune au rayon CA.

Remarque.

381. Lorsque dans une égalité l'inconnuë ne ſe rencontre qu'au quatriéme & au ſecond degré, on peut toûjours reduire cette égalité en une autre où l'inconnuë ne monte qu'au ſecond degré : de maniere que ces ſortes d'égalités ne paſſent que pour être du ſecond degré.

Soit par exemple $z^4 - aazz - aabb = o$. Je ſuppoſe une inconnuë x qui ſoit telle que ſon rectangle par la donnée a ſoit égal au quarré zz ; ce qui donne $ax = zz$. Et mettant à la place de zz cette valeur ax, & à la place de z^4 ſon quarré $aaxx$, je change l'égalité donnée $z^4 - aazz - aabb = o$ en cette autre $xx - ax - bb = o$, où l'inconnuë x ne monte qu'au ſecond degré. J'en cherche les racines x, comme l'on vient d'enſeigner, & prenant des moyennes proportionnelles entre la donnée a & les valeurs de ſes racines, je dis qu'elles exprimeront les valeurs cherchées de l'inconnuë z : ce qui eſt évident, puiſque $zz = ax$. Fig. 214.

Proposition LII.

Problême.

382. Trouver *par une autre voye les racines des égalités du ſecond degré, ſans qu'il ſoit neceſſaire de changer leur dernier terme en un quarré.*

FIG. 215. 1°. Soit $xx \pm ax - bc = o$. Ayant décrit un cercle quelconque ABD, dont le diametre ne ſoit pas moindre que les données a & $b - c$ je ſuppoſe ici que b ſurpaſſe c) ; on inſcrira dans ce cercle, à commencer par un de ſes points quelconques A, deux cordes $AB = a$, $AD = b - c$: & ayant prolongé AD en F en ſorte que $DF = c$, on decrira de ſon centre C, & du rayon CF, un autre cercle concentrique qui coupe aux points F, E, G, H, les cordes AD, Ab prolongées Je dis que AG eſt la vraie racine, & AH la fauſſe de l'egalité $xx + ax - bc = o$; & qu'au contraire AG eſt la fauſſe, & AH eſt la vraie racine de $xx + ax - bc = o$.

Car AF ou $AD + DF = b$, DF ou $AE = c$, & faiſant AG ou $BH = x$, on aura $AH = a + x$. Or par la proprieté du cercle $EGFH$, le rectangle $EA \times AF$ $(bc) = GA \times AH$ $(xx + ax)$. Si l'on fait à preſent $AH = -x$, on aura AG ou BH ou $AH - AB = -x - a$, & par conſequent $GA \times AH = xx + ax$ comme auparavant. Donc ſoit que l'on faſſe $AG = x$ ou $AH = -x$, on trouvera toûjours $xx + ax - bc = o$. On prouvera de même que AG eſt la racine fauſſe, & AH la vraie de l'egalite $xx - ax - bc = o$.

FIG. 216. 2°. Soit $xx \pm ax + bc = o$. Ayant décrit un cercle quelconque ABD, dont le diametre ne ſoit pas moindre que les données a & $b + c$, on inſcrira dans ce cercle, à commencer par un de ſes points quelconques A, deux cordes $AB = a$, $AD = b + c$: & ayant pris ſur AD la partie $DF = c$, on décrira de ſon centre C & du rayon CF un autre cercle concentrique qui coupera les cordes AD, AB, aux points F, E, G, H. Je dis que AG & AH ſont les deux racines vraies de l'egalité $xx - ax + bc = o$, & les deux fauſſes de $xx + ax + bc = o$. Cela ſe démontre de même que dans le premier cas.

Si le cercle qui a pour rayon CF ne touchoit ni ne rencontroit la ligne AB en aucun point, il s'enſuivroit que les deux racines de l'égalité ſeroient imaginaires.

AVERTISSEMENT.

Tout l'artifice dont je me ſers pour conſtruire les égalités qui n'ont qu'une inconnuë, ou pour trouver les racines, conſiſte à introduire dans cette égalité une nouvelle inconnuë, en ſorte qu'on en puiſſe tirer pluſieurs équations qui renferment chacune les deux inconnuës & qui ſoient telles que deux quelconques de ces équations renferment enſemble toutes les quantités connuës de la propoſée; car autrement en faiſant évanoüir l'inconnuë nouvellement introduite, on ne retrouveroit pas l'égalité propoſée. Je choiſis enſuite entre ces équations deux des plus ſimples, & en ayant conſtruit ſeparément les lieux, leurs points d'interſections me donnent les racines que je cherche. Il y a de l'art à introduire l'inconnuë; car il faut que les lieux que l'on tire de la propoſée, ſoient les plus ſimples qu'il ſe puiſſe: par exemple, ſi l'égalité eſt du quatriéme degré, il faut que les lieux des équations qu'on tire ne paſſent point le ſecond degré; que parmi ces lieux il y ait toûjours un cercle comme étant le plus ſimple, & auſſi une Parabole, une Hyperbole équilatere &c. Or c'eſt ce que j'ai tâché d'executer dans les Lemmes & les Propoſitions qui ſuivent.

LEMME FONDAMENTAL.

Pour la conſtruction des Egalités du troiſiéme & du quatriéme degré, par le moyen d'un cercle, & d'une Parabole donnée.

383. SOIT propoſée l'égalité $x^4 + 2bx^3 + acxx - aadx - a^3f = o$, dans laquelle x eſt l'inconnuë, & a, b, c, d, f, ſont les données, & ſoit ſuppoſée une autre inconnuë y telle que ſon rectangle par la connuë a, ſoit égal au rectangle de $x + b$ par x. Ce qui donne les équations ſuivantes.

1°. $ay = xx + bx$, de laquelle quarrant chaque membre, on trouve $x^4 + 2bx^3 + bbxx = aayy$; &

mettant à la place de $x^4 + 2bx^3$, sa valeur $aayy - bbxx$ dans l'égalité proposée x^4 &c. on la changera en cette seconde equation.

2e. $yy - \frac{bb}{aa}xx + \frac{c}{a}xx - dx - af = o$, dans laquelle mettant à la place de xx sa valeur $ay - bx$ trouvée par le moyen de la premiere équation, 1°. Dans $-\frac{bb}{aa}xx$. 2°. Dans $\frac{c}{a}xx$. 3°. Dans $-\frac{bb}{aa}xx + \frac{c}{a}xx$, on arrivera à ces trois differentes équations.

3e. $yy - \frac{bb}{a}y + \frac{b^3}{aa}x + \frac{c}{a}xx - dx - af = o$.

4e. $yy - \frac{bb}{aa}xx + cy - \frac{bc}{a}x - dx - af = o$.

5e. $yy + cy - \frac{bb}{a}y - \frac{bc}{a}x + \frac{b^3}{aa}x - dx - af = o$. Si l'on retranche de cette cinquiéme équation, la premiere $xx + bx - ay = o$, & qu'ensuite on la lui ajoûte, on aura ces deux autres.

6e. $yy + cy - \frac{bb}{a}y + ay - xx - bx - \frac{bc}{a}x + \frac{b^3}{aa}x - dx - af = o$.

7e. $yy + cy - \frac{bb}{a}y - ay + xx + bx - \frac{bc}{a}x + \frac{b^3}{aa}x - dx - af = o$.

Maintenant si l'on prend pour les inconnuës x & y deux lignes droites AP, PM, qui faſſent entr'elles un angle quelconque APM; il eſt évident que le lieu de la premiere équation eſt * une Parabole: que celui de la ſeconde peut être une Parabole, une Ellipſe, ou une Hyperbole ſelon que bb eſt égal, moindre, ou plus grand que ac; que celui de la troiſiéme eſt une Ellipſe, qui devient un cercle * lorſque $c = a$ & que l'angle APM eſt droit: que celui de la quatriéme eſt une Hyperbole, qui devient équilatere * lorſque $b = a$: que celui de la cinquieme eſt encore une Parabole: que celui de la ſixiéme eſt une Hyperbole équilatere: & enfin que le lieu de la ſeptieme eſt un cercle, lorſque l'angle APM eſt droit.

* *Art.* 310.

* *Art.* 328. & 329.

* *Art.* 335. & 336.

REMARQUE I.

384. S'IL y avoit $-2bx^3$ dans l'égalité proposée au lieu de $+2bx^3$, il faudroit changer dans toutes les équations les signes des termes où b se rencontre avec une dimension impaire; & si le second terme manquoit, il faudroit effacer tous les termes où b se trouve. Il en est de même à l'égard des autres termes de l'egalité proposée par rapport aux lettres, c, d, f, qu'ils renferment. Mais l'on doit remarquer que dans tous les differens changemens qui peuvent arriver, le lieu de la premiere équation sera une Parabole, celui de la sixiéme une Hyperbole équilatere, & enfin celui de la derniere toûjours un cercle lorsque l'angle APM est droit.

REMARQUE II.

385. ON a choisi pour premiere équation $xx+bx=ay$, plûtôt que $xx-bx=ay$ ou simplement $xx=ay$; parce qu'en quarrant chaque membre de cette équation, les deux premiers termes du premier membre sont les mêmes que les deux premiers termes de l'égalité proposée x^4+2bx^3 &c, & qu'ainsi on peut les faire évanoüir tout d'un coup. Ce qui donne une nouvelle équation dont le lieu n'est que du second degré, & qui étant combinée en differentes façons avec la premiere, sert à en trouver (comme l'on vient de voir) plusieurs autres, dont les lieux n'étant que du second degré, se construisent aisément, parce qu'elles ne renferment point le plan xy; & entre lesquels le lieu de la derniere équation est toûjours un cercle, en supposant que les inconnuës x & y fassent entr'elles un angle droit.

PROPOSITION IV.

Problême.

386. TROUVER *les racines de l'égalité proposée* $x^6 + 2bx^5 + acxx - aadx - a^3f = o$, *par le moyen d'une Parabole & d'un cercle.*

FIG. 217. Ayant pris pour les inconnuës & indéterminées x & y, les deux lignes droites AP, PM, qui faſſent entr'elles un angle droit APM; je conſtruis * d'abord la Parabole qui eſt le lieu de la premiere équation du Lemme, & enſuite le cercle qui eſt le lieu de la ſeptiéme : & leurs interſections me ſervent à découvrir les differentes valeurs de l'inconnuë x qui ſeront les racines de l'égalité propoſée. Cela ſe fait en cette ſorte.

* *Art.* 310.

Ayant pris ſur la ligne AP prolongée de l'autre côté de A la partie $AD = \frac{1}{3}b$, on menera par le point D une parallele à PM, ſur laquelle on prendra la partie $DC = \frac{bb}{4a}$ du côté oppoſé à PM; & on décrira de l'axe CD qui ait ſon origine en C, & dont le parametre ſoit égal à la donnée a, une Parabole MCM. Cela fait on menera par le point fixe A une parallele AQ à PM, ſur laquelle ayant pris la partie $AB = \frac{1}{3}a + \frac{bb}{2a} - \frac{1}{3}c = +g$ pour abreger, on tirera parallelement à AP la droite $BE = \frac{1}{3}d + \frac{bg}{a}$ ſçavoir $-\frac{bg}{a}$ lorſque $AB = +g$ c'eſt à dire lorſque la valeur de AB eſt poſitive, & $+\frac{bg}{a}$ lorſque $AB = -g$; en obſervant de prendre ou mener ces deux lignes AB, BE, du côté de PM lorſque leurs valeurs ſont poſitives, & du côté oppoſé lorſqu'elles ſont negatives. Nommant enfin EA, m; on décrira du centre E, & du rayon $EM = \sqrt{mm + af}$ un cercle; & menant des points M où il coupe la Parabole des perpendiculaires MP ſur la ligne AP : les par-

ties AP de cette ligne marqueront les racines de l'égalité, ſçavoir les vraies lorſque les points P tombent du côté où l'on a ſuppoſé PM en faiſant la conſtruction, & les fauſſes lorſqu'ils tombent du côté oppoſé.

Car prolongeant MQ parallele à AP, & qui rencontre l'axe CG au point L, on aura ML ou $AP + AD = x + \frac{1}{2}b$, CL ou $MP + DC = y + \frac{bb}{4a}$; & par la proprieté de la Parabole $\overline{ML}^2 = CL * a$, c'eſt à dire $xx + bx + \frac{1}{4}bb = \frac{1}{4}bb + ay$, ou $xx + bx = ay$ qui eſt la premiere equation du Lemme. Maintenant ſi l'on prolonge EB juſqu'à ce qu'elle rencontre PM en R, & qu'on tire le rayon EM, on aura à cauſe du triangle rectangle ERM le quarré $\overline{EM}^2 = \overline{ER}^2 + \overline{RM}^2 = \overline{EB}^2 + 2EB * BR + \overline{BR}^2 + \overline{PM}^2 - 2AB * PM + \overline{AB}^2 = \overline{EB}^2 + \overline{BA}^2 + af$ par la conſtruction; c'eſt à dire en effaçant de part & d'autre les quarrés $\overline{EB}^2$, $\overline{BA}^2$, & mettant pour $2AB$ ſa valeur $a + \frac{bb}{a} - c$, & pour $2BE$ ſa valeur $\frac{2bg}{a} - d$ ou $b + \frac{bb}{aa} - \frac{bc}{a} - d$, & pour BR ou AP & PM leurs valeurs x & y, la ſeptiéme équation $yy + cy - ay - \frac{bb}{a}y + xx + bx + \frac{bb}{aa}x - \frac{bc}{a}x - dx = af$, dans laquelle ſi l'on met à la place de y ſa valeur $\frac{xx+bx}{a}$ trouvée par la premiere équation, & à la place de yy le quarré de cette valeur, on retrouve l'equation même propoſée $x^4 + 2bx^3 + aaxx - 2aadx - a^3f = 0$. D'où l'on voit que la ligne AP exprime une racine vraie de cette égalité.

Si l'on obſerve de prendre $-x$ pour AP & $-y$ pour PM, lorſque ces lignes tombent du côté oppoſé où on les a ſuppoſées en faiſant la conſtruction; on trouvera toûjours par la proprieté de la Parabole la premiere équation, & par la proprieté du cercle la ſeptiéme. Donc &c.

COROLLAIRE I.

387. IL eſt viſible qu'on rendra la conſtruction precedente generale pour toutes les égalités du troiſiéme & du quatriéme degré, & qu'on y employera toûjours une Parabole qui ait pour le parametre de ſon axe une ligne donnée a; ſi l'on obſerve 1°. De multiplier par ſa racine x l'égalité lorſqu'elle n'eſt que du troiſieme degré; & de prendre
* *Art.* 376. une ligne * $2b$ égale à toutes celles qui multiplient x^3, un
* *Art.* 377. plan * ac égal à ceux qui multiplient xx, un ſolide aad égal aux ſolides qui multiplient x, & enfin un ſurſolide a^3f égal aux termes entierement connus de l'égalité donnée. 2°. De changer dans les valeurs des lignes AD, DC, AB, BE, EM, qui déterminent la conſtruction de la Parabole & du cercle, les ſignes des termes où b ſe rencontre avec une dimenſion impaire s'il y a $-2bx^3$ dans l'égalité donnée, parce qu'il y avoit $+2bx^3$ dans celle du Problême; & d'effacer tous les termes où b ſe trouve ſi le terme $2bx^3$ manque, parce qu'alors $b = o$: comme auſſi de faire la même choſe à l'égard des termes où c, d, f, ſe rencontrent. 3°. De prendre ou mener ces lignes du côté de PM lorſqu'elles ſont poſitives, & du côté oppoſé lorſqu'elles ſont negatives. On aura donc $AD = \pm\frac{1}{2}b$, ſçavoir $-\frac{1}{2}b$ lorſqu'il y a $+2bx^3$, & $+\frac{1}{2}b$ lorſqu'il y a $-2bx^3$; $AB = \frac{1}{2}a + \frac{bb}{2a} \pm \frac{1}{2}c = \pm g$, ſçavoir $-\frac{1}{2}c$ lorſqu'il y a $+acxx$, & $+\frac{1}{2}c$ lorſque c'eſt $-acxx$; $BE = \pm\frac{bg}{a} \mp \frac{1}{2}d$, ſçavoir $-\frac{bg}{a}$ lorſque $AB = +g$, & qu'il y a $+2bx^3$, ou bien lorſque $AB = -g$, & qu'il y a $-2bx^3$; & au contraire $+\frac{bg}{a}$ lorſque $AB = +g$ & qu'il y a $-2bx^3$, ou bien lorſque $AB = -g$ & qu'il y a $+2bx^3$ (c'eſt à dire $-\frac{bg}{a}$ lorſque les valeurs de AB & AD ſont l'une poſitive & l'autre negative, & $+\frac{bg}{a}$ lorſque ces valeurs ſont toutes deux ou poſitives

ves ou negatives) ; comme auſſi $+\frac{1}{2}d$ lorſqu'il y a $-aadx$, & $-\frac{1}{2}d$ lorſque c'eſt $+aadx$: & enfin $EM = \sqrt{mm \mp af}$, ſçavoir $+af$ lorſqu'il y a $-a^3f$, & $-af$ lorſque c'eſt $+a^3f$. D'où l'on tire cette conſtruction geometrique qui eſt generale pour tous les cas.

Une Parabole MCM qui a pour axe la ligne CG dont le parametre eſt égal à la ligne a, étant donnée, & ayant reduit l'égalité propoſée ſous cette forme $x^4 \mp 2bx^3 \mp acxx \mp aadx \mp a^3f = 0$; on menera une ligne AB parallele à l'axe CG qui en ſoit diſtante de $\frac{1}{2}b$, du côté droit de cet axe lorſqu'il y a $+2bx^3$ dans l'égalité donnée, & du côté gauche lorſqu'il y a $-2bx^3$. On tirera par le point A où la ligne AB rencontre la Parabole, une perpendiculaire AD ſur l'axe CG ; & on prendra ſur cet axe les parties $DF = \frac{1}{2}a$, $FG = 2CD$ toûjours du côté oppoſé à ſon origine C, & la partie $GK = \frac{1}{2}c$ vers ſon origine C lorſqu'il y a $+acxx$, & du côté oppoſé lorſqu'il y a $-acxx$. On menera enſuite par les points déterminés A, F, une ligne droite indéfinie AF, & par le point K une perpendiculaire à l'axe qui rencontre AF en H ; & on prendra ſur cette perpendiculaire la partie $HE = \frac{1}{2}d$ du côté droit lorſqu'il y a $-aadx$, & du côté gauche lorſqu'il y a $+aadx$. Cela fait, on décrira un cercle du centre E, & du rayon $EM = AE$, lorſque le terme a^3f manque dans l'égalité donnée, c'eſt à dire, lorſqu'elle n'eſt que du troiſiéme degré : mais lorſqu'elle eſt du quatriéme, on prendra (après avoir nommé AE, m ;) le rayon $EM = \sqrt{mm \mp af}$, ſçavoir $+af$ s'il y a $-a^3f$, & $-af$ s'il y a $+a^3f$. Enfin des points M où ce cercle rencontre la Parabole donnée, menant des perpendiculaires MQ ſur la ligne AB ; elles ſeront les racines de l'égalité donnée ; ſçavoir celles qui tombent du côté droit de cette ligne, les vraies, & celles qui tombent du côté gauche, les fauſſes. FIG. 217.

Car prolongeant HK juſqu'à ce qu'elle rencontre la ligne AB au point B, on a par la conſtruction BK ou

$AD = \overline{+}\frac{1}{2}b$, ſçavoir $-\frac{1}{2}b$ lorſqu'il y a $+2bx^3$, & $+\frac{1}{2}b$ lorſque c'eſt $-2bx^3$; & par la proprieté de la Parabole, $CD = \frac{bb}{4a}$. Donc DG ou $DF+FG = \frac{1}{2}a + \frac{bb}{2a}$, & DK ou $AB = \frac{1}{2}a + \frac{bb}{2a} \overline{+} \frac{1}{2}c = \overline{+}g$, ſçavoir $-\frac{1}{2}c$ lorſqu'il y a $+acxx$, & $+\frac{1}{2}c$ lorſqu'il y a $-acxx$; & l'on doit obſerver que le point B tombe du côté de PM lorſque $AB = +g$, c'eſt à dire lorſque ſa valeur eſt poſitive, & du côté oppoſé lorſqu'elle eſt negative. Or à cauſe des triangles ſemblables ADF, ABH, on aura $DF(\frac{1}{2}a).DA(\overline{+}\frac{1}{2}b) :: AB(\overline{+}g).BH = \overline{+}\frac{bg}{a}$, ſçavoir $+\frac{bg}{a}$ lorſque les valeurs de AD & de AB ſont toutes deux poſitives ou negatives, & $-\frac{bg}{a}$ lorſque l'une d'elles eſt poſitive & l'autre negative. Et partant $BE = \overline{+}\frac{bg}{a} \overline{+} \frac{1}{2}d$, ſçavoir $-\frac{1}{2}d$ lorſqu'il y a $-aadx$, & $+\frac{1}{2}d$ lorſqu'il y a $+aadx$; & l'on doit encore obſerver que le point E tombera du côté de PM lorſque la valeur de BE eſt poſitive, & du côté oppoſé lorſqu'elle eſt negative. D'où il eſt évident que par le moyen de cette conſtruction on déterminera dans tous les cas poſſibles, toûjours comme il eſt requis, le centre E du cercle.

Si le ſecond terme $2bx^3$ manquoit dans l'égalité donnée, il eſt clair que les lignes AB, AF, tomberoient ſur l'axe CG, enſorte que les points A, D, ſe confondroient avec l'origine C; puiſque $b = o$. Et par conſequent le point G tomberoit ſur le point F, & les points H, B, ſur le point K: ce qui rend la conſtruction generale beaucoup plus ſimple. Car il ne faudroit alors que prendre ſur l'axe la partie $CF = \frac{1}{2}a$ toûjours vers le dedans de la Parabole, & la partie $KF = \frac{1}{2}c$ vers l'origine C lorſqu'il y a $+acxx$, & du côté oppoſé lorſqu'il y a $-acxx$; mener $KE = \frac{1}{2}d$ perpendiculaire à l'axe, du côté gauche lorſqu'il y a $+aadx$; & du côté droit lorſqu'il y a $-aadx$; & achever le reſte comme dans la conſtruction generale, en obſervant qu'ici $EC = m$.

FIG. 218.

De même ſi le terme $acxx$ manque, le point K tombera ſur le point G; & ſi c'eſt le terme $aadx$, le centre E du cercle tombera en H. FIG. 217.

COROLLAIRE II.

388. ON peut encore trouver une conſtruction plus ſimple pour les égalités du troiſiéme degré qui ont un ſecond terme, en les multipliant par l'inconnuë plus ou moins la quantité connuë du ſecond terme, ſçavoir plus cette quantité quand le ſecond terme eſt affecté du ſigne —; & moins cette quantité lorſqu'il y a le ſigne +; ce qui donne une équation du quatriéme degré où le ſecond terme eſt évanoüi. Qu'il faille, par exemple, trouver les racines de l'égalité du troiſiéme degré, $x^3 - bxx + apx + aaq = o$: je la multiplie par $x + b$ pour avoir l'égalité du quatriéme degré, $x^4 + apxx + aaqx + aabq = o$, $- bbxx + abpx$ dans laquelle le ſecond terme eſt évanoüi; je me ſers à preſent de la conſtruction que l'on vient de donner pour ces ſortes d'égalités où le ſecond terme manque, & j'ai $CK\ (\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c) = \frac{1}{2}a + \frac{bb}{2a} - \frac{1}{2}p$, $KE\ (\frac{1}{2}d) = \frac{1}{2}q + \frac{bp}{2a}$, & le rayon du cercle $EM = \sqrt{mm - bq}$: ce qui donne cette conſtruction.

Ayant mené une parallele à l'axe CD qui en ſoit diſtante vers le côté gauche d'une ligne égale à b, & qui rencontre la Parabole au point A, je tire par l'origine C de l'axe la droite CA, ſur laquelle j'éleve par ſon point de milieu O une perpendiculaire indéfinie OG qui rencontre l'axe au point G. Je prends ſur l'axe vers ſon origine C la partie $GK = \frac{1}{2}p$, & ayant tiré par le point K une perpendiculaire à l'axe qui rencontre la ligne OG au point H, je prends ſur cette perpendiculaire prolongée du côté de H la partie $HE = \frac{1}{2}q$, & je décris du centre E & du rayon EA un cercle. Je dis qu'il coupera la Parabole en des points M, d'où ayant abaiſſé ſur l'axe des perpendiculaires MQ, celles qui ſeront FIG. 219.

à droit, marqueront les vraies racines; & celles qui ſeront à gauche, les fauſſes de l'égalité propoſée $x^3 - bxx + apx + aaq = o$.

Car ayant mené les perpendiculaires AD, OL, ſur l'axe; on aura par la conſtruction $AD = b$, & par la proprieté de la Parabole $CD = \frac{bb}{a}$. Donc puiſque CA eſt diviſée par le milieu en O, les triangles ſemblables CAD, COL, donneront $OL = \frac{1}{2}b$, $CL = \frac{bb}{2a}$; & à cauſe des triangles rectangles ſemblables CLO, OLG, on aura $CL\left(\frac{bb}{2a}\right) \cdot LO\left(\frac{1}{2}b\right) :: LO\left(\frac{1}{2}b\right) . LG = \frac{1}{2}a$, & par conſequent CK ou $CL + LG - GK = \frac{1}{2}a + \frac{bb}{2a} - \frac{1}{2}p$. De plus à cauſe des triangles ſemblables GLO, GKH, on trouve $KH = \frac{bp}{2a}$, & $KH + HE$ ou $KE = \frac{1}{2}q + \frac{bp}{2a}$ qui tend du côté gauche de l'axe, comme il eſt preſcrit dans la conſtruction lorſqu'il y a $+ aadx$. Le point E eſt donc le centre du cercle lequel doit déterminer par ſes interſections avec la Parabole donnée toutes les racines de l'égalité du quatriéme degré $x^4 + apxx$ &c. Or comme les racines de cette égalité ſont celles de la propoſée $x^3 - bxx + apx + aaq = o$, avec une fauſſe AD (b); il s'enſuit que ce cercle doit paſſer par le point A. Donc &c.

On peut encore s'aſſurer par le calcul que EA eſt le rayon du cercle cherché. Car menant EB parallele à l'axe, on aura (à cauſe des triangles rectangles EBA, EKC) les quarrés des hypothenuſes $\overline{EA}^2 = \overline{EB}^2 + \overline{BA}^2$ & $\overline{EC}^2 = \overline{CK}^2 + \overline{KE}^2$ & par conſequent il s'agit de prouver que $\overline{EB}^2 + \overline{BA}^2 = \overline{EK}^2 + \overline{KC}^2 - bq$, puiſqu'on doit prendre $EM = \sqrt{mm - bq}$. Or en mettant à la place de ces lignes de part & d'autre leurs valeurs analytiques, on trouvera les mêmes quantités. Et c'eſt ce qui doit arriver, ſi le rayon cherché $EM = EA$.

Pour rendre cette conſtruction generale, il faut obſerver 1°. De mener du côté gauche de l'axe la parallele qui en eſt diſtante d'une ligne égale à b, lorſqu'il y a $-bxx$ dans l'égalité propoſée, & du côté droit lorſqu'il y a $+bxx$. 2°. De prendre ſur l'axe $GK = \frac{1}{2}p$ du côté de ſon origine C lorſqu'il y a $+apx$, & du côté oppoſé lorſqu'il y a $-apx$. 3°. De prendre $HE = \frac{1}{2}q$ du côté gauche lorſqu'il y a $+aaq$, & du côté droit lorſqu'il y a $-aaq$. Tout cela eſt trop évident pour m'arrêter à le démontrer en détail.

REMARQUE I.

389. IL eſt à propos de remarquer, 1°. Que ſi le cercle ne coupe la Parabole donnée qu'en deux points, il s'enſuivra que l'égalité propoſée n'aura que deux racines réelles lorſqu'elle eſt du quatriéme degré, & qu'une ſeule lorſqu'elle eſt du troiſiéme, & les deux autres imaginaires: comme dans la figure 219. où le cercle ne coupe la Parabole qu'en deux points A, M; l'égalité $x^4 + apxx - bbxx$ &c. n'a que deux racines réelles AD, MQ, qui ſont toutes deux fauſſes, parce qu'elles tombent du côté gauche de l'axe. 2°. Que ſi le cercle ne coupoit ni ne rencontroit la Parabole en aucun point (ce qui ne peut arriver lorſque l'égalité eſt du troiſiéme degré comme l'on voit par les conſtructions precedentes) les quatre racines ſeroient imaginaires. 3°. Que s'il la touchoit en un point l'égalité propoſée auroit deux racines égales chacune à la perpendiculaire menée de ce point; ce qui vient de ce qu'on peut conſiderer un cercle qui touche une Parabole, comme s'il coupoit en deux points infiniment proches l'un de l'autre, qui ſont regardés comme réunis dans le point touchant: mais alors l'égalité propoſée ſe pourroit abaiſſer à une du ſecond degré par les regles de l'Algebre ordinaire, de ſorte qu'on n'auroit point beſoin d'une Parabole pour en trouver les racines.

REMARQUE II.

390. SI l'on fait attention à ce qu'on démontre en Algebre qu'en toute égalité où le ſecond terme manque, & qui a toutes ſes racines réelles, la ſomme des vraies eſt égale à la ſomme des fauſſes; on verra naître ce Theorême.

FIG. 218. S'il y a un cercle qui coupe une Parabole en quatre points M d'où l'on abaiſſe des perpendiculaires MQ ſur l'axe CF: je dis que la ſomme des perpendiculaires qui tombent du côté droit de l'axe, ſera égale à la ſomme de celles qui tombent du côté gauche.

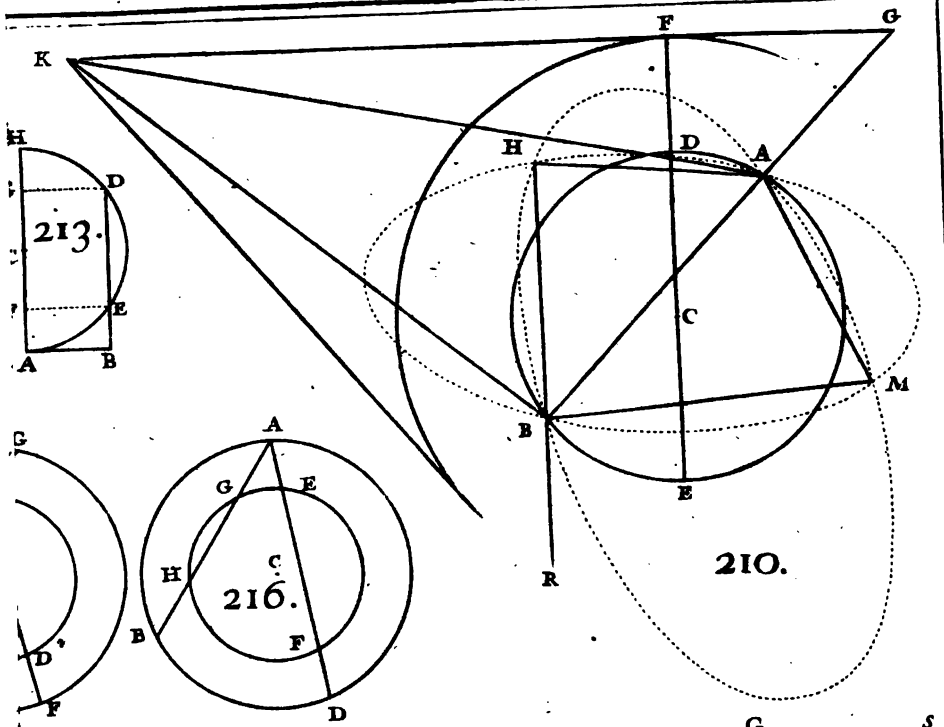
Car ſi l'on prend vers le dedans de la Parabole ſur l'axe depuis ſon origine C la partie CF égale à la moitié de ſon parametre que j'appelle a, & qu'ayant tiré du centre E du cercle la perpendiculaire EK ſur l'axe, on faſſe $FK = \frac{1}{2}c$, $KE = \frac{1}{2}d$, $\overline{EC}^2 - \overline{EM}^2 = af$; il eſt clair par la conſtruction qui eſt à la fin * du Corollaire premier, que les perpendiculaires MQ ſeront les racines de cette égalité $x^4 - acxx + aadx + a^3f = o$ dans laquelle le ſecond terme manque; ſçavoir celles qui tombent du côté droit de l'axe, les vraies; & celles qui tombent du côté gauche, les fauſſes. Donc &c.

* *Art.* 387.

Si le cercle paſſoit par l'origine C de l'axe, il eſt viſible que l'une des perpendiculaires MQ deviendroit nulle ou zero; & qu'ainſi il y auroit alors une perpendiculaire d'une part de l'axe égale aux deux autres de l'autre part.

Si le cercle touchoit la Parabole en un point & la coupoit en deux autres, il faudroit prendre le double de la perpendiculaire menée du point touchant; puiſque (comme l'on vient * de dire) on peut regarder ce cercle comme s'il coupoit la Parabole en deux points infiniment proches l'un de l'autre, leſquels ſe réüniſſent au point touchant.

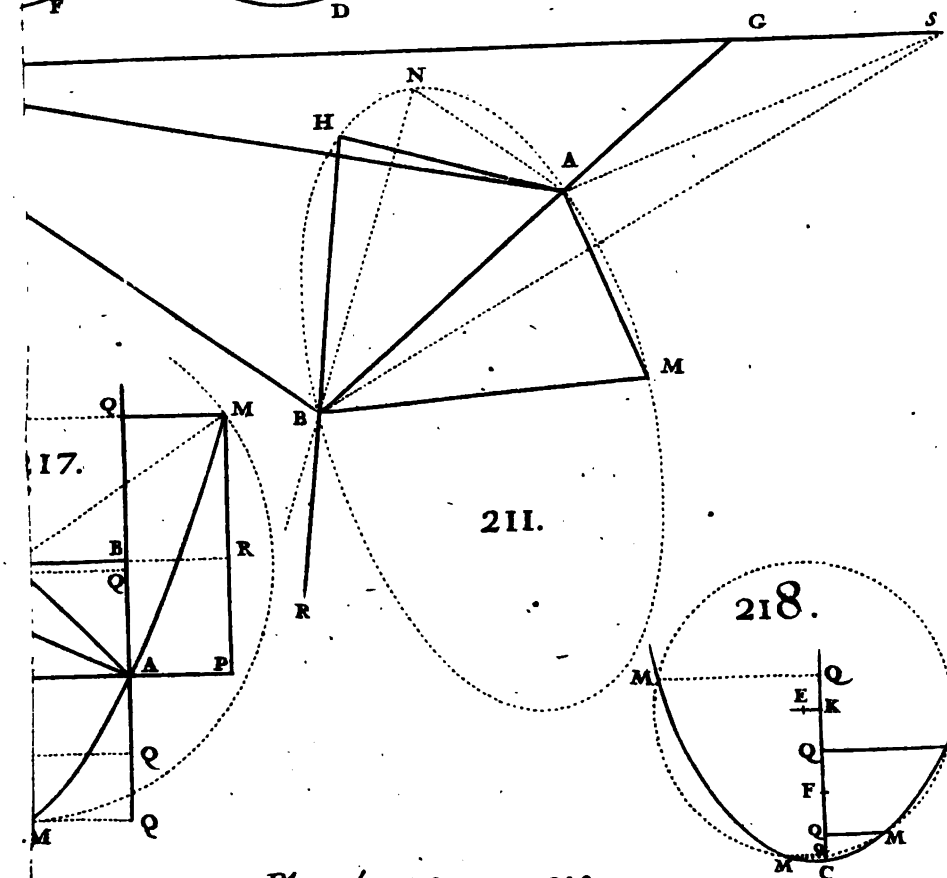
* *Art.* 389.



213.

210.

216.



211.

17.

218.

Planche 23. page 310.

REMARQUE III.

391. COMME l'on ne peut imaginer en Geometrie des produits qui ayent plus de trois dimenſions ; puiſque le ſolide, qui eſt la quantité la plus compoſée, n'en a que trois ; on pourra diviſer, ſi l'on veut, tous les termes d'une égalité propoſée qui paſſe le troiſiéme degré, par telle ligne donnée qu'on voudra, élevée à une puiſſance moindre d'une unité que chacun de ſes termes n'a de dimenſions : ce qui ne troublera point l'égalité, & fera que chacun de ſes termes, n'exprimera plus que des lignes droites. Soit, par exemple, l'égalité du quatriéme degré $x^4 + 2bx^3 + acxx - aadx - a^3f = o$; je la diviſe par a^3, ce qui donne $\frac{x^4}{a^3} + \frac{2bx^3}{a^3} + \frac{cxx}{aa} - \frac{dx}{a} - f = o$, dont chaque terme n'a qu'une dimenſion, & n'exprime par conſequent que des lignes droites. On choiſit ordinairement la ligne qui ſe trouve repetée le plus ſouvent dans tous les termes de l'équation propoſée, comme eſt ici la ligne a, & même quelquefois on la ſousentend, en la regardant comme l'unité dans les nombres, qui ne change rien aux quantités qu'elle multiplie ou qu'elle diviſe : ainſi en faiſant $a = 1$, on écrira $x^4 + 2bx^3 + cxx - dx - f = o$, au lieu de $x^4 + 2bx^3 + acxx - aadx - a^3f = o$ ou de $\frac{x^4}{a^3} + \frac{2bx^3}{a^3} + \frac{cxx}{aa} - \frac{dx}{a} - f = o$. Il en eſt de même des égalités du cinquiéme & du ſixiéme degré, &c.

REMARQUE. IV.

392. SI après avoir conſtruit le cercle qui eſt le lieu de la derniere équation du Lemme, on conſtruit une Section conique qui ſoit le lieu de telle autre de ſes équations qu'on voudra ; ces deux lieux détermineront par leurs interſections les racines de l'égalité propoſée ; dont la raiſon eſt que faiſant évanoüir par le moyen de leurs équations l'inconnuë y, on retrouve l'égalité même propoſée.

De-là il eſt évident qu'on peut conſtruire cette égalité, 1°. Par le moyen d'un cercle & d'une Hyperbole équilatere, en ſe ſervant de la ſeptiéme & de la ſixiéme équation du Lemme. 2°. Par le moyen d'un cercle, & d'une Ellipſe dont l'axe parallele à AP eſt à ſon parametre comme a eſt à c, en ſe ſervant de la ſeptiéme & de la troiſiéme équation. 3°. Par le moyen d'un cercle, & d'une Hyperbole dont l'axe parallele à AP eſt à ſon parametre comme aa eſt à bb, en ſe ſervant de la ſeptiéme & de la quatriéme équation. Or comme la ligne a, dont on ſe ſert pour reduire ſous l'expreſſion ac toutes les quantités qui multiplient xx, ſous l'expreſſion aad celles qui multiplient x, & enfin ſous l'expreſſion a^3f les quantités entierement connuës, eſt arbitraire; il s'enſuit qu'en prenant pour cette ligne a une infinité de differentes grandeurs, on pourra conſtruire l'égalité propoſée par le moyen d'une infinité de cercles, & d'Ellipſes, ou d'Hyperboles équilateres & non équilateres, toutes differentes entr'elles.

On a vû dans l'article 387. qu'en prenant pour l'unité arbitraire a le parametre de l'axe d'une Parabole donnée, on peut en ſe ſervant de la premiere & de la ſeptiéme équation conſtruire l'égalité propoſée par le moyen d'un cercle & de la Parabole donnée: & je vais faire voir qu'en déterminant cette ligne a d'une certaine maniere, on peut conſtruire l'égalité par le moyen d'un cercle & d'une Ellipſe ou d'une Hyperbole ſemblable à une Ellipſe ou à une Hyperbole donnée. Car la raiſon de ſes axes étant donnée par la ſuppoſition, la raiſon de l'axe parallele à AP avec ſon parametre ſera auſſi donnée. Si donc l'on nomme cette raiſon donnée $\frac{n}{m}$; on aura lorſqu'il s'agit de l'Ellipſe $\frac{c}{a} = \frac{n}{m}$, & partant $aa = \frac{acm}{n}$; d'où il ſuit que ſi l'on prend pour l'unité arbitraire a, la racine d'un quarré aa égal * à une quantité connuë ac qui multiplie xx dans l'égalité donnée

* Art. 378.

donnée, & eſt multipliée par $\frac{m}{n}$, on conſtruira l'égalité en ſe ſervant de la ſeptiéme & de la troiſiéme équation, par le moyen d'un cercle & d'une Ellipſe dont l'axe parallele à AP, ſera à ſon parametre comme m eſt à n, puiſque $\frac{n}{m} = \frac{e}{a}$. Mais lorſqu'il s'agit de l'Hyperbole, on aura $\frac{n}{m} = \frac{bb}{aa}$, & partant $a = b\sqrt{\frac{m}{n}}$; d'où l'on voit que ſi l'on prend pour l'unité a cette valeur, & qu'on conſtruiſe l'égalité en ſe ſervant de la ſeptiéme & de la quatriéme équation, l'axe parallele à AP de l'Hyperbole qui eſt le lieu de la quatriéme, ſera à ſon parametre comme m eſt à n, puiſque $\frac{n}{m} = \frac{bb}{aa}$. Et c'eſt ce qui étoit propoſé.

REMARQUE V.

393. LA ligne a qui fait l'office de l'unité, & qui eſt arbitraire, ſuffit comme l'on vient de voir pour conſtruire l'égalité propoſée, par le moyen d'un cercle & d'une Parabole donnée, ou bien par le moyen d'un cercle, & d'une Ellipſe, ou d'une Hyperbole ſemblable à une donnée. Mais lorſqu'il eſt queſtion de la conſtruire par le moyen d'un cercle, & d'une Ellipſe, ou d'une Hyperbole donnée, une ſeule ligne arbitraire ne ſuffit pas; il faut en introduire d'autres dans l'égalité propoſée, afin de pouvoir les déterminer enſuite de la maniere que la Section donnée ſerve. C'eſt ce que l'on va executer dans le Lemme ſuivant.

LEMME FONDAMENTAL.

Pour la conſtruction des Egalités du troiſiéme & du quatriéme degré, avec un cercle, & une Ellipſe, ou une Hyperbole donnée.

394. SOIT l'égalité du quatriéme degré $z^4 + abzz - aacz + a^3d = o$, dans laquelle les lettres a, b, c, d,

marquent des lignes données, & la lettre z exprime les racines inconnuës de l'égalité. Je prends une autre inconnuë $x = \frac{fz}{a}$ (la lettre f marque une ligne prise à volonté), & substituant à la place de z, zz, & z^4 leurs valeurs $\frac{ax}{f}$, $\frac{aaxx}{ff}$, & $\frac{a^4x^4}{f^4}$ dans l'égalité precedente; je la change en cette autre $x^4 + \frac{bff}{a}xx - \frac{cf^3}{a}x + \frac{df^4}{a} = o$; je prends une troisiéme inconnuë y telle qu'étant multipliée par f son produit fy soit égal au quarré xx de la seconde; ce qui donne les équations suivantes.

1°. $xx - fy = o$; & substituant à la place de xx, & de x^4 leurs valeurs fy & $ffyy$ dans l'égalité $x^4 + \frac{bff}{a}xx$ &c, j'ai pour seconde équation.

2°. $yy + \frac{bf}{a}y - \frac{cf}{a}x + \frac{dff}{a} = o$, laquelle étant ajoûtée à la premiere, donne pour troisiéme équation.

3°. $yy + \frac{bf}{a}y - fy + xx - \frac{cf}{a}x + \frac{dff}{a} = o$, dont le lieu est * un cercle lorsque les inconnuës & indéterminées x & y font entr'elles un angle droit. Je multiplie la premiere équation par la fraction $\frac{g}{a}$ dans laquelle g exprime une ligne telle qu'on veut de même que f, & j'ai $\frac{g}{a}xx - \frac{fg}{a}y = o$; Et ajoûtant cette équation avec la seconde, & l'en ôtant ensuite, je forme la quatriéme & la cinquiéme équation.

* *Art.* 324. & 329.

4°. $yy + \frac{bf}{a}y - \frac{gf}{a}y + \frac{g}{a}xx - \frac{cf}{a}x + \frac{dff}{a} = o$, dont le lieu est * une Ellipse.

* *Art.* 324.

5°. $yy + \frac{bf}{a}y + \frac{gf}{a}y - \frac{g}{a}xx - \frac{cf}{a}x + \frac{dff}{a} = o$, dont le lieu est * une Hyperbole ou les Hyperboles opposées.

* *Art.* 332.

REMARQUE.

395. S'IL arrive que quelques termes de l'égalité proposée ayent des signes differens de celle-ci, ou qu'ils

manquent ; les lieux de ces cinq équations seront toûjours neanmoins des Sections coniques de même nom : c'est à dire que les lieux de la premiere & de la seconde équation seront toûjours des Paraboles, celui de la troisieme, un cercle, &c.

PROPOSITION V.

Problême.

396. CONSTRUIRE *l'égalité du quatriéme degré* $z^4 + abzz - aacz + a^3d = o$, *avec un cerle donné & une Hyperbole semblable à une donnée ; ou avec une Hyperbole donnée & un cercle.*

Je construis separément * les lieux de la troisiéme & de la cinquiéme équation, en prenant pour les inconnuës & indéterminées x & y les mêmes lignes AP, PM, qui faſſent entr'elles un angle droit APM ; & les intersections de ces deux lieux me servent à déterminer les valeurs de l'inconnuë z, de la maniere qui suit. * *Art.* 324. & 332. FIG. 220. & 221.

Soit menée par le point A origine des x, la ligne $AD = \frac{af - bf}{2a}$ parallele à PM, & du même côté lorsque a surpasse b, & au contraire du côté opposé lorsqu'il est moindre. Et ayant tiré la droite indéfinie DG parallele à AP, soient prises sur cette ligne du côté de PM la partie $DC = \frac{cf}{2a}$, & soit décrit du centre C & du rayon CF ou $CG = \frac{f}{2a}\sqrt{cc + aa - 2ab + bb - 4ad}$, un cercle. Maintenant ayant mené $AH = \frac{bf + gf}{2a}$ parallele à PM & du côté opposé, soit tirée la droite indefinie HK parallele à AP, sur laquelle soient prises la partie $HI = \frac{cf}{2g}$ du côté opposé à PM, & de part & d'autre du point I les parties IK, IL, égales chacune à $\frac{f}{2g}\sqrt{cc - bg + 4dg}$ ou $\frac{f}{2g}\sqrt{bg - 4dg - cc}$ (on a

pris pour abreger $h = \frac{b+g}{a}$). Soit enfin décrite de l'axe LK (qui doit être le premier lorſque $cc+4dg$ eſt plus grand que bg, & le ſecond lorſqu'il eſt moindre) qui ſoit à ſon parametre KO comme a eſt à g, une Hyperbole ou les Hyperboles oppoſées qui rencontrent le cercle en des points M, M, d'où ſoient abaiſſées des perpendiculaires MP, MP, ſur la ligne AP. Je dis que les parties AP, AP, de cette ligne ſeront les racines de l'égalité $x^4 + \frac{bff}{a}xx - \frac{cf^3}{a}x + \frac{df^4}{a} = o$; en obſervant qu'elles ſont vraies lorſque les points P tombent du côté où l'on a ſuppoſé PM en faiſant la conſtruction, & fauſſes lorſqu'ils tombent du côté oppoſé.

Car on trouvera par la proprieté du cercle la troiſiéme équation; & par la proprieté de l'Hyperbole, la cinquiéme; & ôtant la troiſiéme de la cinquiéme, on aura $\frac{gf}{a}y + fy - \frac{g}{a}xx - xx = o$, d'où l'on tire $y = \frac{xx}{f}$; & mettant dans l'une ou dans l'autre de ces deux équations à la place de y cette valeur $\frac{xx}{f}$, & à la place de yy ſon quarré $\frac{x^4}{ff}$, on trouvera l'égalité x^4 &c. Mais ayant les valeurs de x, on a celles de z; puiſque $z = \frac{ax}{f}$.

Maintenant pour ſatisfaire à la premiere demande du Problême, je nomme le rayon du cercle donné CF, r; & j'ai par conſequent $r = \frac{f}{2a}\sqrt{cc+aa-2ab+bb-4ad}$; d'où il ſuit que ſi l'on prend $f = \frac{2ar}{\sqrt{cc+aa-2ab+bb-4ad}}$, le rayon CF ou CG du cercle qui eſt le lieu de la troiſiéme équation, ſera égal à la donnée r. Il reſte à faire que l'Hyperbole ſoit ſemblable à une donnée, c'eſt à dire, que ſon premier ou ſecond axe LK ſoit à ſon parametre KO en raiſon donnée de m à n; & il eſt viſible qu'il ne faut pour cela que prendre $g = \frac{an}{m}$, puiſque $LK.\ KO :: a.\ g :: m.\ n$.

Enfin pour faire en ſorte que l'Hyperbole ſoit donnée, ou, ce qui eſt la même choſe que ſon premier ou ſecond axe LK & le parametre KO de cet axe ſoient égaux à des lignes données; je nomme d'abord le premier axe LK, $2t$; ſon parametre KO, p; & j'ai $KO(p) = \frac{2gt}{a}$, & $LK(2t) = \frac{f}{g}\sqrt{cc+4dg-hg}$ (il faut reſſouvenir que $h = \frac{b+g}{a}$); ce qui donne $g = \frac{ap}{2t}$, & $f = \frac{2gt}{\sqrt{cc+4dg-hg}}$: d'où l'on voit que ſi $cc+4dg$ ſurpaſſe hg, & qu'on prenne pour g & pour f ces valeurs, on trouvera dans la conſtruction de la cinquiéme équation pour le premier axe LK & ſon parametre KO les lignes données $2t$ & p. Mais s'il arrive que $cc+4dg$ ſoit moindre que hg, il faudra nommer le ſecond axe LK, $2t$; & ſon parametre KO, p; ce qui donne comme ci-deſſus $g = \frac{ap}{2t}$, & $f = \frac{2gt}{\sqrt{hg-cc-4dg}}$; où l'on doit obſerver que $2t$ & p ne marquent plus à preſent les mêmes lignes qu'auparavant: & s'il arrive que hg, dans cette derniere ſuppoſition où $2t$ marque le ſecond axe; ſurpaſſe $cc+4dg$, il eſt viſible qu'en prenant pour g & f ces valeurs dans la conſtruction de la cinquiéme équation, on trouvera pour le ſecond axe LK & ſon parametre KO les lignes données $2t$ & p.

Il faut bien remarquer qu'il peut arriver que la valeur de f ſoit imaginaire dans l'une & dans l'autre de ces ſuppoſitions; & alors on voit que la conſtruction devient impoſſible du moins par cette methode. Or comme tous les Auteurs qui s'en ſont ſervis après M. Slûze, qui en eſt l'inventeur, la donnent pour generale; j'en ferai une remarque à part, où je ferai voir en examinant par ordre tous les cas qui peuvent arriver, que dans cet exemple même il peut y en avoir une infinité où cette methode ne réüſſit point.

Si c'étoient deux Hyperboles conjuguées qui fuſſent données, la conſtruction ſeroit toûjours poſſible; car ſi

après avoir nommé le premier axe d'une de ces Hyperboles ZK, $2t$; & son parametre KO, p; il se trouvoit que la valeur de $f = \frac{2gt}{\sqrt{cc+4dc-hg}}$ fût imaginaire, c'est à dire, que hg surpassât $cc+4dg$; il n'y auroit qu'à se servir dans la construction à la place de cette Hyperbole de sa conjuguée & de son second axe, puisque le second axe de celle-ci étant le même que le premier axe de l'autre, la valeur de f ne renfermeroit plus aucune contradiction. Je dois encore avertir que s'il arrive que $cc+4dg = hg$, l'équation du quatrième degré s'abaisse à une du second.

REMARQUE.

397. 1°. Si l'Hyperbole donnée est équilatere. On aura $g = a$, & on se servira dans la construction du Problême de son premier axe, lorsque $cc+4dg$ surpasse hg, c'est à dire, en mettant pour h sa valeur $\frac{\overline{b+g}^2}{a}$, & pour g sa valeur a, lorsque $cc+4ad$ surpasse $\overline{b+a}^2$; & du second lorsqu'il est moindre. Et la construction sera toûjours possible.

2°. Si le premier axe de l'Hyperbole donnée surpasse son parametre. On se servira dans la construction du Problême de son premier axe, lorsque $cc+4ad$ surpasse $\overline{b+a}^2$; car il suit de là que $cc+4dg$ surpasse hg, c'est à dire (en multipliant par $\frac{a}{g}$ & mettant pour h sa valeur $\frac{\overline{b+g}^2}{a}$) que $\frac{acc}{g}+4ad$ surpasse $\overline{b+g}^2$, puisque dans cette supposition g $(\frac{ap}{2t})$ étant moindre que a, la quantité $\frac{acc}{g}+4ad$ sera plus grande que $cc+4ad$, & $\overline{b+g}^2$ sera moindre que $\overline{b+a}^2$. Au contraire lorsque $cc+4ad$ est moindre que $\overline{b+a}^2$, il faudra se servir du second axe; car il suit de là que $cc+4dg$ est moindre que hg, ou que $\frac{acc}{g}+4ad$ est moindre que $\overline{b+g}^2$

puiſque $2t$ marquant à preſent le ſecond axe qui eſt moindre que ſon parametre p la quantité $\frac{ap}{2t}$ eſt ici plus grande que a. D'où l'on voit que la conſtruction eſt toujours poſſible, non ſeulement lorſque l'Hyperbole donnée eſt équilatere, mais encore lorſque le premier axe eſt plus grand que ſon parametre.

3°. Si le premier axe eſt moindre que ſon parametre. Il faudra neceſſairement lorſque $cc+4ad$ ſurpaſſe $\overline{b+a}^2$, ſe ſervir du premier axe; car ſi l'on employoit le ſecond, il faudroit que $cc+4dg$ fût moindre que bg, ou que $\frac{acc}{g}+4ad$ fût moindre que $\overline{b+g}^2$; ce qui ne peut être, puiſque $2t$ qui exprimeroit alors le ſecond axe étant plus grand que p, la quantité $g\left(\frac{ap}{2t}\right)$ ſeroit moindre que a. Mais en ſe ſervant du premier axe, il peut arriver que $\frac{acc}{g}+4ad$ ſoit moindre que $\overline{b+g}^2$ puiſque $g\left(\frac{ap}{2t}\right)$ eſt plus grand que a; & alors il eſt évident que la conſtruction du Problême devient impoſſible, parce que la valeur de $f\left(\frac{2gt}{\sqrt{cc+4dg}-bg}\right)$ renferme une contradiction. De même lorſque $cc+4ad$ eſt moindre que $\overline{b+a}^2$, il faut neceſſairement ſe ſervir du ſecond axe; & comme alors la valeur de $g\left(\frac{ap}{2t}\right)$ eſt moindre que a, il peut arriver que $\frac{acc}{g}+4ad$ ſoit plus grand que $\overline{b+g}^2$, & qu'ainſi la valeur de $f\left(\frac{2gt}{\sqrt{bg-cc-4dg}}\right)$ ſoit imaginaire.

Il eſt donc évident qu'il peut arriver une infinité de cas, où la conſtruction de l'égalité propoſée dans le Problême devient impoſſible; & cela lorſque le premier axe de l'Hyperbole donnée eſt moindre que ſon parametre, car autrement elle reuſſira toûjours.

COROLLAIRE I.

398. SI l'on prenoit dans le Problême precedent la quatriéme équation au lieu de la cinquiéme, & qu'on fit la conſtruction de même en ſe ſervant de l'Ellipſe qui eſt le lieu de cette équation, au lieu de l'Hyperbole qui eſt le lieu de la cinquiéme : il eſt viſible que l'on conſtruiroit l'égalité propoſée z^4 &c. par le moyen d'un cercle donné & d'une Ellipſe ſemblable à une donnée ; ou avec une Ellipſe donnée & un cercle.

COROLLAIRE II.

399. IL eſt évident qu'on peut rendre la conſtruction precedente generale pour toutes ſortes d'égalités du troiſiéme & du quatriéme degré, en obſervant 1°. De faire évanoüir le ſecond terme de l'égalité donnée, lorſqu'elle en a un ; de la multiplier enſuite par ſa racine z lorſqu'elle n'eſt que du troiſiéme degré ; & de prendre un plan ab égal à tous les plans qui multiplient zz, un ſolide aac égal à tous les ſolides qui multiplient z, & enfin un ſurſolide a^3d égal à tous les ſurſolides donnés. 2°. D'effacer dans les valeurs de AD, DC, CF, AH, IH, LK, les termes où ſe trouve b lorſque zz ne ſe rencontre point dans l'égalité donnée, ceux dans leſquels ſe rencontrent c ou d lorſque le quatriéme ou le cinquiéme terme manquent : & de changer de ſignes tous les termes où b ſe rencontre avec une dimenſion impair, ſi le troiſiéme terme de l'équation donnée a un ſigne different du troiſiéme de la precedente ; comme auſſi ceux dans leſquels c ou d ſe rencontrent avec une dimenſion impaire lorſque le quatriéme ou le cinquiéme terme ont des ſignes différens des quatriéme & cinquiéme de l'égalité precedente. 3°. De prendre du côté de PM ces lignes lorſque leurs valeurs ſont poſitives, & du côté oppoſé lorſquelles ſont negatives.

REMAR.

REMARQUE.

400. ON peut toûjours rendre la conſtruction precedente plus ſimple dans les égalités particulieres qu'on ſe propoſe de conſtruire, en faiſant en ſorte que a ſoit égal à b ; car il n'y a qu'à reduire l'égalité donnée ſous cette forme $z^4 + aazz + aacz + a^3d = o$, au lieu de cette autre $z^4 + abzz + aacz + a^3d = o$. Ce qui a empêché de le faire d'abord, c'eſt qu'on avoit en vûë de rendre la conſtruction du Problême generale pour tous les cas, comme l'on vient de faire dans le Corollaire precedent, & que pour cet effet il falloit que chaque terme de l'égalité renfermât des lettres differentes b, c, d, au premier degré.

PROPOSITION VI.

Problême.

401. TROUVER *les racines de l'égalité* $z^4 - bz^3 - acz z + aadz + aahh = o$, *par le moyen d'une Hyperbole donnée entre les Aſymptotes, & d'un cercle.* FIG. 222.

Ayant fait $z = \frac{ax}{f}$, on transformera l'égalité donnée en cette autre $x^4 - \frac{bf}{a}x^3 - \frac{cff}{a}xx + \frac{df^3}{a}x + \frac{hhf^4}{aa} = o$. Ayant mené d'un point quelconque M de l'Hyperbole donnée qui a pour centre le point A, une parallele MP à l'une des Aſymptotes AQ, & qui rencontre l'autre au point P, on nommera les inconnuës & indéterminées AP, x ; PM, y ; leſquelles font entr'elles un angle donné APM, & on aura par la proprieté de l'Hyperbole $xy = mm$, en ſuppoſant que mm en ſoit la puiſſance. Maintenant ſi l'on prend $f = m\sqrt{\frac{a}{b}}$, on aura $hff = amm$, & $\frac{hhf^4}{aa} = m^4 = xxyy$: & mettant à la place de $\frac{hhf^4}{aa}$ qui eſt le dernier terme de l'égalité precedente ſa valeur

$xxyy$, & diviſant enſuite par xx, on trouvera $xx - \frac{bf}{a}x - \frac{cff}{a} + \frac{df^3}{axx} + yy = o$, qui ſe change (en mettant dans le terme $\frac{df^3}{axx}$ à la place de x ſa valeur $\frac{bff}{ay}$ trouvée par le moyen de l'équation $xy = mm = \frac{bff}{a}$) en cette autre $xx - \frac{bf}{a}x - \frac{cff}{a} + \frac{df}{b}y + yy = o$, dont le lieu eſt * un cercle lorſque l'angle APM eſt droit.

* *Art.* 328. & 329.

Mais lorſque l'angle APM n'eſt pas droit, ou (ce qui revient au même) lorſque l'Hyperbole donnée n'eſt pas équilatere, il eſt évident que le lieu de la derniere équation n'eſt plus un cercle, mais une Ellipſe. C'eſt pourquoi afin de trouver une équation dont le lieu ſoit un cercle, je prens ſur l'Aſymptote AP la partie $AB = 2a$: & ayant mené BE parallele à l'autre Aſymptote AQ, je tire du centre A la perpendiculaire AE ſur BE: & nommant les données BE, g; AE, e; je multiplie l'équation $xy - mm = o$, dont l'Hyperbole donnée eſt le lieu, par $\frac{g}{a}$; & j'ai $\frac{gxy}{a} - \frac{gmm}{a} = o$. J'ajoûte enſuite cette équation à la precedente lorſque l'angle fait par les Aſymptotes eſt aigu, & je l'en retranche lorſqu'il eſt obtus comme je le ſuppoſe dans cette figure: cela me donne $yy - \frac{g}{a}xy + \frac{df}{b}y + xx - \frac{bf}{a}x - \frac{cff+gmm}{a} = o$, dont le lieu eſt un cercle * qui ſe conſtruit ainſi.

* *Art.* 327. & 329.

Soit priſe ſur l'Aſymptote AQ la partie $AD = \frac{df}{2b}$ du côté oppoſé à PM: ſoit tirée parallelement à AE, la ligne $DC = \frac{bf}{e} - \frac{dgf}{2eb}$ du côté de PM lorſque cette valeur eſt poſitive, & du côté oppoſé lorſqu'elle eſt negative: Enfin du centre C & du rayon $CM = \sqrt{AC^2 + \frac{cff-gmm}{a}}$ ſoit décrit un cercle. Je dis qu'il coupera l'Hyperbole donnée & ſon oppoſée en des points M, d'où ayant mené des paralleles MP à l'Aſymptote

FIG. 221.

AQ; les parties AP de l'autre Asymptote exprimeront les racines de l'égalité $x^4 - \frac{bf}{a}x^3 - \frac{eff}{a}xx + \frac{df^3}{a}x + \frac{bhf^4}{aa} = o$: sçavoir celles qui sont du côté de PM, les vraies; & celles qui sont du côté opposé, les fausses.

Car par la proprieté du cercle, on trouve cette équation $yy - \frac{g}{n}xy + \frac{df}{b}y + xx - \frac{bf}{a}x - \frac{eff + gmm}{n} = o$ qui se reduit (en mettant pour xy sa valeur mm) à cette autre $xx - \frac{bf}{a}x - \frac{eff}{a} + \frac{af}{b}y + yy = o$, dans laquelle, mettant enfin pour y sa valeur $\frac{mm}{x}$ ou $\frac{bff}{ax}$, & pour yy le quarré de cette valeur, on trouve l'égalité même proposée $x^4 - \frac{bf}{a}x^3$ &c.

Si l'angle fait par les Asymptotes étoit aigu, il faudroit changer dans les valeurs de AD & de CM, les signes des termes où g se rencontre, dont la raison est que BE (g) devient negative de positive qu'elle étoit. Mais lorsque l'Hyperbole est équilatere, il faut effacer les termes où g se rencontre & mettre pour e sa valeur $2a$ parce que AE tombe alors sur AB: ce qui rend la construction beaucoup plus simple.

Lorsqu'on a les differentes valeurs de x, il est évident qu'on a aussi celles de z, en faisant $z = \frac{ax}{f}$. Et c'est ce qui etoit proposé.

COROLLAIRE I.

402. Si le dernier terme de l'égalité proposée du quatriéme degré, avoit le signe —, il est clair qu'en operant comme ci-dessus, on trouveroit une équation dans laquelle le terme yy auroit le signe —, & dont le lieu par conséquent ne seroit pas un cercle, mais *une Hyperbole. D'où l'on voit que cette methode ne peut servir que pour les égalités du quatriéme degré qui ont leur dernier terme avec le signe +. * Art. 352.

COROLLAIRE. II.

403. ON pourra toûjours en ſe ſervant de la methode precedente, reſoudre toute égalité donnée du troiſiéme degré $x^3 \mp nxx \mp apx \mp aaq = o$; par le moyen d'une Hyperbole donnée entre ſes Aſymptotes, & d'un cercle. Car la multipliant par $x + r$ lorſqu'il y a $+aaq$, & par $x - r$ lorſque c'eſt $-aaq$, on la changera toûjours en cette autre du quatriéme degré.

$$x^4 \mp nx^3 \mp apxx \mp aaqx + aaqr = o.$$
$$\mp r \quad \mp nr \quad \mp apr$$

dont le dernier terme $aaqr$ aura toûjours le ſigne $+$, & qui ſera par conſequent du nombre de celles qu'on peut conſtruire de la maniere precedente.

Mais on abregera beaucoup la conſtruction en obſervant 1°. De prendre pour l'unité arbitraire a la ligne m racine de la puiſſance de l'Hyperbole donnée, qui eſt le lieu de l'équation $xy = mm = aa$, puiſque $m = a$. 2°. De profiter de l'indéterminée r pour égaler le dernier terme $aaqr$ avec $a^4 = xxyy$: ce qui donne $r = \frac{aa}{q}$. 3°. Que le cercle qui doit déterminer par ſes interſections les racines de l'égalité coupera neceſſairement l'Hyperbole lorſqu'il y a $-aaq$, & ſon oppoſée lorſque c'eſt $+aaq$, en un point K, d'où ayant mené une parallele KH à l'Aſymptote AQ, la partie AH de l'autre Aſymptote doit être égale à r, puiſque l'égalité du quatriéme degré a pour une de ſes racines $x = \mp r$. De là on tire cette conſtruction qu'il eſt facile de rendre generale pour toutes les égalités du troiſiéme degré.

FIG. 223.

Je ſuppoſe que l'angle fait par les Aſymptotes de l'Hyperbole donnée ſoit aigu, & qu'ayant pris pour l'unité arbitraire a la racine de la puiſſance de l'Hyperbole donnée, on ait réduit l'égalité donnée du troiſiéme degré ſous cette expreſſion $x^3 - nxx - apx - aaq = o$. Ayant pris ſur l'Aſymptote AP la partie $AB = 2a$, & mené BE parallele à l'autre Aſymptote AQ, on tire

du centre A la perpendiculaire AE sur BE ; & ayant pris sur AQ la partie $AL = q$ du côté de PM, parce qu'il y a $-aaq$ dans l'égalité donnée, on tirera LK parallele à AP, & qui rencontre l'Hyperbole au point K. Cela fait, on nommera les données BE, g ; AE, e ; LK, r ; & on prendra sur l'Asymptote AQ la partie $AD = \frac{pr}{2a} - \frac{1}{2}q = \mp d$ pour abreger, & on tirera $DC = \frac{an + er \mp dg}{e}$ parallele à AE, en observant de prendre ou mener ces lignes du côté de PM lorsque leurs valeurs sont positives & du côté opposé lorsqu'elles sont negatives. On décrira enfin du centre C, & du rayon CK, un cercle qui coupera les Hyperboles opposées en des points M, d'où ayant mené des droites MP paralleles à l'Asymptote AQ ; les parties AP de l'autre Asymptote seront les racines de l'égalité proposée $x^3 - nxx + apx - aaq = 0$.

Car prolongeant les droites MP, KH, jusqu'à ce qu'elles rencontrent la ligne DC aussi prolongée, s'il est necessaire aux points G, F ; on aura (à cause des triangles rectangles CFK, CGM) ces deux égalités $\overline{GM}^2 + \overline{CG}^2 = \overline{CM}^2$, & $\overline{FK}^2 + \overline{CF}^2 = \overline{CK}^2$: & par consequent $\overline{GM}^2 + \overline{CG}^2 = \overline{FK}^2 + \overline{CF}^2$, puisque les lignes CM, CK, sont rayons d'un même cercle. Or par la construction (je suppose ici pour éviter l'embarras des signes $+$ & $-$, que $\frac{pr}{2a} - \frac{1}{2}q = \mp d$, c'est à dire, que cette valeur est positive) GM ou $PM + PG = y + \frac{g}{2a}x + d$, CG ou $DG - DC = \frac{ex}{2a} - \frac{an - er - dg}{e}$, FK ou $KH + HF = q + \frac{g}{2a}r + d$, CF ou $CD - DF = \frac{an + er + dg}{e} - \frac{er}{2a}$. C'est pourquoi mettant à la place de ces lignes leurs valeurs analytiques dans l'égalité precedente $\overline{GM}^2 + \overline{CG}^2 = \overline{FK}^2 + \overline{CF}^2$ on en formera d'abord celle-ci $yy + \frac{g}{a}xy + 2dy + \frac{gg + ee}{4aa}xx$

$-nx-rx=qq+\frac{p}{a}rq+2dq+\frac{gg+ee}{4aa}rr-nr-rr$,
en s'épargnant la peine d'écrire de part & d'autre les quarrés de d & de $\frac{an+ar+dg}{e}$ qui se détruisent mutuellement. Si l'on considere à present qu'à cause de l'Hyperbole, le rectangle $xy=rq$, & qu'à cause du triangle rectangle AEB le quarré $4aa=gg+ee$, on changera l'équation precedente en celle-ci $yy+2dy+xx-nx-rx=qq+2dq-nr$, dans laquelle mettant d'abord à la place de $2d$ sa valeur $\frac{pr}{a}-q$, & ensuite à la place de y & yy leurs valeurs $\frac{aa}{x}$ & $\frac{a^4}{xx}$, & ordonnant l'égalité il vient

$$x^4-nx^3-apxx-aaqx+a^4=0,$$
$$-r\quad+nr\quad+apr$$

qui étant divisé par $x-r$, donne enfin $x^3-nxx-apx-aaq=0$, qu'il falloit construire.

Pour rendre cette construction generale il faut observer, 1°. De prendre la partie AL sur l'Asymptote AQ du côté opposé à PM lorsqu'il y a $+aaq$ dans l'égalité donnée; & de changer de signes les termes où q & r se rencontrent dans les valeurs de AD, DC, 2°. De changer de signes le terme où p se rencontre dans la valeur de AD lorsqu'il y a $+apx$ dans l'égalité donnée, & de l'effacer lorsque ce terme y manque: il faut faire la même chose à l'égard du terme où n se rencontre dans la valeur de DC, lorsqu'il y a $+nxx$. 3°. De changer de signe le terme où g se rencontre dans la valeur de DC, lorsque l'angle fait par les Asymptotes est obtus, & de l'effacer lorsqu'il est droit, en observant alors que $e=2a$.

REMARQUE.

404. L'ALGEBRE nous fournit des moyens faciles pour transformer toute égalité du quatrième degré, en une autre du même degré dont les signes des termes soient alternatifs. Or comme alors son dernier terme

aura toûjours le ſigne +, il eſt viſible qu'en ſe ſervant de cette preparation lorſque le dernier terme de l'égalité qu'on veut conſtruire a le ſigne —, on rend la methode du Problême generale pour toutes ſortes d'égalités du quatriéme degré. Mais parce que toutes les racines réelles d'une égalité, ſont vraies, lorſque les ſignes de ſes termes ſont alternatifs ; il s'enſuit qu'on n'a beſoin alors que de l'Hyperbole donnée, puiſque ſon oppoſée qui ne ſert que pour les racines fauſſes devient inutile.

PROPOSITION VII.

Problême.

405. SOIT *propoſée à conſtruire l'égalité du ſixiéme degré* $x^6 - bx^5 + acx^4 + aadx^3 + a^3exx - a^4fx + a^5g = o$, *ou* $x^6 - bx^5 + cx^4 + dx^3 + exx - fx + g = o$ *(en ſousentendant la ligne* a *qui rend le nombre des dimenſions égal dans chaque terme, & que l'on regarde comme l'unité)* ; *par le moyen d'un cercle, & d'un lieu du troiſiéme degré.*

Je prends pour le lieu du troiſiéme degré $x^3 - mxx - nx + = q - pxy$, dans lequel les quantités m, n, p, q, que l'on regarde comme données, ſe doivent déterminer d'une maniere convenable pour ſatisfaire au Problême ; ce que je fais en cette ſorte :

en quarrant chaque membre, j'ai

$$x^6 - 2mx^4 + mmx^4 + 2mnx^3 + nnxx - 2nqx + qq = ppxxyy.$$
$$\quad -2n \quad +2q \quad -2mq$$

& comparant les termes $-2mx^4$, $-2nqx$, $+qq$ avec leurs correſpondans dans la propoſée $-bx^5$, $-fx$, $+g$, je trouve $m = \frac{1}{2}b$, $q = \sqrt{g}$, $n = \frac{f}{2\sqrt{g}}$; & par conſequent $x^6 - 2mx^5 - 2nqx + qq = x^6 - bx^5 - fx + g$. Si l'on met à preſent à la place de $x^6 - 2mx^5 - 2nqx + qq$ ſa valeur $ppxxyy - mmx^4$ &c. trouvée par le moyen de l'équation precedente, & à la place de $x^6 - bx^5 - fx + g$ ſa valeur $-cx^4 - dx^3$ &c. trouvée par le moyen de l'égalité donnée, & qu'ayant diviſé par xx, on tranſ-

pose toutes les quantités du même côté, on formera cette équation

$$pp\,yy - mm\,xx - 2mn\,x - nn = o,$$
$$+2n \quad -2q \quad +2mq$$
$$+c \quad +d \quad +e$$

* *Art.* 328. & 329. dont le lieu sera * un cercle si la quantité $c + 2n - mm$ (qui multiplie le quarré xx) est positive, & qu'on prenne $pp = c + \frac{f}{\sqrt{g}} - \frac{1}{4}bb$; car divisant par pp, & faisant pour abreger $2r = \frac{2mn+2q-d}{pp}$ & $ss = \frac{2mq+s-nn}{pp}$ ou $\frac{nn-2mq-e}{pp}$, on aura $yy + xx - 2rx \mp ss = o$: sçavoir $+ss$ lorsque $2mq + e$ surpasse nn; & $-ss$, lorsqu'il est moindre.

Pour construire la ligne courbe qui est le lieu de la premiere équation $x^3 - xx - nx + q = -pxy$, je suppose à l'ordinaire deux lignes droites inconnuës & indéterminées AP (x), PM (y) qui fassent entr'elles un angle droit APM; & je tire par l'origine A des x, une ligne droite indéfinie AQ parallele à PM, sur laquelle ayant pris du côté de PM la partie $AG = \frac{n}{p}$, & du côté opposé la partie $GB = \frac{q}{mp}$, je mene du côté de PM la droite $BC = m$ perpendiculaire à AQ. Cela fait, je décris sur un plan separé une Parabole MEM qui ait pour parametre de son axe la ligne $p = \sqrt{c + 2n - mm}$, & ayant placé ce plan sur celui-ci en sorte que l'axe de la Parabole se confonde avec la ligne AQ & que la Parabole s'étende vers le côté opposé à PM, je prends sur cet axe depuis son origine E vers le dedans de la Parabole la partie $EF = BG = \frac{q}{mp}$. Je me sers enfin d'une longue regle indéfinie CF mobile autour du point fixe C, & qui passe toûjours par le point F, & la faisant tourner autour du point C, en sorte qu'elle fasse glisser la partie EF de l'axe de la Parabole le long de la ligne AQ. Je dis que les deux intersections continuelles M, M, de cette regle avec la Parabole MEM décriront dans ce mouvement deux lignes courbes qui seront le lieu

FIG. 224.

qu'on

qu'on demande. Car par la conſtruction AB ou $AG - GB = \frac{n}{p} - \frac{q}{mp}$, & par la proprieté de la Parabole $EQ = \frac{xx}{p}$ puiſque AP ou $MQ = x$. Or les triangles ſemblables FQM, MDC, donnent FQ ou $EQ - EF \left(\frac{xx}{p} - \frac{q}{mp}\right) . QM\,(x) :: DM$ ou $PM - AB\left(y + \frac{q}{mp} - \frac{n}{q}\right) . CD\,(m - x)$. Donc en multipliant les extrêmes & les moyens, on aura $x^3 - mxx - nx + q = -pxy$. Et ſi l'on prend ſucceſſivement les points M dans les trois angles qui ſuivent celui-ci, on trouvera toûjours la même équation, en obſervant de faire $AP = -x$ & $PM = -y$ lorſque les points P & M tombent du côté oppoſé à celui-ci : de ſorte que ces deux lignes courbes, qu'on peut appeller *conchoïdes paraboſiques*, ſeront le lieu complet de toutes les valeurs tant vraies que fauſſes de l'inconnuë y, qui répondent à toutes les valeurs tant vraies que fauſſes de l'autre inconnuë x, dans l'égalité $x^3 - mxx - nx + q = -pxy$.

Pour conſtruire le cercle qui eſt le lieu de la ſeconde équation $yy + xx - 2rx \mp ss = o$, il n'y a qu'à prendre ſur la droite indéfinie AP la partie $AH = r$ du côté de PM lorſque la valeur de r eſt poſitive, & du côté oppoſé lorſqu'elle eſt negative ; enſuite du centre H & du rayon $HM = \sqrt{rr \mp ss}$, ſçavoir $-ss$, lorſqu'il y a $+ss$ dans l'équation, & $+ss$ lorſque c'eſt $-ss$, décrire un cercle ; car à cauſe du triangle rectangle HPM, on aura toûjours $\overline{HM}^2 = \overline{HP}^2 + \overline{PM}^2$, c'eſt à dire en mettant les valeurs analytiques, & tranſpoſant tous les termes d'un côté $yy + xx - 2rx \mp ss = o$.

Je dis maintenant que ſi des points M où ce cercle rencontre les conchoïdes paraboliques on mene des perpendiculaires MQ ſur la droite indéfinie AQ ; ces lignes ſeront les racines de l'égalité propoſée : ſçavoir celles qui tombent à droit, les vraies ; & celles qui tombent à gauche, les fauſſes. Car menant des paralleles MP à AQ, on trouve par la proprieté des conchoïdes cette équation

$x^3 - mxx - nx + q = -pxy$, c'eſt à dire, en quarrant chaque membre, $ppxxyy = -x^4 - 2mx^3$ &c; & par la propriété du cercle, cette autre $yy + xx - 2rx \mp ss = o$, laquelle étant multipliée par $ppxx$ donne $ppxxyy = -ppx^4 + 2pprx^3 \mp ppssxx$. Et comparant enſemble ces deux valeurs de $ppxxyy$, on formera une égalité dans laquelle ſi l'on met à la place de $2r, ss, pp, m, n, q$, leurs valeurs, on retrouvera l'égalité propoſée $x^4 - bx^3$ &c.

S'il y avoit dans l'égalité propoſée $-dx^3$ au lieu de $+dx^3$, il eſt viſible qu'en prenant alors $2r = \frac{2mn+2q+d}{pp}$, le reſte de la conſtruction ne changeroit point, puiſque d ne ſe rencontre que dans la valeur de r. Et comme alors tous les ſignes des termes de l'égalité propoſée ſont alternatifs; c'eſt une maxime reçûë en Algebre que toutes ſes racines réelles ſeront vraies; c'eſt à dire, que ſi cette égalité a deux racines réelles & quatre imaginaires, les deux réelles ſeront vraies; ſi elle en a quatre réelles & deux imaginaires, les quatre ſeront vraies; & enfin ſi toutes les ſix ſont réelles, elles ſeront toutes vraies. D'où l'on voit qu'on n'a beſoin alors que de la conchoïde qui eſt décrite par la moitié de la Parabole qui tombe du côté du point fixe C, puiſque l'autre ne ſert que pour les racines fauſſes.

S'il arrivoit que la valeur du rayon du cercle fût nulle ou imaginaire, ou enfin ſi petite qu'il ne touchât, ni ne coupât les deux conchoïdes en aucun point; ce ſeroit une marque infaillible que toutes les racines de l'égalité ſeroient imaginaires. S'il les coupoit en ſix points, toutes les racines ſeroient réelles. Et enfin s'il ne les coupoit qu'en quatre ou en deux, il n'y auroit que quatre ou deux racines réelles, & les autres ſeroient imaginaires. Il faut toûjours prendre garde que ſi le cercle touchoit l'une des conchoïdes en quelque point, on doit regarder ce point comme s'il réüniſſoit deux points infiniment proches, en ſorte que l'égalité propoſée auroit deux racines égales à la perpendiculaire menée de ce point ſur BE.

REMARQUE I.

406. IL ſuit de la deſcription des deux conchoïdes paraboliques, 1°. Qu'elles ont pour Aſymptote commune la droite BE infiniment prolongée de part & d'autre. 2°. Qu'une des conchoïdes paſſe par le point fixe C, & qu'alors la regle CF la touchera en ce point; puiſque le point M ſe reüniſſant au point C, la regle paſſe par deux points infiniment proches de cette ligne courbe. 3°. Que lorſque le point F tombe ſur B, la regle CF qui décrit par les interſections M, M, avec la Parabole les conchoïdes, tombe ſur CB, & qu'ainſi la ligne MFM devient la double ordonnée qui part du point F: c'eſt à dire que la ligne CB rencontre les conchoïdes en deux points K, L, tels que BK & BL ſont égales chacunes à l'ordonnée à l'axe de la Parabole qui part du point F. D'où il eſt clair que ſi BC étoit égale à cette ordonnée, le point K tomberoit alors ſur le point C, & qu'ainſi la ligne BC qui paſſeroit par deux points infiniment proches K, C de la conchoïde la touchreroit en ſe réüniſſant toute entiere dans le ſeul point C.

Il n'eſt pas neceſſaire de ſe ſervir de la Parabole MEM pour trouver les points des conchoïdes; car ayant pris ſur BE la partie BO égale au parametre de la Parabole, & décrit d'un diametre quelconque OR plus grand que OB un cercle qui coupe BC aux points D, D; on prendra ſur ce diametre la partie RS égale à EF, & on tirera par le point fixe C les deux droites CM, CM, paralleles à DS, DS, qui rencontreront les paralleles DM, DM, à EB en des points M, M, qui ſeront aux deux conchoïdes. Car ayant prolongé CM juſqu'à ce qu'elle rencontre l'Aſymptote BE au point F; & mené MQ parallele à BC; il eſt clair que les triangles rectangles MQF, DBS, ſeront égaux, & qu'ainſi FQ eſt égale à BS. Or ayant pris RS égale à EF; on aura $EF+FQ$, ou $EQ=RS+SB$ ou RB; & la Parabole EM qui a pour ſommet le point E, & pour FIG. 225.

parametre une ligne égale à BO, paſſera par le point M ; puiſque par la proprieté du cercle le quarré de BD ou MQ, eſt égal au rectangle de BK ou EQ par le parametre de BO ; ce que donne auſſi la proprieté de la Parabole. D'où il ſuit que le point M trouve par cette conſtruction, n'eſt pas different de celui que donneroit l'interſection de la regle CF avec la demie Parabole EM. *Et c'eſt ce qu'il falloit démontrer.*

Si le point D étoit donné, il ne faudroit pour avoir le point R, que mener DR perpendiculaire à OD ; & le reſte de la conſtruction ne changeroit point.

J'avertirai ici en paſſant, 1°. Que ſi l'on prend ſur BC du côté du point C, une partie BD égale à la vraie racine de l'égalité du troiſiéme degré $x^3 - \frac{1}{2}mxx - \frac{1}{2}mnp = o$ (les données $BC = m$, $EF = n$, $BO = p$) ; & qu'on trouve enſuite le point M comme l'on vient d'enſeigner : ce point ſera plus éloigné de la droite BC que tous les autres points de la portion KMC, de ſorte que la tangente qui paſſe par ce point ſera parallele à BC. 2°. Que ſi l'on prend ſur BC prolongée de l'autre côté du point B, une partie BD égale à la vraie racine de l'egalité $x^3 - mnp = o$; le point M de la conchoïde, qui repond au point D, en ſera le point d'inflexion : c'eſt à dire le point où de concave elle devient convexe. Comme ceci dépend des principes que j'ai établis dans mon Livre des Infiniment petits, on doit le ſuppoſer comme vraie, & remetre à en chercher la raiſon après avoir lû ce Livre ou quelque choſe d'équivalent, d'autant plus que cela eſt inutile pour la reſolution des égalités du ſixiéme degré dont il eſt ici queſtion.

REMARQUE II.

407. IL eſt viſible que pour décrire les deux conchoïdes paraboliques, il faut 1°. Que la ligne BC ($\frac{1}{2}b$) ait quelque grandeur, & qu'ainſi l'égalité propoſée doit avoir un ſecond terme. 2°. Que le terme q ne peut être

nul dans l'équation $x^3 - mxx - nx + q = -pxy$, puiſqu'en diviſant par x, elle deviendroit cette autre $xx - mx - n = -py$, dont le lieu eſt une Parabole ; d'où il eſt clair que le dernier terme g ſe doit trouver dans l'égalité propoſée avec le ſigne $+$, puiſque $q = \sqrt{g}$.

De plus ſi le terme fx avoit le ſigne $+$, on lui donneroit le ſigne $-$ en changeant auſſi les ſignes du deuxiéme & du quatriéme terme ; ce qui ne troubleroit point l'égalité, mais changeroit ſeulement les racines fauſſes en vraies & les vraies en fauſſes. Et afin que le lieu de la deuxiéme équation pût être un cercle, il faudroit que $\frac{f}{\sqrt{g}} \mp c$ (ſçavoir $+c$ lorſqu'il y a $+cx^4$, & $-c$ lorſqu'il y a $-cx^4$) ſurpaſſât $\frac{1}{4}bb$. D'où l'on voit que le terme fx manquant, il faut que le terme cx^4 ait le ſigne $+$, & que c ſurpaſſe $\frac{1}{4}bb$; & que ſi le terme cx^4 manque, $\frac{f}{\sqrt{g}}$ doit ſurpaſſer $\frac{1}{4}bb$.

Il eſt donc évident que ce ſont là les conditions que doit avoir neceſſairement l'égalité propoſée du ſixiéme degré, afin qu'on la puiſſe conſtruire immediatement par le moyen des conchoïdes paraboliques, & du cercle, comme l'on vient de faire la precedente.

REMARQUE III.

408. LORSQUE l'égalité donnée n'eſt que du cinquiéme degré, on peut ſouvent en l'élevant au ſixiéme, lui donner en même temps toutes les conditions neceſſaires pour être conſtruite immediatement. En voici quelques exemples.

Soit 1°. $x^5 - a^4 b = o$, où l'on ſuppoſe que a ſurpaſſe b. Je multiplie cette égalité par $x - b$, pour avoir celle du ſixiéme $x^6 - bx^5 - a^4 bx + a^4 bb = o$, qui a toutes les conditions requiſes dans la remarque precedente.

Soit 2°. $x^5 - 5aax^3 + 5a^4 x - a^4 b = o$, dans laquelle a ſurpaſſe b. Je multiplie cette égalité par $x - b$, & j'ai $x^6 - bx^5 - 5aax^4 + 5aabx^3 + 5a^4 xx - 6a^4 bx + a^4 bb = o$, qui a toutes les conditions neceſſaires.

Soit 3°. $x^7 - ax^6 - 4aax^5 + 3a^3xx + 3a^4x - a^5 = 0$. Je multiplie cette égalité par $x - 4a$; ce qui me donne $x^8 - 5ax^7 + 19a^3x^6 - 9aaxx - 13a^5x + 4a^6 = 0$, qui eſt une égalité du ſixiéme degré, dans laquelle toutes les conditions neceſſaires ſe rencontrent.

Il eſt bon d'avertir que la premiere égalité $x^3 - a^2b = 0$, ſert à trouver quatre moyennes proportionnelles entre les deux extrêmes A, B ; que la ſeconde $x^5 - 5aax^3$ &c. ſert à diviſer un angle donné en cinq parties égales ; & enfin que la troiſiéme $x^9 - ax^6$ &c. ſert à inſcrire dans un cercle donné un Polygone regulier de onze côtés : & c'eſt ce qu'on verra dans les articles du Livre ſuivant. Je vais donner la conſtruction de la premiere de ces égalités, afin qu'on la puiſſe comparer avec celle qu'on trouve à la fin du troiſiéme Livre de la Geometrie de M. Deſcartes.

FIG. 226. Ayant décrit une Parabole ME qui ait pour le parametre de ſon axe une ligne $p = \sqrt{aa - \frac{1}{4}bb}$, & pris du côté que l'on voit dans la figure les lignes $AG = \frac{aa}{2p}$, GB ou $EF = 4AG$, $BC = \frac{1}{2}b$, $AH = \frac{8aab}{4pp}$, & une ligne $s = \frac{a}{2p}\sqrt{4bb - aa}$, ou $\frac{a}{2p}\sqrt{aa - 4bb}$; on décrira d'abord une conchoïde parabolique COM (comme l'on a enſeigné dans l'article 404.) à l'aide de la Parabole ME, & d'une longue regle CF qui tourne librement autour du point fixe C, & qui paſſe toûjours par le point F, pendant que la partie EF de l'axe de la Parabole gliſſe le long de la ligne AQ ; & enſuite un cercle du centre H & du rayon $HM = \sqrt{AH^2 \mp ss}$, ſçavoir $+ss$ lorſque $4bb$ ſurpaſſe aa, & $-ss$ lorſqu'il eſt moindre. Je dis que ſi des points O, M, où ce cercle rencontre la conchoïde, on mene des perpendiculaires OR, MP, ſur AP ; les parties AR, AP, ſeront les racines de l'égalité $x^8 - bx^5 - a^4bx + a^4bb = 0$. Cela ſe prouve comme dans l'article 404.

On peut s'épargner la peine de trouver une ligne $s = \frac{a}{2p}\sqrt{4bb - aa}$, ou $\frac{a}{2p}\sqrt{aa - 4bb}$; si l'on fait attention que le cercle décrit du centre M, doit couper la conchoïde COM en un point O, tel qu'ayant mené OR perpendiculaire sur AP, on a la partie $AR = b$; puisque l'une des racines de cette égalité est $x = b$. C'est pourquoi ayant pris sur AP la partie $AR = b$, & tiré RO perpendiculaire à AP & qui rencontre en O la conchoïde COM; il n'y a qu'à décrire du centre H & du rayon HO un cercle. Car il la coupera en un autre point M, tel, qu'ayant mené MP perpendiculaire sur AP, la ligne AP sera la plus grande des quatre moyennes proportionnelles qu'on demande. Comme le cercle décrit du centre H ne coupe la conchoïde qui passe par le point C qu'en deux points O, M, & ne rencontre point l'autre; il s'ensuit que l'égalité proposée $x^4 - bx^3$ &c. n'a que deux racines vraies AR, AP, & les quatre autres imaginaires.

REMARQUE. IV.

409. LORSQUE l'égalité donnée du sixiéme degré n'a point les conditions necessaires pour être construite immediatement par la methode que l'on vient d'expliquer, ou bien qu'étant du cinquiéme degré, la remarque precedente se trouve inutile, on pourra se servir de la preparation qu'enseigne M. Descartes dans le troisiéme Livre de sa Geometrie. On y trouve la maniere de transformer toute égalité du cinquiéme ou du sixiéme degré en une autre du sixiéme, dans laquelle tous les termes se rencontrent avec des signes alternatifs, & où la quantité connuë du troisiéme terme surpasse le quarré de la moitié de la quantité connuë du second : ce qui rend la construction du Problême generale pour toutes sortes d'égalités du cinquiéme & du sixiéme degré. Je ne m'arrêterai point ici à expliquer cette preparation, parce qu'elle dépend de l'Algebre pure dont je n'ai point

entrepris de parler, & que d'ailleurs je vais donner dans la propoſition ſuivante une conſtruction generale pour toutes ſortes d'égalités du cinquiéme & du ſixiéme degré, qui ne ſuppoſe point d'autre preparation que celle de faire évanoüir le ſecond terme.

PROPOSITION VIII.

Problême.

410. TROUVER *les racines de l'égalité* $x^6 - bx^4 - cx^3 + dxx - fx + g = o$, *par le moyen d'une premiere Parabole cubique donnée, & d'une Section conique.*

FIG. 227. Soit $aay = x^3$ l'équation dont le lieu eſt la premiere Parabole cubique MAM ($AP = x$, $PM = y$, $AB = a$). Je mets dans l'égalité propoſée à la place de x^6 ſa valeur a^4yy, à la place de x^4 ſa valeur $aaxy$, & à la place de x^3 ſa valeur aay; ce qui la change en cette équation du ſecond degré $yy - \frac{b}{aa}xy - \frac{c}{aa}y + \frac{d}{a^4}xx - \frac{f}{a^4}x + \frac{g}{a^4} = o$, dont le lieu eſt une Ellipſe * lorſque d ſurpaſſe $\frac{1}{4}bb$, c'eſt à dire, lorſque la quantité connuë qui multiplie xx ſurpaſſe le quarré de la moitié de la quantité connuë qui multiplie x^4, comme je le ſuppoſe ici. Et ſi l'on veut que la ligne qui fait l'office de l'unité dans l'égalité propoſée, & qui y eſt ſousentenduë, ſoit égale au parametre a de la Parabole cubique donnée; cette équation ſe changera en celle-ci $yy - \frac{b}{a}xy - cy + \frac{d}{a}xx - fx + ag = o$, dont voici la conſtruction.

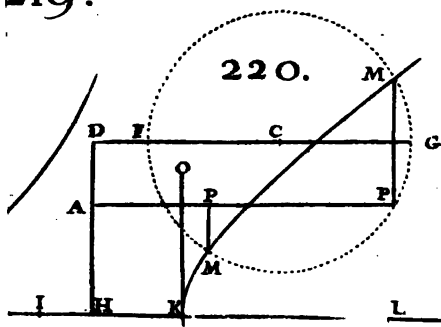
* *Art.* 323.

Ayant pris ſur la droite indéfinie AP la partie $AB = a$, on tirera parallelement à PM & du même côté les droites $BE = \frac{1}{2}b$, $AD = \frac{1}{2}c$: & on menera par le point A la droite AE (e), & par le point D une parallele DG à AE, ſur laquelle on prendra du côté de PM la partie DC (s) $= \frac{2afe + bce}{4ad - bb}$, & de part & d'autre du point C les

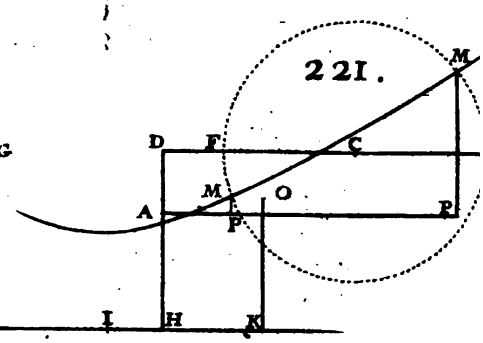
parties

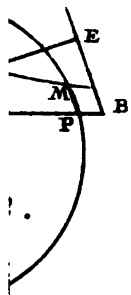
219.

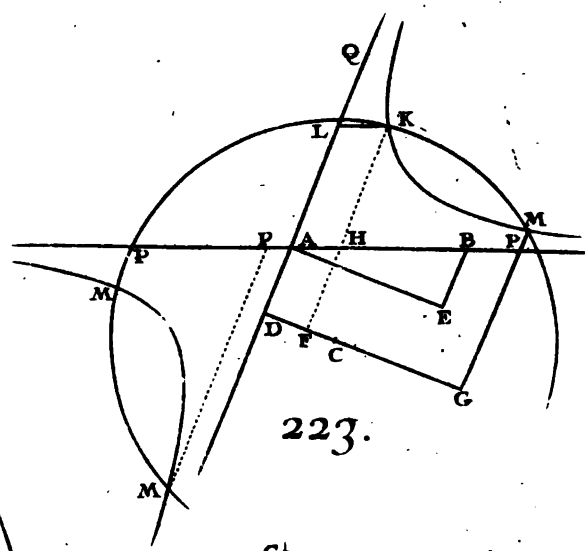
220.



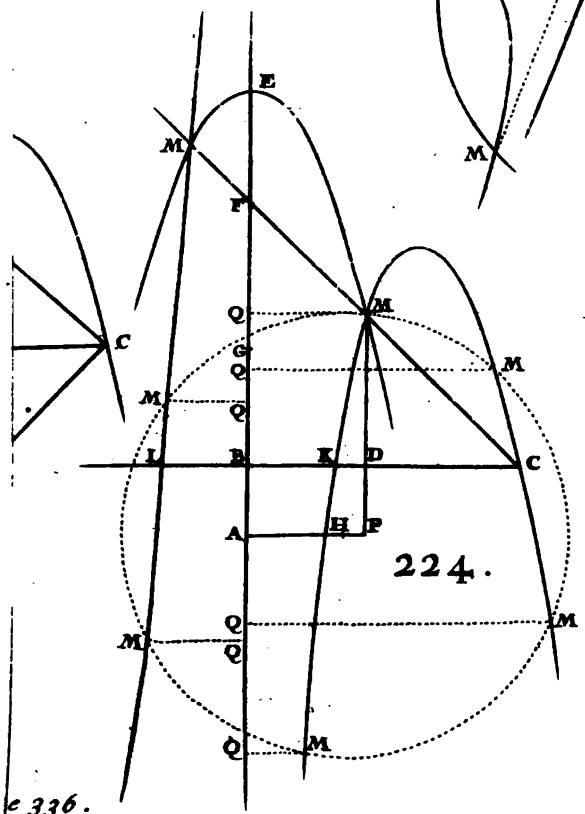
221.



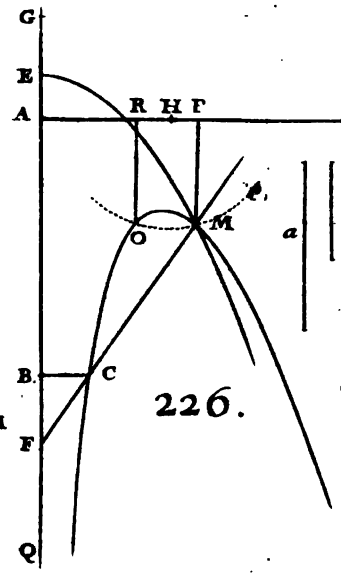




223.



224.



226.

e 336.

parties CK, CL, égales chacune à $t = \sqrt{ss + \frac{cccc - 4agee}{4ad - bb}}$. Cela fait, du diametre LK ($2t$) qui ait pour parametre une ligne $KH = \frac{4adt - bbt}{2ee}$, & pour ordonnées des droites paralleles à PM, on décrira l'Ellipse cherchée.

Maintenant si des points de rencontre de cette Ellipse avec la Parabole cubique donnée, on abaisse des lignes MP qui fassent avec AP l'angle donné ou pris à volonté APM, les parties AP de la droite indéfinie sur laquelle s'étend l'indéterminée x seront les racines cherchées; sçavoir celles qui tombent du côté où l'on a supposé PM en faisant la construction, les vraies; & celles qui tombent du côté opposé, les fausses. Car par la proprieté de la Section conique il vient $yy - \frac{b}{a}xy - cy + \frac{d}{a}xx - fx + gg = o$, & par la proprieté de la Parabole cubique, $y = \frac{x^3}{aa}$; & mettant cette valeur à la place de y & son quarré à la place de yy dans l'équation precedente, on retrouve l'égalité donnée $x^6 - abx^4 - aacx^3$ &c. $= o$.

REMARQUE I.

411. TOUTE égalité du cinquiéme ou du sixiéme degré étant donnée, si l'on en fait évanoüir le second terme, & qu'après l'avoir multipliée par l'inconnuë x lorsqu'elle n'est que du cinquiéme degré, on se serve du parametre a de la Parabole cubique donnée pour reduire sous l'expression ab les quantités connuës qui multiplient x^4, sous l'expression aac celles qui multiplient x^3 &c; il est visible qu'en faisant la substitution comme ci-dessus, on transformera toûjours l'égalité donnée en un lieu du second degré. D'où l'on voit qu'ayant une fois décrit avec exactitude une Parabole cubique qui ait pour parametre une ligne quelconque a, & dont l'angle APM que font les appliquées PM avec le diametre AP, peut être pris à volonté; on pourra toûjours par

ſon moyen, en décrivant de plus une Section conique convenable, reſoudre toutes ſortes d'égalités du cinquiéme & du ſixiéme degré.

REMARQUE II.

412. LORSQU'APRE'S avoir fait évanoüir le ſecond terme d'une égalité donnée du cinquiéme & du ſixiéme degré, & l'avoir multipliée par l'incommuë x ſi elle n'eſt que du cinquiéme; la quantité connuë qui multiplie le quarré xx eſt poſitive, & ſurpaſſe le quarré de la moitié de celle qui multiplie x^6: on arrivera toûjours en faiſant la ſubſtitution par le moyen de $aay = x^5$, à une équation du ſecond degré dont le lieu eſt une Ellipſe, comme l'on a vû dans ce Problême. Or l'on pourra toûjours faire en ſorte que cette Ellipſe devienne un cercle, mais alors la Parabole cubique ne peut plus être donnée. Voici comment il s'y faudra prendre.

* *Art.* 378. Ayant trouvé une ligne a * dont le quarré de quarré a^4 ſoit égal à la quantité connuë qui multiplie xx, on ſe ſervira de cette ligne a pour reduire ſous l'expreſſion ab toutes les quantités connuës qui multiplient x^4, ſous l'expreſſion aac celles qui multiplient x^3 &c; ce qui reduira l'égalité donnée ſous cette forme $x^5 \pm abx^4 \pm aacx^3 + a^4xx \pm a^4fx \pm a^5g = o$. Et mettant a^4yy, $aaxy$ & aay à la place de x^6, x^4 & x^3, on trouvera cette équation du ſecond degré $yy \pm \frac{b}{a}xy \pm cy + xx \pm fx \pm ag$ $= o$, dont le lieu ſera * un cercle, ſi l'on fait en ſorte que l'angle AEB ſoit droit; ce qui eſt facile en cette maniere.

* *Art.* 327. & 329.

FIG. 228. Ayant pris ſur la droite indéfinie AP la partie $AB = a$, on décrira de cette ligne comme diametre un demi cercle AEB, du côté où l'on ſuppoſe que PM doit tomber, lorſqu'il y a $- \frac{b}{a}xy$, & du côté oppoſé lorſqu'il y a $+ \frac{b}{a}xy$. On portera ſur la demi circonfe-

rence de B en E, une ligne $BE = \frac{1}{2}b$; & ayant tiré AE (e), la ligne PM doit être parallele à BE, & on achevera le reſte de la conſtruction comme pour l'Ellipſe, qui deviendra alors un cercle ; puiſque l'angle CGM ſera droit, & qu'à cauſe du triangle rectangle AEB il vient $ee = aa - \frac{1}{4}bb$, qui doit exprimer la raiſon du diametre LK à ſon parametre. La figure qui eſt ici à côté repreſente la conſtruction de l'équation $yy - \frac{b}{a}xy - cy + xx - fx - ag = o$, qui n'eſt differente de celle du Problême qu'en ce que $d = a$.

Maintenant ayant pris ſur la ligne AB autant de parties AP, AP, &c. qu'on voudra, & mené des paralleles PM, PM, &c. à BE ; on prendra chaque PM égale à la quatriéme proportionnelle à ſa correſpondante AP & la donnée AB. Et faiſant paſſer une ligne courbe MAM par tous les points M ainſi trouvés, il eſt évident qu'elle ſera le lieu de l'équation $x^3 = aay$, & par conſequent la premiere Parabole cubique qui par ſes points d'interſection M, M, avec le cercle, ſervira à découvrir les racines AP, AP, de l'égalité propoſée.

REMARQUE III.

413. COMME l'on a parlé ſouvent dans ce Livre des Paraboles de tous les degrés, & qu'on vient même d'employer la premiere Parabole cubique pour reſoudre les égalités du cinquiéme & du ſixiéme degré ; je crois qu'il n'eſt pas hors de propos d'examiner les differentes figures qu'elles peuvent avoir. Soient donc données de poſition deux lignes droites indéfinies BC, DE, qui s'entrecoupent au point A, & ſoit dans l'angle BAD une Parabole AM de tel degré qu'on voudra, dont la nature eſt telle qu'ayant mené d'un de ſes points quelconques M une parallele MP à DE, qui rencontre BC au point P, & ayant nommé les indéterminées AP, x ; PM, y ; la donnée AB, 1 ; on ait toûjours $x^m = y^n$ (les lettres m & n marquent les expoſans des puiſſances de FIG. 229.

x & y qui peuvent être tels nombres positifs entiers qu'on voudra ; & l'on suppose seulement que m surpasse n). Il est évident 1°. Que $AP\ (x)$ étant nulle ou zero, $PM\ (y)$ l'est aussi, & que plus $AP\ (x)$ croît, plus aussi $PM\ (y)$ augmente ; & cela à l'infini. 2°. Que la soutangente PT* $\left(\frac{n}{m}x\right)$ est toûjours moindre que $AP\ (x)$, puisque l'on suppose ici que n soit moindre que m. D'où il suit que la Parabole AM de tel degré qu'elle puisse être, passera toûjours par le point A ; qu'elle s'éloignera de plus en plus à l'infini de la droite BC que l'on regarde comme son diametre ; & enfin qu'elle tournera sa convexité du côté de ce diametre. Mais comme la ligne courbe AM qui tombe dans l'angle DAB, n'est qu'une portion de cette Parabole, il reste à examiner dans lequel des angles DAC, CAE, EAB, elle doit se continuer ; & pour cela il faut distinguer trois differens cas.

* *Art.* 237.

Premier cas. Lorsque l'exposant m de la puissance de x est un nombre pair, & l'exposant n de la puissance de y un nombre impair. La racine m de x^m sera $\overline{-}+x$, & la racine n de y^n sera seulement $+y$; car soit par exemple, $m=4$, & $n=3$, il est clair que le quarré de quarré où la puissance quatriéme de $\overline{-}+x$ est toûjours x^4, & qu'il n'en est pas de même du cube de $\overline{-}+y$; puisque le cube de $+y$ est y^3, & celui de $-y$ est $-y^3$. De là il est évident que $AP\ (x)$ peut être positive & negative, & $PM\ (y)$ toûjours positive ; d'où l'on voit que la Parabole AM doit se continuer dans l'angle DAC, qui est à côté de l'angle BAD, en sorte que si par un point quelconque K de la ligne AD, on tire une parallele à BC elle rencontrera la Parabole MAM en deux points M, M, qui seront également éloignés du point K. Telle est la Parabole ordinaire qui est le lieu de l'équation $xx=ay$, ou $xx=y$ en faisant le parametre $a=1$.

FIG. 229.

Second cas. Lorsque les exposans m & n sont des nombres impairs. La racine m de x^m sera seulement $+x$, & de même la racine n sera $+y$; mais parce que l'équation

$-x^m = -y^n$ eſt la même que $x^m = y^n$, & que la racine m de $-x^m$ eſt $-x$, & la racine n de $-y^n$ eſt $-y$; il s'enſuit que AP (x) peut être poſitive & negative de même que PM (y), en obſervant que lorſque AP eſt poſitive, PM l'eſt auſſi, & au contraire. D'où l'on voit que la Parabole AM doit alors ſe continuer dans l'angle CAE oppoſé au ſommet à l'angle BAD, dans une poſition toute ſemblable, mais renverſée; en ſorte que prenant AP égale à AP, & menant PM qui faſſe avec AP l'angle APM égale à l'angle APM; cette ligne PM rencontre la portion AM qui tombe dans l'angle CAE, en un point M tel que PM eſt égal à PM. Telle eſt la premiere Parabole cubique $x^3 = aay$, ou $x^3 = y$ en faiſant $a = 1$. FIG. 230.

Troiſieme cas. Lorſque l'expoſant m de la puiſſance de x eſt un nombre impair, & l'expoſant n de la puiſſance de y un nombre pair. La racine m de x^m ſera toûjours $+x$, & la racine n de y^n ſera $\mp y$; car ſoit par exemple, AM une ſeconde Parabole cubique qui eſt le lieu de l'équation $x^3 = ayy$, ou $x^3 = yy$, il eſt clair que la racine cubique de x^3 eſt ſeulement $+x$, & que celle de yy eſt $\mp y$. D'où il ſuit que la Parabole AM doit ſe continuer dans l'angle BAE qui eſt à côté de l'angle BAD; en ſorte que ſi l'on mene par un point quelconque P de la ligne AB une parallele à DE, elle rencontrera la Parabole entiere MAM en deux points M, M, également éloignés du point P. FIG. 231.

Or l'équation generale $x^m = y^n$ appartient toûjours à l'un de ces trois cas; car ſi m & n étoient deux nombres pairs, on extrayeroit de part & d'autre la racine quarrée autant de fois qu'il ſeroit poſſible; ce qui la reduiroit à une équation dont l'un des expoſans ſeroit neceſſairement impair. Et l'on peut toûjours ſuppoſer que m ſurpaſſe n; car s'il étoit moindre, & qu'on eût par exemple, $aax = y^3$, on trouveroit en rapportant les points de la Parabole AM à ceux de la ligne DE, & nommant alors AK, x; KM, y; cette autre équation $x^3 = aay$ FIG. 232.

qui exprimeroit auſſi la nature de la même Parabole AM, & dans laquelle l'expoſant de la puiſſance de x eſt plus grand que celui de la puiſſance de y; de ſorte qu'on pourroit faire alors le même raiſonnement par rapport à la ligne DE, qu'on vient de faire par rapport à la ligne BC. De là il eſt évident que toutes les Paraboles de tel degré qu'elles puiſſent être, auront toûjours l'une des trois figures precedentes.

PROPOSITION IX.

Problême.

414. SOIT *propoſée à conſtruire l'égalité du huitiéme degré* $x^8 - bx^7 + cx^6 - dx^5 + ex^4 - fx^3 + gxx - hx + l = o$, *dans laquelle aucun terme ne manque, par le moyen de deux lieux geometriques; l'un du ſecond degré, & l'autre du quatriéme.*

Ayant pris $xx = ay$ pour le lieu du ſecond degré, on ſubſtituëra à la place de x^8, x^7, x^6, x^5, x^4, x^3, & xx, leurs valeurs a^4y^4, a^3y^3x, a^3y^3, $aayyx$, $aayy$, ayx, ay, & en prenant la droite donnée a pour l'unité, on aura cette autre équation $y^4 - \frac{b}{a}xy^3 + cy^3 - dxyy + aeyy - afxy + aagy - aahx + a^3l = o$ dont le lieu eſt du quatriéme degré, & des plus ſimples; puiſque l'une des inconnuës x n'étant qu'au premier degré, on pourra en déterminer tous les points en ne ſe ſervant que de cercles & de lignes droites.

Si l'on conſtruit à preſent la Parabole qui eſt le lieu de la premiere équation $xx = ay$, & qu'ayant pris pour y autant de differentes grandeurs que l'on voudra; on détermine les valeurs de x qui leur répondent dans la ſeconde équation; le lieu qui paſſera par les extrêmités de toutes les y, & qui ſera par conſequent celui de la ſeconde équation, déterminera par le moyen des points où il rencontre la Parabole, les valeurs cherchées des racines de l'équation donnée. Ce qui eſt viſible; puiſque mettant dans cette ſeconde équation pour y ſa valeur

$\frac{xx}{a}$, & pour les puiſſances de y les puiſſances de cette valeur, on trouve l'équation donnée $x^8 - bx^7$ &c $= o$.

COROLLAIRE I.

415. COMME l'unité a eſt arbitraire, on peut ſuppoſer qu'elle eſt donnée, & qu'ainſi la Parabole qui eſt le lieu de la premiere équation $xx = ay$ eſt donnée. Or il eſt évident qu'on pourra toûjours par le moyen de cette équation transformer toute égalité du ſeptiéme ou huitiéme degré, en une autre équation du quatriéme, dans laquelle l'inconnuë x ne ſe trouve qu'au premier degré. D'où il ſuit que toute égalité du ſeptiéme ou du huitiéme degré, dans laquelle ou tous les termes ſe rencontrent ou ſeulement une partie, ſe pourra toûjours conſtruire par le moyen d'une Parabole donnée & d'un lieu du quatriéme degré, dans lequel l'une des inconnuës ne ſe trouvera qu'au premier; & cela ſans autre preparation que de prendre pour l'unité le parametre a de la Parabole donnée, afin de reduire ſous l'expreſſion ac les quantités connuës qui multiplient x^6, ſous l'expreſſion aad celles qui multiplient x^5, &c.

COROLLAIRE II.

416. ON prouvera de même que toute égalité du neuviéme ou du dixiéme degré ſe pourra toûjours conſtruire par le moyen d'une Parabole donnée, & d'un lieu du cinquiéme degré dans lequel l'une des inconnuës ne ſe trouvera qu'au premier degré : que les égalités de l'onziéme & du douziéme degré ſe conſtruiront encore par le moyen d'une Parabole donnée, & d'un lieu du ſixiéme degré; & ainſi de ſuite pour les autres à l'infini.

PROPOSITION X.

Problême.

417. CONSTRUIRE *l'égalité du neuviéme degré* $x^9 - bx^7 + cx^5$ &c $= o$, *dans laquelle tous les termes se rencontrent excepté le second ; par le moyen de deux lieux geometriques chacun du troiſiéme degré.*

Ayant pris $x^3 = aay$ pour l'un des lieux du troiſiéme degré, on ſubſtituëra à la place de x^9, x^7, x^6, &c. leurs valeurs a^6y^3, a^4xyy, a^4yy, &c, & l'on aura pour l'autre lieu du troiſiéme degré, en prenant a pour l'unité ;

$y^3 - \frac{b}{a}xyy + cyy$ &c $= o$ dans lequel l'inconnuë x ne peut monter qu'au ſecond degré, puiſqu'on ſuppoſe que par tout où il y a x^3 dans la propoſée, on ſubſtituë à ſa place aay.

Or il eſt viſible que ſi l'on conſtruit ce lieu avec la Parabole cubique, qui eſt le lieu de l'autre équation $x^3 = aay$; leurs points de rencontre détermineront les racines de l'égalité donnée.

COROLLAIRE.

418. TOUTE égalité du ſixiéme, du huitiéme ou du neuviéme degré étant donnée, il eſt viſible qu'après avoir fait évanoüir ſon ſecond terme, & l'avoir multipliée par ſa racine x lorſqu'elle eſt du huitiéme degré, & par ſon quarré xx lorſqu'elle n'eſt que du ſeptiéme, on la transformera toûjours en un lieu du troiſiéme degré en ſe ſervant de l'équation $x^3 = aay$ dont le lieu eſt une Parabole cubique donnée, & faiſant la ſubſtitution comme ci-deſſus : de ſorte que cette maniere eſt générale pour toutes les égalités du ſeptiéme, du huitiéme & du neuviéme degré. On trouvera de même que toute égalité du douziéme degré dont le ſecond terme eſt évanoüi, ſe transformera en un lieu du quatriéme, en ſe ſervant encore de l'équation $x^3 = aay$; comme auſſi celles du

du dixiéme & du onziéme degré en les élevant au douziéme.

Mais ſi l'on propoſe une égalité du ſeiziéme degré dans laquelle tous les termes ſe rencontrent, excepté le deuxiéme, on trouvera qu'en ſe ſervant du lieu du quatriéme degré $x^4 = a^3 y$, on la transformera en un lieu du cinquiéme. On trouvera de même qu'une égalité du vingtiéme degré ſe transformera en un lieu du ſixiéme, en ſe ſervant encore du lieu du quatriéme degré $x^4 = a^3 y$; comme auſſi celles du dix-ſeptiéme, dix huitiéme & dix-neuviéme degré: que les égalités du vingt-cinquiéme degré dans leſquelles tous les termes ſe rencontrent, excepté le deuxiéme, ſe transformeront en un lieu du ſixiéme degré, en ſe ſervant du lieu du cinquiéme $x^5 = a^4 y$; comme auſſi toutes les égalités du vingt-uniéme, vingt-troiſiéme & vingt-quatriéme degré. Et l'on peut continuer cette recherche autant qu'on voudra.

REMARQUE I.

419. IL eſt à propos de remarquer que ſi dans une égalité du ſeiziéme degré non ſeulement le ſecond terme manquoit, mais le troiſiéme & le ſixiéme; le lieu du cinquiéme degré lequel joint avec celui du quatriéme $x^4 = a^3 y$ ſert à conſtruire l'égalité ſe transformeroit en un du quatriéme, & on peut faire des remarques ſemblables ſur les égalités des degrés plus élevés. Mais quoiqu'il ſoit vrai de dire qu'une égalité du ſeiziéme degré dans laquelle il n'y a que le deuxiéme terme qui manque, ne ſe peut transformer qu'en un lieu du cinquiéme, ſi l'on employe à cet effet le lieu du quatriéme $x^4 = a^3 y$ qui n'a que deux termes; on n'en doit pas conclure en general, que les lieux les plus ſimples pour reſoudre une équation complette du ſeiziéme degré, doivent être, l'un du quatriéme & l'autre du cinquiéme. Car au contraire, il me paroît évident que ſi l'on ſe ſert d'un lieu du quatriéme degré compoſé de pluſieurs termes à la

place de $x^4 = a^3 y$ qui n'en a que deux, on pourra choiſir ce lieu en ſorte qu'il ſervira à transformer l'égalité complette du ſeiziéme degré en un autre lieu du quatriéme. En voici la raiſon. Si l'on prend deux lieux du quatriéme degré dans l'un deſquels l'inconnuë x monte au quatriéme degré, & dans l'autre l'inconnuë y, il eſt conſtant par les regles de l'Algebre, qu'en faiſant évanoüir l'inconnuë y par le moyen de ces deux équations, on arrivera à une égalité dans laquelle l'inconnuë x montera au ſeiziéme degré. Or comme deux lieux du quatriéme degré, peuvent avoir enſemble plus de ſeize termes, puiſque chacun en peut avoir quinze differens, il s'enſuit qu'ils peuvent contenir toutes les quantités connuës de l'égalité donnée : ce qui ſuffit pour faire voir la poſſibilité de conſtruire une égalité complette du ſeiziéme degré par deux lignes du quatriéme.

On doit de même penſer que les deux lieux les plus ſimples pour conſtruire une égalité complette du vingtiéme, dix-neuviéme, & dix-ſeptiéme degré, ſeront, l'un du quatriéme, & l'autre du cinquiéme, parce que la reduite de ces deux lieux montera au vingtiéme degré, & qu'ils pourront contenir enſemble plus de termes que la propoſée, & renfermer par conſequent toutes les quantités connuës qui s'y rencontrent. Et ſi l'inconnuë avoit 21, 22, 23, 24, ou 25 dimenſions dans l'égalité propoſée, il faudroit deux lieux de cinq degrés chacun. De là on forme la regle ſuivante, qui ſert à trouver les degrés des deux lieux qui peuvent reſoudre une égalité propoſée, en ſorte qu'ils ſoient les plus ſimples qu'il eſt poſſible.

Il faut extraire la racine quarrée de la plus haute dimenſion de l'inconnuë. Si elle eſt exacte, chacun des deux lieux doit avoir autant de degrés que cette racine contient d'unités ; & ſi elle ne l'eſt pas, ou le reſte eſt égal, ou moindre que la racine, & alors l'un des lieux aura pour degré le nombre de la racine, & l'autre ce même nombre augmenté de l'unité : ou le reſte eſt plus grand que la racine, & alors chacun des deux lieux aura

pour degré le nombre de la racine augmenté de l'unité.

Soit proposé, par exemple, de trouver les deux lieux les plus simples, qui peuvent resoudre une égalité, dont la plus haute dimension de l'inconnuë soit de trente-sept degrés. Comme la racine quarrée de 37 est 6, & que le reste 1 est moindre que ce nombre 6, il faudra que l'un des lieux soit du sixiéme degré, & l'autre du septiéme; on trouvera la même chose, si la plus haute dimension est 38, 39, 40, 41 & 42. Mais si elle étoit 43, comme la racine quarrée de 43 est 6, & que le reste 7 est plus grand que cette racine, il faudroit deux lieux qui fussent chacun du septiéme degré; & il en est de même si la plus haute dimension étoit 44, 45, 46, 47, 48 & 49.

REMARQUE II.

420. IL arrive quelquefois qu'on peut construire une égalité donnée par le moyen d'une seule & même courbe mise en deux differentes positions; & c'est ce qu'on verra clairement dans cet exemple.

Soit proposée à construire l'égalité du neuviéme degré $x^9 + a^3 x - a^4 b = 0$, dans laquelle tous les termes moyens manquent excepté le penultiéme. Je prends l'équation $x^3 = aay$, dont le lieu est une Parabole cubique MAM qui a pour parametre la ligne droite donnée $AB = a$, & pour appliquées des lignes droites PM (y) qui font avec les parties correspondantes AP (x) de son axe ou diametre un angle pris à volonté APM que je suppose ici droit; & en cubant chaque membre, j'ai $x^9 = a^6 y^3$: ce qui change par la substitution l'égalité proposée en cette équation $y^3 = aab - aax$, dont le lieu se construit ainsi.

Soit prise sur AP prolongée du côté de P la partie $AC = b$; & ayant mené par le point C la droite indefinie CK parallele à PM, soit décrite une autre Parabole cubique MCM qui ait pour axe CK, & pour appliquées des droites KM paralleles à AP, & dont le pa- FIG. 233.

rametre $CD=a$. Je dis qu'elle ſera le lieu requis.

Car par la conſtruction MK ou $CP=b-x$, & par la proprieté de la courbe $CK^3=MK*\overline{CD}^2$, c'eſt à dire en termes analytiques $y^3=aab-aax$. Or il eſt évident 1°. Que ſi des points M où cette derniere Parabole cubique MCM rencontre l'autre MAM, on mene des paralleles MP à CE; les parties AP exprimeront les racines x de l'égalité propoſée $x^3+a^2x-a^2b=0$. 2°. Que les Paraboles cubiques MCM, MAM, ſont préciſément les mêmes; puiſque leurs parametres AB, CD, ſont égaux, & que les angles APM, CKM, que font leurs appliquées avec leurs axes le ſont auſſi.

La ſituation des deux Paraboles cubiques MAM, MCM, fait connoître que l'égalité propoſée $x^3+a^2x-a^2b=0$, n'a qu'une racine réelle AP (x), qui eſt toûjours vraie & moindre que AC (b); de ſorte que les huit autres ſont imaginaires.

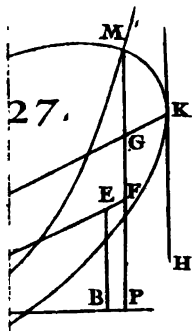
PROPOSITION XI.

Problême.

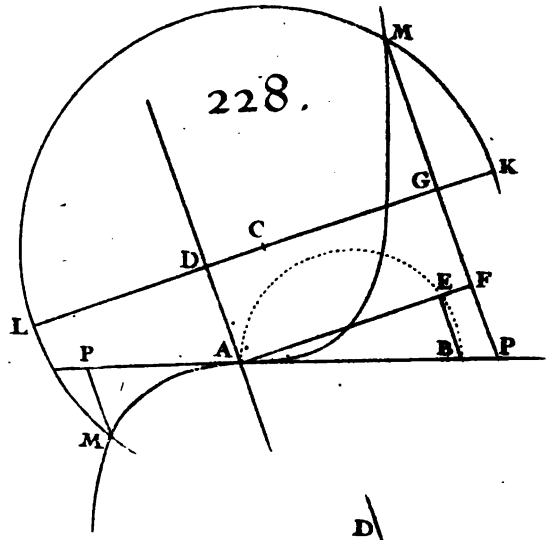
421. CONSTRUIRE *toute égalité de tel degré qu'elle puiſſe être, par le moyen d'une ligne droite, & d'un lieu du même degré, duquel lieu toutefois on puiſſe déterminer tous les points en n'employant que des lignes droites.*

Il faut mettre le dernier terme de l'égalité propoſée tout ſeul d'un côté en le rendant égal à tous les autres, & diviſer enſuite toute l'égalité par la ligne qui fait l'office de l'unité, repetée autant de fois qu'il ſera neceſſaire, afin que chaque terme n'exprime que des lignes: comme ſi l'on propoſoit $x^5-bx^4+acx^3-aadxx+a^3ex-a^4f=0$, on auroit $f=\frac{x^5}{a^4}-\frac{bx^4}{a^4}+\frac{cx^3}{a^3}-\frac{dxx}{aa}+\frac{ex}{a}$.

FIG. 234. Cela fait, on prendra ſur une ligne droite indéfinie AB dont l'origine fixe ſoit au point A, une partie quelcon-

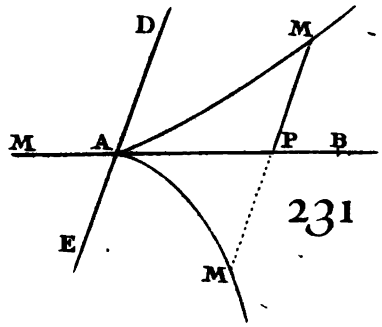


27.

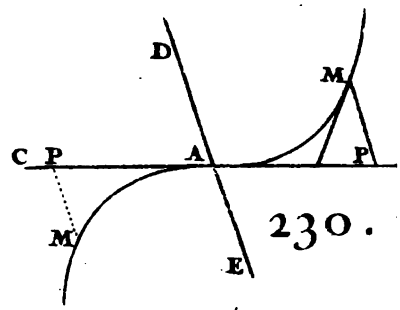


228.

29

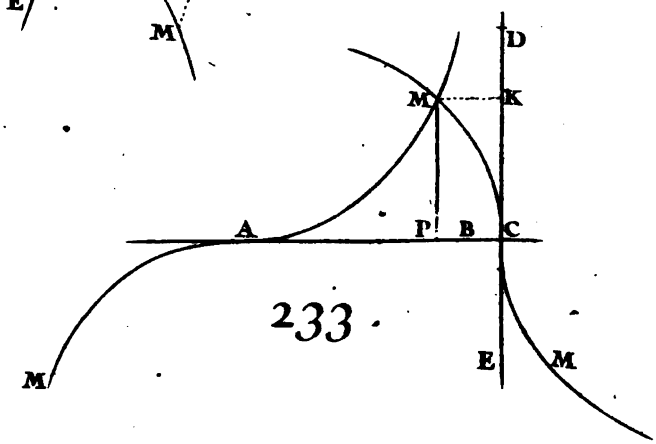


231

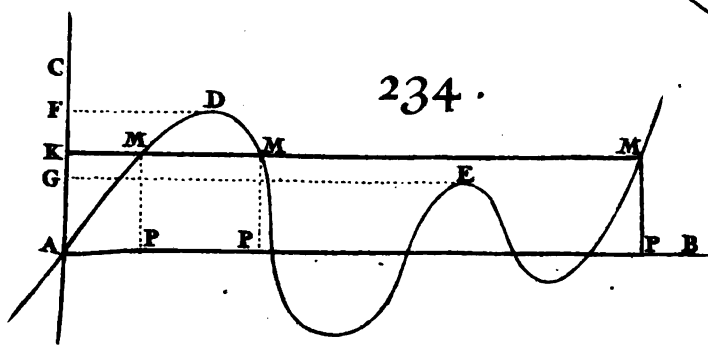


230.

2.



233.



234.

que AP pour la valeur de x ; & ayant mené parallelement à la ligne AC donnée de position une droite $PM = \frac{x^5}{a^4} - \frac{bx^4}{a^4} + \frac{cx^3}{a^3} - \frac{dxx}{aa} + \frac{ex}{a}$ (ce qui se peut toûjours faire * en n'employant que des lignes droites), son extremité M sera l'un des points d'une ligne courbe $ADEM$; dont les intersections M, M, M, &c. avec une ligne droite KM menée parallelement à AB par le point K tel que $AK = f$, détermineront des parties KM, KM, KM, &c. qui seront les valeurs cherchées de l'inconnuë x dans l'égalité donnée. * *Art.* 376.

Car menant les droites MP, MP, MP, &c. paralleles à AC, & nommant les indéterminées AP, x ; PM, y ; on aura par la proprieté de la courbe $ADEM$ cette équation $PM\ (y) = \frac{x^5}{a^4} - \frac{bx^4}{a^4} + \frac{cx^3}{a^3} - \frac{dxx}{aa} + \frac{ex}{a}$ qui est un lieu du cinquiéme degré ; & par la proprieté de la droite KM cette autre $y = f$. Ce qui, en substituant pour y sa valeur f, & multipliant par a^4, donne l'égalité même proposée $x^5 - bx^4 + acx^3 - aadxx + a^3ex - a^4f = 0$.

Ces sortes de constructions peuvent être tres-utiles pour trouver les limites des égalités. Supposons, par exemple, qu'on ait une methode pour déterminer sur la ligne AC les parties AF, AG, telles que les droites FD, GE, paralleles à AB touchent la courbe en des points D, E ; il est clair 1°. Que si $AK\ (f)$ est moindre que AF & plus grande que AG, comme on le suppose dans cette figure, l'égalité proposée aura trois racines vraies KM, KM, KM, & les deux autres imaginaires ; parce que la figure de la courbe est telle que la ligne KM la rencontrera en trois points, & jamais en davantage. 2°. Que si $AK\ (f)$ est moindre que AG, la ligne KM coupera la courbe en cinq points ; c'est à dire que l'égalité aura cinq racines vraies. 3°. Que si AK surpasse AF, l'égalité n'aura qu'une racine vraie, & les quatre autres imaginaires. 4°. Que si $AK = AF$, l'égalité aura trois racines vraies, dont il y en aura deux

égales entr'elles ; ſçavoir FD, FD. 5°. Et enfin que ſi $AK = AG$, l'égalité aura cinq racines vraies, dont il y en aura deux égales, ſçavoir GE, GE.

La même ligne courbe $ADEM$ étant continuée du côté du point A, ſervira à trouver les racines de l'égalité $x^5 - bx^4 + acx^3 - aadxx + a^3cx + a^4f = o$, qui ne differe de la précedente qu'en ce que le dernier terme a le ſigne $+$; ce qui fait voir qu'on doit mener alors la droite KM au deſſous de AB, puiſque ſon lieu doit être $y = -f$.

REMARQUE.

422. ON peut varier la conſtruction précedente en differentes manieres ; car au lieu du dernier terme qu'on égale à tous les autres, on pourroit prendre tel autre des termes qu'on voudroit, ou même deux quelconques qui ſe ſuivent immediatement, & les diviſer enſuite d'une maniere convenable, afin que les égalant à l'inconnuë y, le lieu de l'équation ne fût que du premier degré. Soit par exemple, l'égalité du troiſiéme degré $x^3 - abx - aac = o$; je fais $\frac{bx}{a} + c = \frac{x^2}{aa}$, & j'ai ces deux équations $x^3 = aay$, & $y = \frac{bx}{a} + c$, dont les lieux étant conſtruits ſeparement donneront les racines de l'égalité propoſée. Voici comment.

FIG. 235. Ayant pris à l'ordinaire pour inconnuës & indéterminées les deux droites AP (x), PM (y) qui font entr'elles un angle quelconque APM, ſoit décrite une premiere Parabole cubique MAM qui ſoit le lieu de la premiere équation $x^3 = aay$. Soit menée par le point A origine des x une ligne droite parallele à PM, ſur laquelle ſoient priſes les parties $AC = b$, $AD = c$, du côté où s'étend PM ; & ayant pris ſur AP prolongée du côté de A la partie $AB = a$, ſoit tirée par le point D une parallele indefinie à BC. Je dis que ſi des points M où elle rencontre la premiere Parabole cubique MAM, on mene des paralleles MP à AC ; les cou-

pées AP ſeront les racines de l'égalité donnée $x^3 - abx - aac = 0$.

Car menant DE parallele à AP, les triangles ſemblables BAC, DEM, donneront $BA\ (a).\ AC\ (b) ::$ $DE\ (x).\ EM = \frac{bx}{a}$, & par conſequent $PM\ (y) = \frac{bx}{a} + c$, Or à cauſe de la premiere Parabole cubique MAM, l'on aura $x^3 = aay$. Si donc l'on met à la place de y ſa valeur $\frac{bx}{a} + c$, on retrouvera l'équation donnée $x^3 - abx - aac = 0$.

S'il y avoit $+b$ dans l'égalité donnée, il faudroit prendre AC du côté oppoſé à PM, & il en eſt de même de AD lorſqu'il y a $+c$: de ſorte que cette conſtruction eſt generale pour toute égalité donnée du troiſiéme degré. Car il eſt évident qu'après en avoir fait évanoüir le deuxiéme terme, on peut toûjours la reduire ſous l'une de ces formes.

Il eſt viſible qu'on peut ſe ſervir d'une Parabole cubique donnée, puiſqu'il n'y a qu'à prendre l'unité arbitraire a égale à ſon parametre.

PROPOSITION XII.

Problême.

423. APPROCHER *de plus en plus à l'infini de la juſte valeur des racines de toute égalité du troiſiéme & du quatriéme degré ; & des égalités qui paſſent le quatriéme degré lorſqu'elles n'ont que deux termes : en ne ſe ſervant que de lignes droites & de cercles.*

Soit donnée l'égalité du troiſiéme degré $x^3 \mp 2apx - aaq = 0$; je la multiplie par x pour l'élever au quatriéme & tranſpoſant le terme $aaqx$, j'ai $x^4 \mp 2apxx = aaqx$; j'ajoûte de part & d'autre $aapp$ pour faire que le premier membre ſoit un quarré, ce qui me donne $x^4 \mp 2apxx + aapp = aapp + aaqx$, & extrayant de part & d'autre la racine quarrée, il vient $xx \mp ap$

$= a\sqrt{pp+qx}$; transposant enfin ap, & extrayant de nouveau la racine quarrée, je trouve $x = \sqrt{+ap+a\sqrt{pp+qx}}$. Je considere à present que si au lieu de la juste valeur de la racine vraie x, je prends une grandeur qui l'excede, comme par exemple c ; il s'ensuit 1°. Que c surpasse $\sqrt{+ap+a\sqrt{pp+qc}}$. 2°. Que $\sqrt{+ap+a\sqrt{pp+qc}}$ sera encore plus grande que la juste valeur de x. Cette seconde proposition est visible, mais pour la premiere elle se prouve ainsi.

Si l'égalité du troisiéme degré a $+2apx$, il est clair que $c^3+2apcc$ * $> aaqc$, d'où il vient en ajoûtant de part & d'autre le quarré $aapp$, & achevant le calcul comme ci-dessus, $c > \sqrt{+ap+a\sqrt{pp+qc}}$. Mais lorsqu'il y a $-2apx$, on aura en transposant $2apx$ & divisant par x cette égalité $xx = 2ap + \frac{aaq}{x}$, d'où il suit que si l'on met dans $\frac{aaq}{x}$ pour x une valeur c plus grande que la racine vraie de l'égalité $x^3 - 2apx - aaq = 0$, la quantité $2ap + \frac{aaq}{c}$ sera moindre que le quarré xx (puisque $\frac{aaq}{c}$ est moindre que $\frac{aaq}{x}$) & à plus forte raison que le quarré cc. On aura donc $cc > 2ap + \frac{aaq}{c}$; & multipliant par cc, il vient $c^4 - 2apcc > aaqc$, d'où l'on tire (en operant comme l'on vient de faire) $c > \sqrt{ap+a\sqrt{pp+qc}}$. Or ceci supposé, je forme cette suite : $\sqrt{+ap+a\sqrt{pp+qc}}$, $\sqrt{+ap+a\sqrt{pp+qf}}$, $\sqrt{+ap+a\sqrt{pp+qg}}$ &c, dans laquelle f exprime le terme $\sqrt{+ap+a\sqrt{pp+qc}}$ qui le precede immediatement, & de même g exprime le terme $\sqrt{+ap+a\sqrt{pp+qf}}$ &c.

* *Ce signe ainsi tourné veut dire, surpasse.*

Il est donc évident par ce que l'on vient de démontrer, que tous les termes de cette suite seront plus grands que la juste valeur de la vraie racine x, & qu'ils en approchent

prochent toûjours de plus en plus. Je dis à preſent que ſi on la continuë à l'infini, le terme infinitieme (s'il eſt permis de s'exprimer ainſi) ou le dernier terme de cette ſuite, ſera préciſément égal à la valeur cherchée de l'inconnuë x. Car ſoit z ce dernier terme, il eſt certain par la nature de la ſuite qu'il approchera de plus près de l'inconnuë x que tous les autres termes, & qu'ainſi le terme $\sqrt{\pm ap + a\sqrt{pp + qz}}$ qui le ſuivroit immédiatement, s'il n'étoit pas le dernier, ne peut être moindre que lui; puiſque s'il étoit moindre il aprocheroit de plus près de l'inconnuë x, & ſeroit par conſequent le dernier terme, ce qui eſt contre la ſuppoſition. Or il ne peut être plus grand, car on vient de démontrer que tous les termes de la ſuite vont en diminuant. Il faudra donc qu'il lui ſoit égal, & on aura par conſequent $z = \sqrt{\pm ap + a\sqrt{pp + qz}}$, c'eſt à dire en ôtant les incommenſurables $z^2 \mp 2apz - aaq = 0$, d'où l'on voit que $z = x$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

On prouvera par un raiſonnement ſemblable, que ſi l'on prend une grandeur c plus petite que la juſte valeur de x, tous les termes de cette ſuite iront toûjours en augmentant en ſorte que le dernier ſera préciſément égal à la valeur cherchée de x. Voici maintenant comment on peut conſtruire par Geometrie cette ſuite, en n'employant que des lignes droites & des cercles.

Ayant mené deux lignes droites indéfinies, BD, CP, qui s'entrecoupent à angles droits au point A, on prendra ſur l'une d'elles les parties $AB = a$, $AD = p$, du même côté du point A lorſqu'il y a $+2apx$, & de part & d'autre lorſqu'il y a $-2apx$, comme on le ſuppoſe dans ces deux figures; & ſur l'autre les parties $AC = q$, $AP = c$, toûjours de part & d'autre du point A. Ayant décrit du diametre CP un demi cercle qui coupe AD en E, on prendra ſur AC la partie AF égale à AE, & on portera ſur AD depuis le point D vers le point A dans le premier cas, & vers le côté oppoſé dans le FIG. 236. 237.

ſecond, la partie DG égale à DF. On décrira enfin du diametre BG un demi cercle qui coupe AP en Q, je dis que $AQ = \sqrt{ap + a\sqrt{pp + qc}}$. Car à cauſe du demi-cercle CEP la ligne AE ou $AF = \sqrt{qc}$, & à cauſe du triangle rectangle FAD l'hypothenuſe FD ou $DG = \sqrt{pp + qc}$, & par conſequent $AG = p + \sqrt{pp + qc}$, & à cauſe du demi-cercle BQG la ligne $AQ = \sqrt{ap + a\sqrt{pp + qc}}$. Nommant à preſent AQ, f; & reïterant la même operation en ſe ſervant de AQ au lieu de AP, on trouvera $AR = \sqrt{ap + a\sqrt{pp + qf}}$, & enſuite par le moyen de AR que j'appelle g, on trouvera $AS = \sqrt{ap + a\sqrt{pp + qg}}$ en reïterant encore la même operation : de ſorte que la continuant autant que l'on voudra, on trouvera des lignes AP, AQ, AR, AS, &c qui approcheront de plus en plus à l'infini de la juſte valeur de la vraie racine x de l'égalité propoſée $x^3 - 2apx - aaq = 0$.

Il eſt à remarquer que l'on peut prendre d'abord pour AP (c) telle grandeur que l'on veut, car ſi cette grandeur ſe trouve plus grande que la racine x, les autres lignes AQ, AR, AS, &c. vont toûjours en diminuant; & au contraire ſi AP eſt moindre que x, elles iront en augmentant : de ſorte que la vraie racine eſt renfermée entre AP de l'une de ces deux figures & AP de l'autre, AQ & AQ, AR & AR, AS & AS. D'où l'on voit qu'en formant deux ſuites convergentes, dans l'une deſquelles le premier terme ſoit plus grand que la vraie racine, & dans l'autre plus petit, l'on aura toûjours en prenant les termes correſpondans de ces deux ſuites, des limites entre leſquelles ſe doit trouver cette racine; de ſorte que la difference de ces limites diminuë de plus en plus à l'infini.

Si l'on demandoit les deux autres racines de l'égalité propoſée $x^3 - 2apx - aaq = 0$. Nommant m la racine approchée que l'on vient de trouver, on la regardera

comme étant exacte : c'eſt pourquoi diviſant cette égalité par $x-m$, la diviſion ſe fera au juſte (car le reſte $m^3-2apm-aaq=0$, puiſqu'on ſuppoſe $x=m$), & on on aura pour quotient l'égalité $xx+mx+mm-2ap=0$, dont la reſolution fournira les deux racines qu'on demande.

Toutes les égalités du troiſiéme degré peuvent ſe reduire à l'un ou l'autre de ces deux formes ; car après avoir fait évanoüir le ſecond terme, s'il y avoit $+aaq$ en mettant $-aaq$, on ne feroit que changer les racines vraies en fauſſes & les fauſſes en vraies. D'où l'on voit que les conſtructions précedentes ſuffiſent pour trouver les racines approchées de toute égalité donnée du troiſiéme degré. Paſſons maintenant au quatriéme.

Soit propoſée l'égalité du quatriéme degré $x^4-3apxx-aaqx-a^3r=0$, dont il faille trouver les racines approchées. Je cherche, comme l'on vient d'enſeigner, les racines approchées de l'égalité du troiſiéme degré

$$y^3-3ppy+2p^3=0$$
$$+4ary+8apr$$
$$-aqq$$

où l'on doit obſerver d'écrire $-2p^3$ lorſqu'il y a dans la propoſé $+3apxx$; $-4ar$ lorſqu'il y a $+a^3r$; & enfin $-8apr$ lorſque les ſignes des termes $3apxx$ & a^3r ſont differens. Je regarde enſuite l'une de ces racines approchées y comme étant exacte, & ayant trouvé une ligne $v=\sqrt{ay+2ap}$, ſçavoir $+2ap$ lorſqu'il y a $-3apxx$, & $-2ap$ lorſqu'il y a $+3apxx$; j'ai pour les quatre racines approchées de la propoſée, celles de ces deux égalités du ſecond degré $xx-vx+\frac{ay+ap}{2}-\frac{aaq}{2v}=0$ & $xx+vx+\frac{ay+ap}{2}+\frac{aaq}{2v}=0$ (en obſervant de prendre $-ap$ lorſqu'il y a $-3apxx$ dans l'égalité propoſée, & $+ap$ lorſque c'eſt $+3apxx$) que l'on conſtruira aiſément en n'employant que des cercles & des lignes droites. Tout ceci n'eſt qu'une ſuite de la regle que donne M. Deſcartes dans le troiſiéme Livre de ſa

Geometrie pour reduire toute égalité du quatriéme degré à une du troiſiéme, de laquelle connoiſſant une des racines, on a les quatre de la propoſée ; & comme cela dépend de l'Algebre pure, je pourrois le ſuppoſer ici comme démontré. En voici cependant la raiſon en peu de mots.

On regarde l'égalité du quatriéme degré $x^4 - 3apxx - aaqx - a^3r = o$, comme le produit des deux planes $xx - vx + ab - ac = o$ & $xx + vx + ab + ac = o$, dans leſquelles les lettres v, a, b, c, marquent des inconnuës qui doivent être déterminées dans la ſuite, en ſorte que le produit de ces deux égalités qui eſt $x^4 \overset{-vvxx}{+2abxx} - 2acvx \overset{+aabb}{-aacc} = o$, ſoit en effet l'égalité même propoſée. Pour cela j'en compare les termes correſpondans, & j'ai 1°. $c = \frac{aq}{2x}$. 2°. $b = \frac{vv - 3ap}{2a}$. 3°. $bb - cc = -ar$, ou $bb - cc + ar = o$; c'eſt à dire en mettant pour b & pour c les valeurs que l'on vient de trouver & ordonnant, l'égalité $v^6 - 6apv^4 \overset{+9aappvv}{+4a^3rvv} - a^4qq = o$. Et ſi l'on fait $vv = ay + 2ap$, on trouvera par la ſubſtitution l'égalité du troiſiéme degré $y^3 - 3ppy + 2p^3 + 4ary + 8apr \overset{-aqq}{} = o$, de laquelle connoiſſant une racine y, on aura, en prenant la racine quarrée de $ay + 2ap$, la valeur de v, & enſuite celles de b & de c, leſquelles étant miſes dans les deux égalités planes que l'on a ſuppoſées d'abord, on en formera deux autres dont le produit ſera l'égalité même propoſée, & dont la reſolution par conſequent fournira les quatre racines qu'on demande. S'il n'étoit queſtion que de trouver une racine vraie d'une égalité du quatriéme degré, on pourroit la trouver immédiatement par une ſuite en cette ſorte.

Soit $x^4 \overset{+2apxx}{} - aaqx - a^3r = o$, on trouvera en operant de même que pour le troiſiéme degré $x = \sqrt{+ap + a\sqrt{qx + pp + ar}}$, ce qui donne, en faiſant pour abreger $pp + ar = nn$, cette ſuite conver-

gente c, $\sqrt{\mp ap + a\sqrt{nn + qc}}$, $\sqrt{\mp ap + a\sqrt{nn + qf}}$, $\sqrt{\mp ap + a\sqrt{nn + qg}}$, &c, dont la conſtruction n'eſt differente des précedentes qu'en ce qu'il faut prendre $AF = n$ & $DG = FE$.

Si l'on avoit $x^4 \mp 2apxx - aaqx + a^3r = o$, on trouveroit $x = \sqrt{\mp ap + a\sqrt{qx + pp - ar}}$, & on formeroit lorſque pp ſurpaſſe ar (en faiſant $pp - ar = nn$) la même ſuite convergente que ci-deſſus. Mais il eſt à remarquer que lorſqu'il y a $+2apxx$ dans l'égalité donnée, il faut que $\sqrt{qx + pp - ar}$ ſurpaſſe p afin que $\sqrt{-ap + a\sqrt{qx + pp - ar}}$ valeur de la racine x ne renferme point de contradiction ; ce qui donne $x > \frac{ar}{q}$, & par conſequent il faudra prendre c plus grande que $\frac{ar}{q}$.

Si pp eſt moindre que ar, l'on formera alors, en faiſant $ar - pp = qn$, cette ſuite convergente c, $\sqrt{\mp ap + a\sqrt{qc - qn}}$, $\sqrt{\mp ap + a\sqrt{qf - qn}}$, $\sqrt{\mp ap + a\sqrt{qg - qn}}$, &c, l'on doit remarquer que lorſqu'il y a $-2apxx$ dans l'égalité donnée, il faut que x ſurpaſſe n ou $\frac{ar - pp}{q}$ afin que $\sqrt{ap + a\sqrt{qx + pp - ar}}$ valeur de x ne renferme point de contradiction, & qu'ainſi on doit prendre c plus grand que n.

Il peut arriver lorſqu'il y a $+r$ dans l'égalité donnée que ces racines ſoient toutes quatre imaginaires, & alors on tombera infailliblement dans quelque contradiction en conſtruiſant la ſuite ; car on n'a démontré qu'elle eſt convergente qu'en ſuppoſant qu'il y eut une racine vraie dans l'égalité donnée. Au reſte la conſtruction de la derniere ſuite eſt un peu differente des autres, mais comme elle n'eſt pas plus difficile, je ne m'y arrêterai pas.

Cette methode devient embarraſſée lorſqu'on la veut étendre à des égalités complettes qui paſſent le quatrié-

me degré ; c'eſt pourquoi je me contenterai de l'appliquer à une égalité du cinquiéme degré qui n'a que deux termes, & qui ſervira de methode pour les autres plus compoſées qui n'ont pareillement que deux termes.

Soit $x^5 - a^4 b = 0$; multipliant par x, & tranſpoſant il vient $x^6 = a^4 bx$, & extrayant la racine quarrée on aura $x^3 = aa\sqrt{bx}$ ou $x^3 = aax\sqrt{bx}$, & extrayant de nouveau deux fois de ſuite la racine quarrée, on trouvera enfin $x = \sqrt{a\sqrt{x\sqrt{bx}}}$; ce qui fournit cette ſuite convergente, c, $\sqrt{a\sqrt{c\sqrt{bc}}}$, $\sqrt{a\sqrt{f\sqrt{bf}}}$, $\sqrt{a\sqrt{g\sqrt{bg}}}$, &c, dont voici la conſtruction geometrique.

Fig. 238. Ayant mené deux lignes droites indéfinies BD, CP, qui s'entrecoupent à angles droits au point A, on prendra ſur l'une d'elles la partie $AB = a$, & ſur l'autre, les parties $AC = b$, $AP = c$, de part & d'autre du point A. Du diametre PC ayant décrit un demi-cercle qui coupe BA prolongée du côté de A en D, & ayant pris ſur AC la partie $AF = AD$, on décrira du diametre PF un autre demi-cercle qui coupe AD en E. On décrira enfin du diametre BE un troiſiéme demi-cercle qui coupe AP en Q ; il eſt viſible que $AQ = \sqrt{a\sqrt{c\sqrt{bc}}}$. Nommant à preſent AQ, f ; & réïterant la même operation en ſe ſervant de AQ au lieu de AP, on trouvera $AR = \sqrt{a\sqrt{f\sqrt{bf}}}$, & de même $AS = \sqrt{a\sqrt{g\sqrt{bg}}}$. Et les droites AP, AQ, AR, &c. approcheront de plus en plus à l'infini de la juſte valeur de l'inconnuë x de l'égalité donnée $x^5 - a^4 b = 0$. Cela ſe prouve de la meme maniere que pour les égalités du troiſiéme degré.

M. Bernoulli celebre Profeſſeur des Mathematiques à Bâle, eſt l'Auteur de ces ſuites. On peut voir ce qu'il en dit dans les Actes de Leipſic de l'année 1689. page 455.

PROPOSITION XIII.

Problême.

424. *UNE portion de Section conique étant donnée, trouver par ſon moyen les racines d'une égalité donnée du troiſiéme ou du quatriéme degré.*

On a vû dans le Problême précedent qu'une égalité du quatriéme degré étant donnée, on en peut toûjours trouver une du troiſiéme, de laquelle connoiſſant une racine on a les quatre de la propoſée; en ne ſe ſervant que de lignes droites, & de cercles. On ſçait de plus que toute égalité du troiſiéme degré ſe peut reduire ſous cette forme $x^3 \mp 2apx - aaq = o$, dont l'une des racines eſt vraie, & les deux autres ou fauſſes ou imaginaires. Cela poſé; ſoit $x^3 \mp 2apx - aaq = o$, dont il faille trouver les racines, par le moyen de la portion donnée FIG. 239. BD d'une Parabole qui a pour axe la ligne CH dont l'origine eſt au point C. Des points B, D, extremités de la portion donnée ayant mené les perpendiculaires BG, DH, ſur l'axe, il eſt manifeſte que ſi la vraie racine étoit plus grande que BG, & moindre que DH, le cercle décrit du centre E, trouvé comme l'on a enſeigné à la fin de l'article 387. pour les égalités qui n'ont point de ſecond terme, & du rayon EC, couperoit infailliblement la portion BD en quelque point M; d'où menant la perpendiculaire MQ ſur l'axe, cette ligne MQ en ſeroit la vraie racine. Il eſt donc queſtion lorſque ce cercle ne coupe point la portion BD, de transformer cette égalité en une autre dont la vraie racine ſoit renfermée entre les limites BG, DH. Pour le faire, je nomme les données BG, f; DH, g; & je ſuppoſe que l'on ait deux limites m, n, entre leſquelles la vraie racine x ſoit reſſerrée (m eſt moindre que n, & f moindre que g). Ce qui donne x plus grand que m & moindre que n, & multipliant chaque terme par f & diviſant

par m, il vient $\frac{fx}{m}$ plus grand que f & moindre que $\frac{fn}{m}$. Si l'on fait à preſent $z = \frac{fx}{m}$, & qu'on mette dans l'égalité $x^3 \mp 2apx - aaq = 0$, à la place de x ſa valeur $\frac{mz}{f}$, on la transformera en celle-ci $z^3 \mp \frac{2apff}{mm}z - \frac{aaqf^3}{m^3} = 0$, qui aura ſa vraie racine $z = \frac{fx}{m}$ plus grande que f & moindre que $\frac{fn}{m}$. D'où il ſuit que ſi les limites m, n, étoient telles que $\frac{fn}{m}$ fût égale ou moindre que g, il n'y auroit qu'à conſtruire cette derniere égalité ſelon l'article 387, pour avoir ſa vraie racine MQ (z) par le moyen de la portion donnée BD. De là on tire la conſtruction ſuivante.

On fera par le Problême précedent deux ſuites convergentes qui approcheront l'une en deſſus & l'autre en deſſous de la vraie racine x de l'égalité donnée $x^3 \mp 2apx - aaq = 0$. On choiſira deux termes correſpondans dans ces deux ſuites m, n, qui ſoient tels que $\frac{fn}{m}$ ſoit égale ou moindre que g : ce qui ſe pourra toûjours faire, puiſque f eſt moindre que g, & que la difference qui eſt entre m & n diminuë continuellement à l'infini. Cela fait, on transformera l'égalité donnée en une autre $z^3 \mp \frac{2apff}{mm}z - \frac{aaqf^3}{m^3} = 0$, dont l'inconnuë ſera $z = \frac{fx}{m}$; & en la conſtruiſant ſelon la fin de l'article 387. le cercle coupera infailliblement la portion donnée BD en un point M ; duquel ayant mené ſur l'axe la perpendiculaire MQ, elle ſera la vraie racine z de cette ſeconde égalité : & faiſant enſuite $x = \frac{mz}{f}$, cette ligne x ſera la vraie racine de l'égalité $x^3 \mp 2apx - aaq = 0$.

Si l'on veut trouver les deux autres racines de cette égalité lorſqu'elles ne ſont pas imaginaires ; il n'y a qu'à la

la diviſer par l'inconnuë x moins celle que l'on vient de découvrir pour l'abaiſſer à une du ſecond degré, dont on découvrira les deux racines par le moyen d'un cercle, en ſe ſervant de l'article 380.

Tout ceci eſt trop évident pour m'y arrêter davantage, je remarquerai ſeulement que ſi la portion donnée BD étoit d'une Ellipſe ou d'une Hyperbole, il faudroit ſe ſervir de l'article 398. ou 403. & que toute la difficulté ſe reduiroit à transformer l'égalité donnée en une autre, dont la vraie racine eut des limites données : & c'eſt ce que l'on feroit comme dans la Parabole.

LIVRE DIXIE'ME.

Des Problêmes déterminés.

PROPOSITION GENERALE.

425. UN *Problême de Geometrie déterminé étant proposé, en trouver la ſolution.*

On regardera d'abord le Problême propoſé comme s'il étoit reſolu, & on tirera les lignes que l'on jugera les plus propres pour faire connoître ce qui n'eſt que ſuppoſé. On nommera enſuite toutes ces lignes (qui ſont pour l'ordinaire des triangles rectangles ou ſemblables) par des lettres de l'Alphabet, ſçavoir les lignes qui ſont connuës par les premieres lettres, & les lignes inconnuës par les dernieres lettres; & on parcourra toutes les conditions du Problême, en comparant ces lignes entr'elles dans l'ordre le plus ſimple & le plus naturel qu'il ſera poſſible: ce qui doit ſervir à former autant de differentes égalités qu'il y a d'inconnuës. On employera enfin les regles ordinaires de l'Algebre pour reduire ces differentes égalités à une ſeule dans laquelle il ne ſe trouve plus qu'une inconnuë, & pour l'abaiſſer s'il ſe peut à un moindre degré; & l'ayant reſoluë par les regles preſcrites dans le Livre precedent, on en tirera la ſolution cherchée du Problême. Ceci s'éclaircira parfaitement par les exemples qui ſuivent.

EXEMPLE I.

FIG. 240. 426. LA ligne droite AB étant donnée, trouver hors de cette ligne le point C tel qu'ayant mené les droites AC, CB; 1°. La ſomme de leurs quarrés ſoit au triangle ACB en la raiſon donnée de f à g, 2°. L'angle ACB qu'elles comprennent ſoit égal à l'angle donné GDK.

Je ſuppoſe que le point C ſoit celui qu'on cherche, &

je mene CH perpendiculaire sur AB que je divise par le milieu au point E. Je nomme la donnée AE ou EB, a; & les inconnuës EH, x; HC, y; & j'ai $AH = a - x$, $BH = a + x$. Donc à cause des triangles rectangles AHC, BHC, les quarrés des hypothenuses $\overline{AC}^2 = aa - 2ax + xx + yy$, & $\overline{BC}^2 = aa + 2ax + xx + yy$; & par consequent $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = 2aa + 2xx + 2yy$. Or puisque le triangle $ACB = AE \times CH\ (ay)$, il s'ensuit par la premiere condition du Problême que $2aa + 2xx + 2yy.ay :: f.g$; ce qui donne en multipliant les extrêmes & les moyens, & divisant par $2g$, cette équation $aa + xx + yy = \frac{af}{2g}y = 2my$ en prenant (pour ôter les fractions) une ligne $m = \frac{af}{4g}$.

Il reste maintenant à accomplir la seconde condition, sçavoir que l'angle ACB soit égal à l'angle donné GDK. Pour y réüssir, je mene d'un point G pris à discretion dans la droite GD, la perpendiculaire GF sur le côté DK, prolongé, s'il est necessaire, & du point A la perpendiculaire AL sur le côté BC prolongé aussi, s'il est necessaire, afin d'avoir deux triangles rectangles semblables ACL, GDF, dont l'un GDF est donné. Cela fait, je nomme les données DF, b; FG, c; & faisant, pour abreger, $BC = n$, je trouve à cause des triangles rectangles semblables BCH, BAL, ces proportions $BC\ (n).\ CH\ (y) :: BA\ (2a).\ AL = \frac{2ay}{n}$. Et $BC(n).\ BH\ (a+x) :: BA\ (2a).\ BL = \frac{2aa+2ax}{n}$. Et par consequent CL ou $BL - BC = \frac{2aa+2ax-nn}{n}$. Donc puisque l'angle ACL doit être égal à l'angle GDF, il faut que $CL\left(\frac{2aa+2ax-nn}{n}\right).\ AL\left(\frac{2ay}{n}\right) :: DF\ (b).\ FG\ (c)$; d'où l'on tire en multipliant les extrêmes & les moyens $2aac + 2acx - cnn = 2aby$, c'est à dire, en mettant pour nn sa valeur $aa + 2ax + xx + yy$, cette seconde

équation $aac - cxx - cyy = 2aby$ qui renferme la seconde condition du Problême.

Comme l'on a trouvé autant d'égalités qu'il y avoit d'inconnuës, & que l'on a satisfait à toutes les conditions du Problême; il ne faut plus que se servir des regles ordinaires de l'Algebre, pour reduire ces égalités à une seule qui ne renferme qu'une inconnuë y ou x: & c'est ce qu'on peut faire en cette sorte. J'ai pour premiere équation $aa + xx + yy = 2my$, & pour seconde, $aac - cxx - cyy = 2aby$ ou $aa - xx - yy = \frac{2aby}{c}$; c'est pourquoi ajoûtant ensemble d'une part les deux premiers membres, & de l'autre les deux seconds, je trouve $2aa = \frac{2aby}{c} + 2my$, d'où je tire $y = \frac{aa}{m+f}$ en prenant $f = \frac{ab}{c}$. Et mettant cette valeur à la place de y & son quarré à la place de yy dans l'une ou l'autre des équations precedentes, je trouve $xx = \frac{aamm - aaff - a^4}{mm + 2mf + ff}$ & $x = \frac{a\sqrt{mm - ff - aa}}{m+f}$; d'où je connois que si mm étoit moindre que $aa + ff$ le Problême seroit impossible. En voici la construction.

FIG. 241. Par le point E milieu de AB ayant tiré une perpendiculaire indéfinie ON à AB, on menera par le point A la ligne AM qui fasse avec AB l'angle EAM égal à l'angle DGF qui est donné. Du point M où cette ligne rencontre la perpendiculaire ON, comme centre, & du rayon MA, on décrira un arc de cercle ACB. On prendra ensuite sur EM prolongée du côté de M la partie $MN = m$; & ayant joint NA, on lui menera la perpendiculaire AO qui rencontre NO au point O, par lequel on tirera une parallele à AB. Je dis que cette parallele rencontrera l'arc de cercle ACB au point cherché C.

Car ayant mené CH perpendiculaire sur AB, il est clair que $CH = EO = \frac{aa}{m+f}$, puisqu'à cause des triangles rectangles semblables NEA, AEO, il vient $NE\ (m+f).\ AE\ (a) :: AE\ (a).\ EO = \frac{aa}{m+f}$. De plus à

cauſe du cercle $\overline{CM}^2 = \overline{AM}^2 = aa + ff$; & partant puiſque $MO = f + \frac{aa}{m+f}$, il s'enſuit à cauſe du triangle rectangle MCO que $\overline{CO}^2$ ou $\overline{EH}^2$ $(xx) = aa + ff - ff - \frac{2aaf}{m+f} - \frac{a^4}{mm+2mf+ff} = \frac{aamm-aaff-a^4}{mm+2mf+ff}$. Donc &c.

REMARQUE.

427. LORSQU'APRE'S avoir ſatisfait à toutes les queſtions d'un Problême, on eſt arrivé à deux équations qui renferment chacune les deux mêmes inconnuës, il n'eſt pas neceſſaire, ſi l'on veut, de les reduire à une ſeule qui ne renferme plus qu'une inconnuë, comme il eſt preſcrit dans la propoſition generale : mais l'on peut reſoudre le Problême, en conſtruiſant ſeparément les lieux de ces deux équations, car leurs points d'interſection ſerviront à trouver les valeurs de ces deux inconnuës. C'eſt ce qui ſe voit clairement dans cet exemple, où l'on a pris pour inconnuës les droites EH (x), HC (y) qui ſont entr'elles un angle droit EHC; & où après avoir ſatisfait aux conditions requiſes, on eſt arrivé à ces deux équations $aa + xx + yy = 2my$, & $aa - xx - yy = 2fy$; car les cercles qui en ſont les lieux étant décrits ſeparément donneront par leurs interſections des points qui ſatisferont : voici comment.

Ayant décrit comme dans la premiere conſtruction l'arc de cercle ACB, on décrira du centre A, & du rayon $AP = m$, un arc de cercle qui coupe la perpendiculaire EM en P. On prendra ſur cette perpendiculaire la partie $EQ = m$ du côté de l'arc ACB, & on décrira du centre Q & du rayon $QC = EP$, un cercle qui coupera l'arc ACB en des points C qui ſatisferont.

Car à cauſe de ce dernier cercle on aura $\overline{QC}^2$ ou $\overline{EP}^2$ $(mm - aa) = \overline{QO}^2$ $(mm - 2my + yy) + \overline{OC}^2$ (xx), c'eſt à dire la premiere équation $aa + xx + yy = 2my$;

& à cauſe de l'autre cercle ACB il vient $\overline{MC}^2$ ou $\overline{MA}^2$ $(ff+aa) = \overline{MO}^2\,(ff+2fy+yy) + \overline{OC}^2\,(xx)$, c'eſt à dire la ſeconde équation $aa-xx-yy = 2fy$. D'où il ſuit que le point cherché C ſe doit trouver en même temps ſur ces deux cercles, c'eſt à dire, qu'il doit ſe confondre avec leurs points d'interſection.

Il eſt viſible qu'il y a deux differens points C qui ſatisfont à la queſtion, lorſque ces deux cercles ſe coupent en deux points comme dans cette figure; qu'il n'y en a qu'un, lorſqu'ils ſe touchent; & qu'enfin il n'y en peut avoir aucun, lorſqu'ils ne ſe coupent ni ne ſe touchent.

Il faut bien prendre garde qu'en reſolvant un Problême par le moyen de deux lieux, on ne tombe pas dans une conſtruction plus compoſée, que ſi étant arrivé à une ſeule égalité qui ne renferme qu'une inconnuë x, on l'eut conſtruite ſelon les regles du Livre precedent. Je m'explique: qu'il faille, par exemple, reſoudre un Problême (c'eſt le troiſiéme exemple qui ſera propoſé) dont les conditions ſoient renfermées dans ces deux équations $y = \frac{cd-ex}{b}$, & $\frac{bb}{ff}yy = aa+xx$; ſi l'on ſe ſervoit des lieux de ces deux équations, il eſt clair qu'il faudroit mener une ligne droite * qui ſeroit le lieu de la premiere équation, & décrire une Hyperbole * qui ſeroit le lieu de la ſeconde, pour avoir par leurs interſections les valeurs des deux inconnuës x & y. Mais parce qu'en réüniſſant ces deux équations en une ſeule, on trouve l'égalité du ſecond degré $xx - \frac{2ccd}{cc+ff}x + \frac{ccdd-aaff}{cc-ff} = o$, qui ſe conſtruit en n'employant que des lignes droites & des cercles; ce ſeroit une faute conſiderable de ſe ſervir d'une Hyperbole.

* *Art.* 306.

* *Art.* 330. & 332.

EXEMPLE II.

FIG. 242. 428. LE quarré $ABCD$ étant donné; il faut mener d'un de ſes angles A la ligne droite AE, en ſorte que ſa partie FE compriſe entre les côtés BC, CD, oppo-

ſés à cet angle ſoit égale à une ligne donnée b.

Je ſuppoſe que le point E pris ſur le côté DC prolongé, ſoit tel que la partie FE de la ligne AE ſoit égale à b, c'eſt à dire que je ſuppoſe la queſtion reſoluë ; & je nomme la donnée AB ou AD ou DC ou CB, a ; l'inconnuë DE, x. Cela fait, les triangles ſemblables EDA, ECF, donnent $ED(x).DA(a)::EC(x-a).CF=\frac{ax-aa}{x}$, & le triangle rectangle ECF donne $\overline{FE}^2=\overline{EC}^2+\overline{CF}^2=xx-2ax+aa+\frac{aaxx-2a^3x+a^4}{xx}$. Mais puiſque par la condition du Problême FE doit être égale à b, on aura $xx-2ax+aa+\frac{aaxx-2a^3x+a^4}{xx}=bb$, ou $x^4-2a^3x+2aaxx-bbxx-2a^3x+a^4=0$. D'où l'on voit que la reſolution de cette égalité doit fournir pour $DE(x)$, une valeur telle que menant la droite AE, ſa partie FE compriſe entre les côtés CB, DC, ſoit égale à la donnée b.

L'égalité que l'on vient de trouver étant du quatriéme degré, il faudroit employer pour la reſoudre une Section Conique. C'eſt pourquoi je dois chercher auparavant par les regles que fournit l'Algebre, ſi elle ne ſe peut point abaiſſer à un degré plus ſimple, & je trouve en effet que ſi l'on prend $cc=aa+bb$, elle ſera le produit des deux égalités $xx+aa-ax-cx=0$, & $xx+aa-ax+cx=0$, qui ſont chacune du ſecond degré, de ſorte que pour avoir les quatre racines de l'égalité du quatriéme degré x^4-2a^3x &c, il ne faut que trouver les racines de chacune de ces deux égalités Je ne m'arrête point à chercher les racines de l'égalité $xx+aa-xx+cx=0$; parce que c ſurpaſſant a, la diſpoſition des ſignes me fait connoître qu'elles ſont toutes deux fauſſes : mais je trouve celles de l'autre égalité $xx+aa-ax-cx=0$, que je connois être toutes deux vraies, de la maniere qui ſuit.

Soit priſe ſur le côté AB prolongé la partie $BG=c$, & ſoit décrit du diametre AG un demi-cercle qui cou-

pe en E le côté DC prolongé. Je dis que ce point sera celui qu'on cherche.

Car nommant DE, x ; & menant la perpendiculaire EH, on aura $HG = a + c - x$, & par la proprieté du cercle $AH * HG$ $(ax + cx - xx) = \overline{EH}^2$ (aa).

REMARQUE I.

429. LORSQU'APRE'S avoir satisfait aux conditions d'un Problême, on arrive à une égalité composée qui a plusieurs racines réelles, il est visible qu'il n'y a qu'une de ces racines qui exprime la valeur de l'inconnuë qu'on cherche : mais on doit bien remarquer que les autres peuvent aussi servir à la resolution de la question, dans un sens qui ne peut être different de celui qu'on s'est imaginé que dans quelques circonstances particulieres. Ainsi dans cet exemple la petite racine vraie DL (x) de l'égalité $xx - ax - cx + aa = o$, donne sur le côté DC un point L tel qu'ayant mené la droite AL qui rencontre le côté BC prolongé en K, sa partie LK est égale à la donnée b. De même si l'on prend $Bg = c$ sur le côté BA prolongé vers A, & qu'on décrive du diametre Ag un demi-cercle, il coupera le côté CD prolongé vers D aux points e, l, en sorte que De, & Dl, seront les deux racines fausses de l'égalité $xx + cx - ax + aa = o$: & si l'on mene les droites Ae, Al, qui rencontrent le côté CB prolongé aux points f, k ; les droites ef, lk, seront encore chacune égale à la donnée b. De là on peut voir que quoiqu'en resolvant le Problême on n'ait eu en vûë que de trouver la valeur de DE, on est cependant arrivé à une égalité dont les racines ont fourni d'autres valeurs DL, De, Dl, qui ont toutes servi à resoudre le Problême en quelque sens.

REMARQUE II.

430. S'IL y a lieu de croire que l'égalité qui renferme les conditions d'un Problême se peut abaisser à un moindre

moindre degré, il eſt à propos de tenter d'autres voies que celles qu'on a ſuivies quand même elles paroîtroient moins naturelles; parce qu'il arrive ſouvent qu'elles conduiſent à des égalités plus ſimples, & que d'ailleurs il eſt aſſez difficile d'abaiſſer des égalités compoſées. Voici deux autres manieres de reſoudre le Problême précedent qui pourront ſervir à faire comprendre cette remarque.

Ayant ſuppoſé le Problême reſolu, je mene EG perpendiculaire ſur AE qui rencontre le côté AB prolongé en G, & je prends pour inconnuës les deux droites AF & BG que je nomme y & z. Cela fait, les triangles rectangles ſemblables ABF, AEG, donnent $AB\ (a).\ AF\ (y) :: AE\ (y+b).\ AG\ (a+z)$. Et partant $yy+by = aa+az$. Or comme j'ai deux inconnuës & que le Problême eſt determiné, il faut encore chercher une autre égalité. Pour la trouver, je conſidere que $EG = AF\ (y)$; car menant EH perpendiculaire ſur AG, le triangle rectangle EHG eſt ſemblable au triangle rectangle ABF, & de plus égal, puiſque les côtés homologues AB, EH, ſont égaux entr'eux. J'aurai donc (à cauſe du triangle rectangle AEG) cette autre égalité $aa+2az+zz = yy+2by+bb+yy = 2yy+2by+bb$, dans laquelle mettant à la place de $2yy+2by$ ſa valeur $2aa+2az$ trouvée par le moyen de la premiere égalité, il vient $aa+2az+zz = 2aa+2az+bb$ qui ſe réduit à cette égalité tres-ſimple $z = \sqrt{aa+bb}$, qui fournit d'abord la même conſtruction que ci-deſſus. FIG. 242.

AUTRE MANIE'RE.

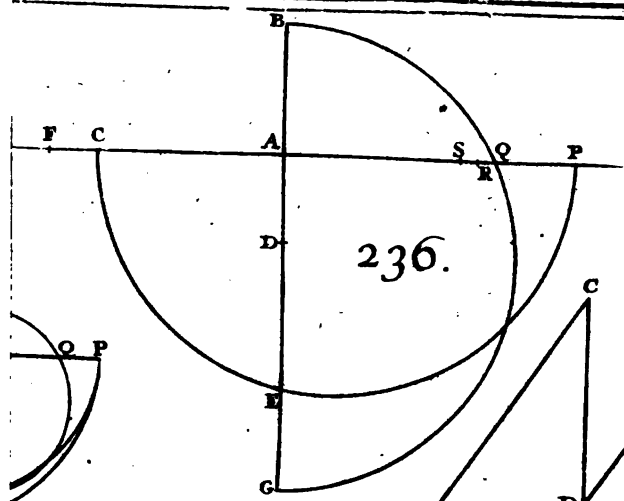
La maniere ſuivante a cela de particulier qu'elle réüſſit également ſoit que la figure $ABCD$ ſoit un quarré, ou qu'elle ſoit un rhombe. Ayant mené par le point cherché F, que je regarde comme donné, la ligne FG qui faſſe avec AF l'angle AFG égal à l'angle donné ACE & qui rencontre au point G la diagonale AC prolongée autant qu'il eſt neceſſaire; on aura trois triangles ACE, AFG, FIG. 243.

GCF, qui ſeront ſemblables entr'eux. Car 1°. L'angle en A étant commun aux deux triangles ACE, AFG, & les angles ACE, AFG, étant égaux par la ſuppoſition ; il eſt viſible que ces deux triangles ſeront ſemblables. 2°. Le triangle ADC étant iſoſcelle, l'angle DCA ou ECG ſera egal à l'angle DAC ou ACF, & ajoûtant de part & d'autre le même angle FCE, l'angle FCG ſera égal à l'angle ACE ou AFG ; & partant puiſque l'angle en G eſt commun, les deux triangles AGF, FGC, ſeront ſemblables. Cela poſé, ſoient les inconnuës $CE=x$, $AG=z$, & les données $DC=a$, $FE=b$, $AC=c$; on aura (à cauſe des paralleles AD, CF,) cette proportion : $CE(x).\ FE(b) :: CD(a).\ AF = \frac{ab}{x}$. Or à cauſe des triangles ſemblables ACE, AFG, GCF, on trouvera $AC(c).\ CE(x) :: AF\left(\frac{ab}{x}\right).\ FG = \frac{ab}{cx}$. Et $AG(z).\ FG\left(\frac{ab}{cx}\right) :: \frac{ab}{c}.\ CG(z-c)$. D'où l'on forme en multipliant les extrêmes & les moyens, l'égalité $zz-cz=\frac{aabb}{cc}$ qui fournit cette conſtruction.

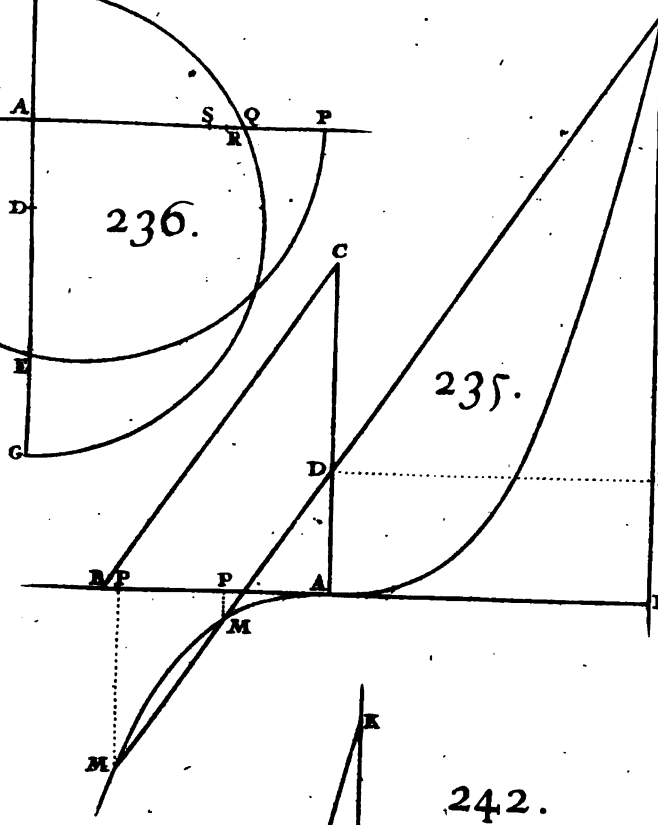
FIG. 243. Ayant mené du point A perpendiculairement ſur AC la ligne $AH=\frac{ab}{c}$, on tirera par le point du milieu L de la diagonale AC la ligne HL, & on prendra ſur cette diagonale prolongée du côté de C la partie LG égale à LH. On décrira enſuite du centre G & du rayon GF égal à AH, un arc de cercle qui coupera le côté BC au point cherché F. Cela eſt évident ; puiſque par la conſtruction $zz-cz=\frac{aabb}{cc}$, & que $GF=\frac{ab}{c}$.

EXEMPLE III.

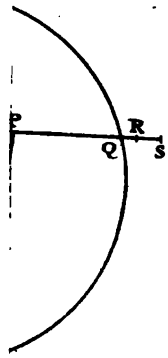
FIG. 244. 431. TROUVER ſur une ligne droite indéfinie DE donnée de poſition, deux points D, E ; deſquels ayant mené à deux points donnés O, C, hors de cette ligne, les droites DO, OE, DC, CE ; l'angle DOE ſoit droit

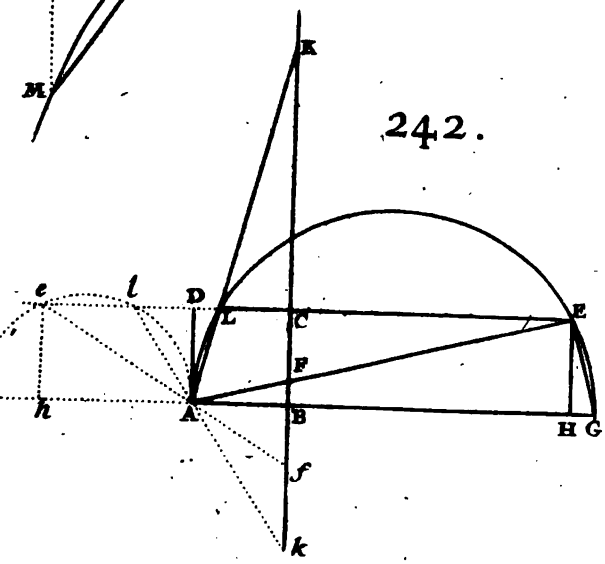


236.

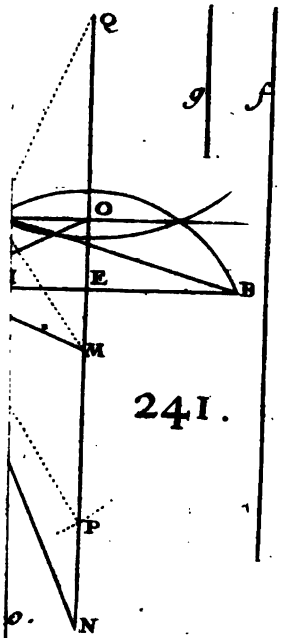


235.

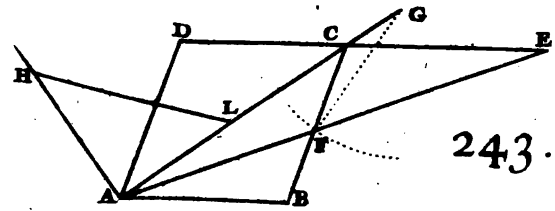




242.



241.



243.

& l'angle DCE égal à un angle donné TPS.

Suppoſons la choſe faite, je décris du diametre DE un demi-cercle qui paſſera par le point O, puiſque l'angle DOE eſt droit; & ſur la corde DE je décris un arc de cercle capable de l'angle donné, lequel paſſera par conſequent par le point C. Du point H centre de cet arc, & des points donnés O, C, je mene ſur DE les perpendiculaires HK, OA, CB, & je nomme les données OA, a; CB, b; AB, c; les inconnuës AK, x; KH, y. Cela poſé, il eſt clair par les Elemens de Geometrie, 1°. Que le point K ſera le milieu de la ligne DE, & par conſequent le centre du demi-cercle DOE. 2°. Que ſi par le ſommet P de l'angle donné TPS on mene une perpendiculaire PQ à l'un des côtés PT, l'angle QPS qu'elle fait avec l'autre côté PS, ſera égal à l'angle KEH. Or à cauſe du triangle rectangle KAO le quarré $\overline{KO}^2$ ou $\overline{KE}^2 = aa + xx$, & à cauſe du triangle rectangle HKE le quarré $\overline{HE}^2 = aa + xx + yy$: mais prolongeant HK juſqu'à ce qu'elle rencontre en R une parallele CR à DE, on aura (à cauſe du triangle rectangle CRH) le quarré $\overline{CH}^2 = bb + 2by + yy + cc + 2cx + xx$. Donc puiſque les lignes HE, HC, ſont rayons du même cercle, on formera par la comparaiſon de leurs valeurs analytiques cette équation $aa + xx + yy = bb + 2by + yy + cc + 2cx + xx$, qui, en effaçant de part & d'autre $yy + xx$, & pour abreger, faiſant $\frac{aa - bb - cc}{2c} = d$, ſe reduit à celle-ci; $y = \frac{cd - cx}{b}$.

Si l'on conſidere le chemin qu'on a ſuivi pour arriver à l'équation précedente, on verra qu'elle renferme cette condition, ſçavoir que les cercles décrits des centres K, H, & des rayons KO, HC, ſe rencontrent ſur la ligne DE dans les mêmes points D, E; de ſorte qu'il ne reſte plus qu'à faire que l'angle KEH ſoit égal à l'angle QPS. Pour en venir à bout.

Ayant pris ſur la ligne PQ la partie PQ égale à CB, & tiré QS parallele au côté PT, & terminé en S par

l'autre côté PS ; il eſt évident que le triangle rectangle EKH doit être ſemblable au triangle rectangle PQS, & qu'ainſi, en nommant la donné QS, f, on aura cette proportion ; $EK\,(\sqrt{aa+xx}).\ KH\,(y)::PQ\,(b).\ QS\,(f)$; d'où l'on tire $y=\frac{f}{b}\sqrt{aa+xx}=\frac{cd-cx}{b}$. Quarrant chaque membre pour ôter les incommenſurables, & mettant par ordre l'égalité, on trouve $xx-\frac{2ccd}{cc-ff}x+\frac{ccdd-aaff}{cc-ff}=o$, dont l'une des racines fournira pour $AK\,(x)$ une valeur telle que décrivant un cercle du centre K & du rayon KO, il coupera la ligne DE aux deux points cherchés D, E.

On peut trouver les racines de cette égalité, ſelon les articles 380. ou 382. (Liv. préced.) : mais quoique les methodes qu'on y explique ſoient tres-ſimples eû égard à leur generalité, il arrive neanmoins tres ſouvent qu'en conſiderant avec attention la nature d'une queſtion particuliere, on trouve des conſtructions plus faciles. Par exemple ; on peut remarquer ici, 1°. Que ſi par le point de milieu F de la ligne OC qui joint les deux points donnés, on mene la perpendiculaire FG qui rencontre en G la ligne DE donnée de poſition, on aura $AG=d$; car nommant AG, z ; les triangles rectangles GAO, GBC, donneront $\overline{GO}^2=zz+aa$ & $\overline{GC}^2=zz+2cz+cc+bb$, & comparant enſemble ces deux valeurs qui doivent être égales entr'elles, puiſque le point G eſt dans la perpendiculaire FG qui diviſe par le milieu la ligne OC, il vient $zz+aa=zz+2cz+cc+bb$, d'où l'on tire $AG\,(z)=\frac{aa-bb-cc}{2c}=d$. 2°. Que l'égalité $f\sqrt{aa+xx}=cd-cx$ qui renferme les conditions du Problême, ſe reduit à cette proportion ; $GK\,(d-x).\ KO\,(\sqrt{aa+xx})::QS\,(f).AB\,(c)$: de ſorte que ſi l'on décrit * le lieu de tous les points K tels qu'ayant mené aux deux points donnés G, O, les droites KG, KO, elle ſoient toûjours entr'elles en la raiſon donnée de

* Art. 350.

QS à AB ; ce lieu coupera la ligne DE au point cherché K. Ce qui donne la conſtruction ſuivante qui eſt trés ſimple.

Par le point de milieu F de la ligne OC qui joint les deux points donnés ayant mené la perpendiculaire FG, qui rencontre en G la ligne DE donnée de poſition, on diviſera la ligne OG au point M, en ſorte que $GM. MO :: QS. AB$. Et on la prolongera du côté de G juſqu'au point N, en ſorte que $GN. NO :: QS. AB$. Du diametre MN on décrira un cercle qui coupera la ligne DE en un point K, duquel point comme centre, & du rayon KO ayant décrit un cercle ; ce cercle rencontrera la ligne DE aux deux points cherchés D, E.

Comme le cercle qui a pour diametre la ligne MN, coupe la droite DE non ſeulement au point K, mais encore en un autre point L ; il s'enſuit qu'on peut ſe ſervir du point L de même que l'on a fait du point K, pour trouver ſur la ligne DE deux autres poids qui ſatisferont également, & qu'ainſi cette queſtion peut avoir deux differentes ſolutions.

Si l'angle DCE devoit être droit auſſi bien que l'angle DOE, il eſt clair que QS (f) deviendroit nulle, & qu'ainſi l'égalité $f\sqrt{aa+xx} = cd - cx$ ſe changeroit en celle-ci $cd - cx = o$, d'où l'on tire $x = d$; c'eſt à dire que le centre K tomberoit alors ſur le point G. Et ſi le point B tomboit ſur le point A, l'égalité $f\sqrt{aa+xx} = cd - cx$ ſe changeroit en celle-ci $f\sqrt{aa+xx} = \frac{aa-bb}{2}$ en mettant pour cd ſa valeur $\frac{aa-bb-cc}{2}$, & effaçant enſuite les termes où c (qui devient en ce cas nul) ſe rencontre ; d'où l'on voit que dans ce cas, ſi du point O comme centre, & du rayon $OK = \frac{aa-bb}{2f}$ on décrit un arc de cercle, il coupera la ligne DE au point cherché K. Ceci s'accorde parfaitement avec les articles 66. 67. 68. du Livre ſecond, & la conſtruction generale peut ſervir à trouver tout d'un coup dans une Ellipſe dont

deux diametres conjugués ſont donnés, deux autres diametres conjugués qui faſſent entr'eux un angle donné; ce qui dans l'art. 65. avoit été renvoyé ici.

EXEMPLE IV.

FIG. 245. 432. TROIS points A, B, C, étant donnés, en trouver un quatriéme, M, duquel ayant mené à ces points les droites MA, MB, MC; les differences de l'une d'elles aux deux autres ſoient données.

Cette queſtion eſt ſuſceptible de trois differens cas. Car ou les trois lignes MA, MB, MC, ſont toutes égales entr'elles; ou il y en a ſeulement deux qui ſoient égales entr'elles; ou enfin toutes les trois ſont inégales entr'elles.

Premier cas. Lorſque les trois lignes MA, MB, MC, ſont égales entr'elles; ou ce qui eſt la même choſe lorſque les deux differences données ſont nulles. Il eſt clair que le point cherché M ſera le centre du cercle qui paſſe par les points donnés A, B, C.

FIG. 246. *Second cas.* Lorſque deux des trois lignes MA, MB, MC, comme MA, MB, doivent être egales entr'elles; ou (ce qui eſt la même choſe) lorſqu'une des differences données eſt nulle.

Ayant tiré du point donné C, la perpendiculaire CO ſur la ligne AB qui joint les deux autres points donnés A, B; du point M que l'on ſuppoſe être celui qu'on cherche, ayant mené les droites MP, MQ, paralleles à CO, OB; il eſt clair que AP ſera égale à PB, puiſque AM doit être égale à MB. Nommant donc les données AP ou PB, a; OP, b; OC, c; $AM-MC$, f; & les inconnuës AM, z; PM, y; les triangles rectangles APM, MQC, donneront ces deux egalités $zz=aa+yy$, & $zz-2fz+ff=cc-2cy+yy+bb$; d'où en retranchant par ordre chaque membre de la ſeconde de ceux de la premiere, il vient $2fz-ff=aa-cc+2cy-bb$, qui ſe reduit à cette proportion $z.\ y+\frac{aa-bb-cc+ff}{2c}::c.f.$ De là on tire la conſtruction ſuivante.

Soit menée par le point de milieu P de la ligne AB, la perpendiculaire $PD = \frac{aa-bb-cc+ff}{2c}$. Soit diviſée l'hypothenuſe AD prolongée du côté qu'il ſera neceſſaire, aux points E, F; en ſorte que $AE.\ ED :: c.f$, & $AF.\ FD :: c.f$. Du diametre EF ſoit décrit un cercle; il coupera la ligne PD au point cherché M.

Car ayant mené la droite MA, il eſt clair par la proprieté du cercle EMF, * que $AM\ (z).\ MD$ * *Art.* 350. $(y + \frac{aa-bb-cc+ff}{2c}) :: c.f$; & par la proprieté de la perpendiculaire PM, que $zz = aa + yy$. Or comme ces deux équations renferment les conditions du Problême, il s'enſuit &c.

Si par l'autre point N, où la ligne DP rencontre la circonference, on mene les droites NA, NB, NC; les deux NA, NB, ſeront égales entr'elles, & la difference de chacune de ces deux droites à la troiſiéme NC ſera égale à la donnée f; de ſorte que le point N ſatisfait auſſi, mais avec cette difference que NC eſt la plus grande des trois droites NA, NB, NC, au lieu que MC eſt la plus petite des trois MA, MB, MC.

On peut encore reſoudre ce ſecond cas ſans aucun calcul. Je ſuppoſe comme auparavant que M ſoit le point cherché, & ayant tiré les droites MA, MB, MC, je décris du centre C, & du rayon $CD = MA - MC$, un cercle $DEKFH$. Du point D où la ligne MC rencontre ce cercle, je mene aux deux points donnés A, B, les droites DA, DB qui rencontrent le cercle aux points E, F; par où je tire les rayons EC, CF, & la corde EF. Cela fait, puiſque $MC + CD$ ou $MD = MA$, & que les lignes CD, CE, ſont rayons d'un même cercle, les triangles DMA, DCE, ſeront iſoſcelles; & par conſequent ſemblables parce que l'angle en D eſt commun: c'eſt pourquoi les lignes CE, MA, ſeront paralleles. On prouvera de même que les lignes, CF, MB, ſeront auſſi paralleles; ce qui donne $DA.\ DE :: DM.\ DC :: DB.\ DF$. Et de là on voit que toute la difficulté FIG. 247.

ſe reduit à trouver ſur la circonference du cercle $DEKFH$, le point D tel qu'ayant mené les droites DA, DB, qui rencontrent la circonference aux points E, F; la corde EF ſoit parallele à la ligne AB. Or cela ſe peut faire ainſi.

Ayant décrit du point C un cercle qui ait pour rayon une ligne $CD = AM - MC$, & tiré AC qui rencontre ce cercle aux points K, H; on prendra ſur AB la partie AG quatriéme proportionelle à AB, AH, AK, & on menera du point G la tangente GE au cercle $EDHFK$. Ayant mené par le point touchant E la ligne AE qui rencontre le cercle au point D, on tirera DC, ſur laquelle on prendra le point M tel que $DM.DC :: DA.DE$. Je dis qu'il ſera celui qu'on cherche.

Car par la proprieté du cercle $DEKFH$ le rectangle $HA * AK = DA * AE$; Et par conſequent $BA.AD :: AE.AG$: c'eſt pourquoi les triangles DAB, GAE, qui ont l'angle A commun., & les côtés autour de cet angle reciproquement proportionnels, ſeront ſemblables. L'angle AEG ſera donc égal à l'angle ABD; mais cet angle AEG étant fait par la tangente EG & par la corde DE prolongée du côté de E, a pour meſure la moitié de l'arc DE. Il ſera donc égal (en tirant par le point F où la ligne DB rencontre la circonference, la corde EF) à l'angle DFE; & par conſequent les lignes FE, AB, ſeront paralleles entr'elles. Or par la conſtruction $DC.DM :: DE.DA :: DF.FB$. Les triangles DMA, DMB, ſeront donc iſoſcelles; puiſque les triangles DCE, DCF, qui leur ſont ſemblables ſont iſoſcelles. Les lignes AM, MB, ſeront donc égales chacune à DM, & par conſequent entr'elles; & de plus AM où DM ſurpaſſera MC de la grandeur donnée CD. Et c'eſt ce qui étoit propoſé.

FIG. 148. *Troiſiéme cas.* Lorſque les trois lignes MA, MP, MC, ſont inégales entr'elles. Du point donné C, je mene la perpendiculaire CO ſur la ligne AB qui joint les deux autres points donnés; & du point M, que je

ſuppoſe

ſuppoſe être celui qu'on demande, les perpendiculaires MP, MQ, ſur les lignes AB, CO. Je nomme les données AO, a; OB, b; CO, c; $AM-MB, d$; $AM-MC, f$; & les inconnuës OP, x; PM, y; AM, z: ce qui donne $AP=a+x$, $BP=b-x$, $CQ=c-y$, $BM=z-d$, $CM=z-f$. Par le moyen des triangles rectangles APM, BPM, CQM, je trouve les trois équations ſuivantes; la premiere, $zz=aa+2ax+xx+yy$; la deuxiéme, $zz-2dz+dd=bb-2bx+xx+yy$; la troiſiéme, $zz-2fz+ff=cc-2cy+yy+xx$; & retranchant par ordre les membres des deux dernieres de ceux de la premiere, je forme une quatriéme, & une cinquiéme équation; ſçavoir la quatriéme, $2dz-dd=aa-bb+2ax+2bx$, & la cinquiéme, $2fz-ff=aa-cc+2ax+2cy$. Je mets dans la premiere équation à la place de yy le quarré de la valeur de y trouvée par le moyen de la cinquiéme; & enſuite à la place de x ſa valeur trouvée par le moyen de la quatriéme, & à la place de xx le quarré de cette valeur: ce qui donne enfin une égalité où il n'y a plus d'inconnuës que la ſeule z qui ne monte qu'au quarré. C'eſt pourquoi on la pourra toûjours reſoudre en n'employant que des lignes droites & des cercles, comme l'on a enſeigné dans les articles 380, ou 382. (Liv. preced.) Or ayant la valeur de l'inconnuë z, il eſt facile de trouver le point cherché M; car il ſera dans l'interſection de deux arcs de cercle, dont l'un aura pour centre le point A, & pour rayon la ligne AM (z); & l'autre pour centre le point B, & pour rayon la ligne BM ($z-d$).

On voit aſſez qu'en achevant le calcul, on ſeroit arrivé à une égalité du deuxiéme degré qui auroit renfermé dans ſes termes des quantités tres-compoſées; de ſorte que pour les réünir ſous des expreſſions ſimples, comme le demandent les articles 380, & 381, on auroit beſoin d'un grand nombre d'operations; ce qui rendroit la conſtruction tres-longue. C'eſt pourquoi on ſe ſervira de celle-ci par le moyen de laquelle on reduit ce cas au precedent.

Les deux droites AB, AC, qui joignent les points FIG. 249.

donnés étant diviſées par le milieu aux deux points D, F, & ayant mené du point M que je ſuppoſe être celui qu'on cherche, les perpendiculaires MP, MQ, ſur ces deux lignes ; on nommera les données AB, $2a$; BC, $2b$; $AM - MB$, $2c$; $AM - MC$, $2d$; & les inconnuës DP, x ; FQ, y. Cela poſé, ſi l'on nomme $2t$ la ſomme inconnuë des deux droites AM, BM ; la plus grande AM ſera $t + c$ & la moindre BM ſera $t - c$. Or les triangles rectangles APM, BPM, donnent $\overline{PM}^2 = \overline{AM}^2 - \overline{AP}^2 = \overline{BM}^2 - \overline{BP}^2$ c'eſt à dire en termes analytiques $tt + 2ct + cc - aa - 2ax - xx = tt - 2ct + cc - aa + 2ax - xx$, d'où l'on tire $t = \frac{ax}{c}$; & par conſequent $AM\,(t+c) = \frac{ax}{c} + c$. On trouvera de même par le moyen des deux triangles rectangles AQM, CQM, que $AM = \frac{by}{d} + d$; ce qui, en comparant enſemble les deux valeurs de AM, donne cette équation $\frac{ax}{c} + c = \frac{by}{d} + d$, ou $\frac{ax}{c} = \frac{by}{d} + d - c = \frac{by}{d} + f$, en faiſant pour abreger $d - c = f$. D'où il eſt clair que le point cherché M doit être tel qu'ayant mené les perpendiculaires MP, MQ, ſur les deux droites AB, AC ; on ait cette équation $\frac{ax}{c} = \frac{by}{d} + f$, ou ce qui revient au même cette proportion $x.\ y + \frac{df}{b} :: b.\ \frac{ad}{c}$. Or cela ſuffit pour trouver la conſtruction ſuivante.

Ayant joint les points donnés par les deux droites AB, AC, & diviſé ces droites par le milieu aux points D, F ; on prendra ſur AC du côté du point A la partie $FK = \frac{df}{b}$; & ayant tiré ſur AB, AC, les perpendiculaires DO, KS, qui ſe rencontrent au point H, on menera dans l'angle OHS la droite HM qui ſoit le lieu des points M, tels qu'ayant tiré de chacun d'eux

les perpendiculaires MO, MR, sur les côtés HO, HS; la droite MO soit toûjours à la droite MR, en la raison donnée de b à $\frac{ad}{c}$. Ensuite l'on tirera AE perpendiculaire sur HM, & l'ayant prolongée en G en sorte que EG soit égale à AE, on trouvera par le second cas le point M, tel qu'ayant mené les droites MA, MG, MC; les deux MA, MG, soient égales entr'elles, & la difference de MA à MC soit la donnée $2d$. Je dis qu'il satisfera à la question.

Car par la proprieté de la droite HM, on aura toûjours MO ou $DP\,(x)$. MR ou $QK\left(y+\frac{df}{b}\right)::b.\frac{df}{b}$; & par consequent le point M se doit trouver dans cette ligne. Il sera donc également éloigné des points A, G; mais de plus la difference de AM à MC doit être la donnée $2d$. Donc &c.

REMARQUE.

433. Si au lieu que dans cet exemple, les deux differences de l'une de ces trois droites MA, MB, MC, aux deux autres sont données; on vouloit à present que ce fussent les deux sommes de l'une de ces droites avec chacune des deux autres, ou bien la somme de l'une d'elles avec une autre & la difference de la même avec la troisiéme: la question n'en deviendroit pas plus difficile, & on pourroit toûjours la resoudre par les mêmes methodes. Ce que je n'expliquerai point en détail, afin de laisser quelque chose à l'industrie des Lecteurs.

COROLLAIRE I.

434. De-là on voit comment on peut décrire un cercle qui touche trois cercles donnés.

Car soient les points A, B, C, les centres des cercles donnés, & le point M celui du cercle qu'on cherche, lequel touche les cercles donnés aux points D, E, F. du côté que l'on voit dans la figure. Soient les rayons FIG. 250.

des cercles donnés $AD = a$, $BE = b$, $CF = c$; & le rayon du cercle qu'on cherche MD ou ME ou $MF = z$. Cela posé, on aura $AM = z + a$, $MB = z + b$, $MC = z - c$; & partant $AM - MB = a - b$, $MB - MC = b + c$, $AM - MC = a + c$. D'où il est evident que la question se reduit à trouver un point M, duquel ayant mené aux trois points donnés A, B, C, les droites MA, MB, MC, leurs differences soient données.

COROLLAIRE II.

FIG. 251. 252. 435. DE-LA on tire encore la maniere de décrire une Section conique qui ait pour foyer un point donné F, qui passe par deux autres points donnés B, C, & qui touche une ligne droite DE donnée de position.

On doit distinguer ici deux differens cas, dont le premier est, lorsque les trois points donnés F, B, C, tombent du même côté de la droite indéfinie DE; & le second lorsqu'ils tombent de part & d'autre.

FIG. 251. *Premier cas.* Ayant mené FD perpendiculaire sur DE, & l'ayant prolongée en A en sorte que DA soit égale à DF; on tirera les droites FB, FC. On trouvera le point M tel que la difference de AM & BM soit égale à FB, & celle de AM & MC égale à FC. On décrira ensuite * une Section conique qui ait pour ses deux foyers les points F, M, & pour l'axe qui passe par les foyers une ligne égale à AM. Je dis qu'elle sera celle qu'on cherche.

* *Def.* I. II. & I. III.

Car 1°. Le point E où la ligne AM rencontre la droite DE est à la Section, puisque FE étant égale à AE, on aura dans l'Ellipse la somme des droites FE, EM, & dans l'Hyperbole la difference égale à l'axe qui passe par les foyers; & par la même raison les points B, C, seront aussi dans la Section. 2°. Par la construction les angles FED, DEA, sont égaux entr'eux; & par conséquent la ligne ED est * tangente en E.

* *Art.* 60. & 123.

Il faut remarquer dans ce cas que lorsqu'on cherche

le foyer *M* du même côté du foyer donné *F* par rapport à la ligne *DE*, la Section qu'on trouve eſt une Ellipſe ; au lieu qu'elle ſera une Hyperbole ou deux Hyperboles oppoſées, lorſqu'on le cherchera de l'autre côté.

Second cas. Il eſt évident que dans ce dernier cas il ne peut y avoir d'Ellipſe qui ſatisfaſſe, mais ſeulement deux Hyperboles oppoſées. Pour les trouver ; ayant mené comme dans le premier cas *FD* perpendiculaire ſur *DE*, & l'ayant prolongée en *A* en ſorte que *DA* ſoit égale à *DF* ; on cherchera le point *M* tel que la ſomme de *AM* & *BM* ſoit égale à la donnée *FB*, & la difference de *AM* & *MC* ſoit égale à la donnée *FC*. On décrira enfin deux Hyperboles oppoſées qui ayent pour foyers les deux points *F*, *M*, & dont le premier axe ſoit égal à *AM*. Je dis qu'elles ont les conditions requiſes. FIG. 252.

Car 1°. Le point *E*, où la ligne *AM* rencontre la ligne *DE*, ſera à l'une de ces deux Hyperboles, puiſque *FE* étant égale à *AE*, la difference des droites *FE*, *ME*, ſera égale à *AM* valeur du premier axe ; & par la même raiſon les points *B*, *C*, ſeront à ces Hyperboles. 2°. La ligne *DE* ſera * tangente en *E*, puiſque par la conſtruction les angles *AED*, *DEF*, ſont égaux entr'eux. * *Art.* 1232

Si le point *C* tomboit du même côté du point *B* par rapport à la ligne *DE* la ſomme des deux droites *AM* & *MC* ſeroit égale à la donnée *FC* ; au lieu que c'eſt la difference lorſque les points *B*, *C*, tombent de part & d'autre de la ligne *DE*, comme l'on a ſuppoſé dans cette figure.

Si l'on propoſoit de décrire une Section conique qui eût pour foyer un point donné, pour tangentes deux lignes données de poſition, & qui paſſât par un autre point donné ; on trouveroit par le moyen de ces deux lignes deux points comme l'on vient de faire le point *A*, deſquels ayant mené deux droites qui aboutiſſent à l'autre foyer qu'on cherche, elles doivent être égales entr'elles, & leur difference ou leur ſomme avec celle qui part du

point où doit paſſer la Section & qui aboutit au même foyer, ſera toûjours donnée : de ſorte qu'on pourra toûjours reſoudre la queſtion par le moyen de l'Exemple precedent & de ſa Remarque. Enfin s'il falloit décrire une Section qui touchât trois lignes données de poſition, & qui eût pour foyer un point donné ; on trouveroit par le moyen de ces trois lignes trois points, comme l'on a fait le point A par le moyen de la ligne DE dans les deux cas precedens, & le centre du cercle qui paſſeroit par ces trois points, ſeroit l'autre foyer de la Section, laquelle auroit pour premier axe une ligne égale au rayon de ce cercle.

On doit obſerver dans tous ces differens cas, que ſi le point cherché M étoit infiniment eloigné du point F ; la Section deviendroit alors une Parabole dont les diametres ſeroient paralleles aux lignes, qui, continuées à l'infini, aboutiroient au point cherché.

EXEMPLE V.

FIG. 253. 436. UNE Parabole NCS étant donnée avec un de ſes arcs MN ; trouver un autre arc RS qui ſoit à l'arc MN, en raiſon donnée de nombre à nombre.

Ayant prolongé l'axe de la Parabole du côté de ſon origine C juſques en A, en ſorte que CA ſoit égal à la moitié de ſon parametre, & décrit une Hyperbole équilatere EAF qui ait pour centre le point C & pour la moitié de ſon premier axe la ligne CA ; on menera parallelement à l'axe CA les droites MB, NE, RD, SF, qui rencontrent le ſecond axe aux points H, L, K, O, & l'Hyperbole aux points B, E, D, F, deſquels on tirera ſur les Aſymptotes les perpendiculaires BP, EQ, DG, FI. Cela fait, il eſt viſible que le rectangle $AC \times MN$ ou *le Trapeſe hyperbolique $HBEL$ eſt égal au Secteur hyperbolique CBE plus le triangle CLE moins le triangle CHB ; & de même que $AC \times RS = CDF + COF - CKD$. Or ſuppoſant que la raiſon donnée de l'arc MN à l'arc RS ſoit comme m eſt à n, les lettres m & n expliquent des nombres entiers quel-

* *Art.* 246.

conques) on aura par la condition du Problême $AC*MN$ ou $CBE+CLE-CHB$. $AC*RS$ ou $CDF+COF-CKD :: m.n$, & par conſequent $nCBE+nCLE-nCHB = mCDF+mCOF-mCKD$. Si donc l'on nomme les données CP, b; CQ, c; l'inconnuë CG, x; & qu'on prenne $CI = x\sqrt[m]{\frac{c^n}{b^n}}$, il eſt clair * que le Secteur hyperbolique $CBE.CDF :: m.n$, & qu'ainſi $nCBE = mCDF$; d'où l'on voit que l'égalité precedente ſe change en celle-ci $nCLE-nCHB = mCOF-mCKD$ qui ne renferme plus d'eſpaces hyperboliques, mais ſeulement des triangles rectangles dont il s'agit maintenant de trouver les valeurs analytiques. * *Art.* 223.

Les droites CP, HB, forment en s'entrecoupant au point V deux triangles rectangles VHC, VPB, qui ſont ſemblables; puiſque les angles en V étant oppoſés au ſommet ſont égaux; ce qui donne $HV.CV :: VP.VB$, & en multipliant les extrêmes & les moyens $HV*VB = CV*VP$. De plus à cauſe de l'Hyperbole équilatere EAF, l'angle VCA ou CVH * eſt demi droit, & par conſequent le triangle rectangle CHV eſt iſoſcelle, auſſi-bien que ſon ſemblable VPB, ce qui donne $VP = PB$, $CH = HV$, & $\overline{CV}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{HV}^2 = 2\overline{HV}^2$. Donc le quadruple du triangle rectangle CHB, c'eſt à dire $2CH*HB = 2HV*\overline{HV+VB} = 2\overline{HV}^2 + 2HV*VB = \overline{CV}^2 + 2CV*VP = \overline{CV}^2 + 2CV*VP + \overline{VP}^2 - \overline{VP}^2 = \overline{CP}^2 - \overline{PB}^2$, puiſque $\overline{CV}^2 + 2CV*VP + \overline{VP}^2$ eſt le quarré de $CV+VP$ ou de CP. Et par conſequent le triangle $CHB = \frac{1}{4}\overline{CP}^2 - \frac{1}{4}\overline{PB}^2$. On prouvera de même que le triangle $CLE = \frac{1}{4}\overline{CQ}^2 - \frac{1}{4}\overline{QE}^2$, que le triangle $CKD = \frac{1}{4}\overline{CG}^2 - \frac{1}{4}\overline{GD}^2$, & enfin que le triangle $COF = \frac{1}{4}\overline{CI}^2 - \frac{1}{4}\overline{IF}^2$. C'eſt pourquoi nommant aa la puiſſance de l'Hyperbole, on aura le triangle $CHB = \frac{1}{4}bb - \frac{a^4}{4bb}$, le triangle * *Def.* 16. III.

$CLE = \frac{1}{4}cc - \frac{a^4}{4cc}$, le triangle $CKD = \frac{1}{4}xx - \frac{a^4}{4xx}$, le triangle $COE = \frac{xx}{4}\sqrt[m]{\frac{c^{2n}}{b^{2n}}} - \frac{a^4}{4xx}\sqrt[m]{\frac{b^{2n}}{c^{2n}}}$; puisque * $PB = \frac{aa}{b}$, $QE = \frac{aa}{c}$, $IF = \frac{aa}{x}\sqrt[m]{\frac{b^n}{c^n}}$: & mettant ces valeurs à la place des triangles qu'elles expriment dans l'égalité $nCLE - nCHB = mCOF - mCKD$, on en formera celle-ci $\frac{1}{4}n \times cc - \frac{a^4}{cc} - bb + \frac{a^4}{bb} = \frac{1}{4}m \times xx\sqrt[m]{\frac{c^{2n}}{b^{2n}}} - \frac{a^4}{xx}\sqrt[m]{\frac{b^{2n}}{c^{2n}}} - xx + \frac{a^4}{4xx}$ qui se reduit, en operant selon les regles ordinaires de l'Algebre, à cette égalité du deuxiéme degré $x^4 - \frac{na^4 - nbbcc \times cc - bb \times \sqrt[m]{b^{2n}}}{mbbcc \times \sqrt[m]{c^{2n}} - \sqrt[m]{b^{2n}}}xx + a^4\sqrt[m]{\frac{b^{2n}}{c^{2n}}} = 0$, dont la resolution doit fournir pour CG (x) une valeur telle qu'en prenant $CI = x\sqrt[m]{\frac{c^n}{b^n}}$, & tirant les perpendiculaires GD, IF, qui rencontrent l'Hyperbole équilatere aux points D, F; l'arc RS que les paralleles DR, FS à l'axe coupent sur la Parabole, sera à l'arc MN en la raison donnée de n à m.

* Art. 101.

Il est à propos de remarquer, 1°. Que le second terme de cette égalité est toûjours negatif, parce que CQ (c) surpasse CP (b); & qu'ainsi ces deux racines seront toutes deux vraies ou toutes deux imaginaires, selon que la moitié de la grandeur connuë au second terme est plus grande ou moindre que $aa\sqrt[m]{\frac{b^n}{c^n}}$ racine quarrée du dernier terme : ce qui est une suite de la resolution des égalités du second degré. 2°. Que $\overline{CG}^2$ (xx) étant une des racines de cette égalité, $\overline{IF}^2$ en sera l'autre. Car puisque $CI = x\sqrt[m]{\frac{c^n}{b^n}}$, il s'ensuit * que $IF = \frac{aa}{x}\sqrt[m]{\frac{b^n}{c^n}}$. Or on sçait que le dernier terme d'une égalité, est le produit de ses racines. Si donc on divise le dernier terme $a^4\sqrt[m]{\frac{b^{2n}}{c^{2n}}}$ de l'égalité

* Art. 101.

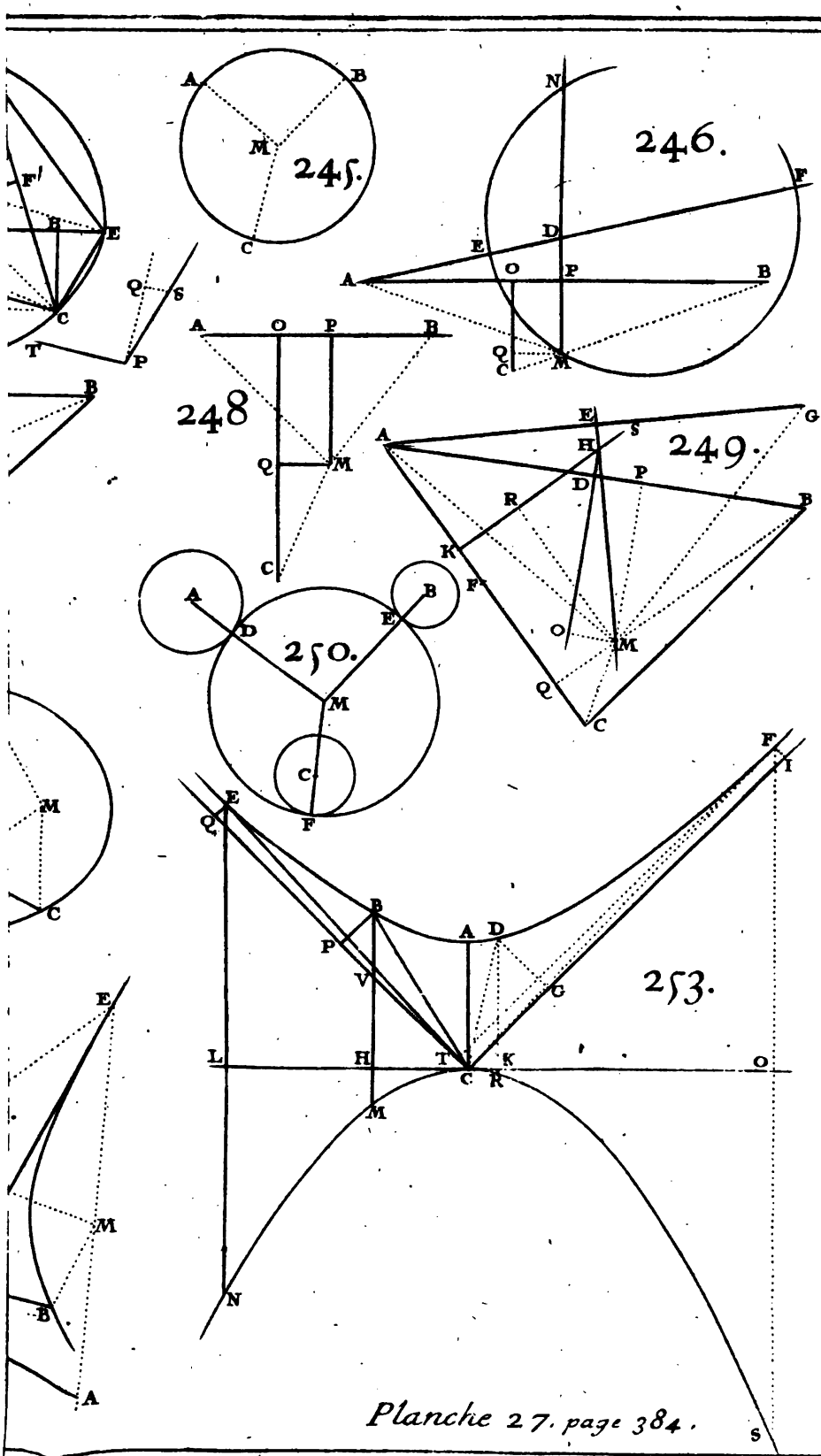


Planche 27. page 384.

l'égalité precedente, par le quarré $\overline{CG}^2$ (xx) que l'on ſuppoſe être l'une de ſes deux racines ; l'autre ſera $\frac{a^4}{xx} \overset{m}{\vee} \frac{b^{2n}}{c^{2n}}$ qui eſt le quarté de FI. D'où l'on voit que ſi l'on prend ſur les deux Aſymptotes les parties CG, CT, égales aux deux racines de l'égalité precedente ; & qu'ayant tiré les paralleles GD, TF, aux Aſymptotes, on mene par les points D, F, où elles rencontrent l'Hyperbole équilatere EAF, les paralleles DR, FS, à l'axe : elles couperont ſur la Parabole l'arc cherché RS.

Si $m = n$, l'équation generale ſe changera en celle-ci $x^4 - \frac{bbcc - a^4}{cc} xx + \frac{a^4bb}{cc} = o$, dont les deux racines fourniſſent $CG(x) = b = CP$, & $CT(x) = \frac{aa}{c} = QE$; d'où il ſuit qu'on trouve par leur moyen un arc RS, ſemblablement poſé de l'autre côté de l'axe, par rapport à l'arc MN. Or comme l'on ſçait d'ailleurs * que les deux arcs RS, MN, étant ſemblablement poſés de part & d'autre de l'axe ſont égaux entr'eux, cela ſert à confirmer les raiſonnemens que l'on vient de faire. De là il eſt aiſé de conclure qu'un arc parabolique MN étant donné, on n'en peut trouver aucun autre RS qui ſoit plus proche ou plus éloigné de l'origine C de l'axe & qui lui ſoit égal ; ſans ſuppoſer la quadrature de quelque Secteur hyperbolique, ou (ce qui revient au même) la rectification de quelque arc parabolique.

* *Art.* 86.

Si $m = 1$ & $n = 2$, on aura $x^4 - \frac{2a^4bb - 2ccb^4}{c^4 + bbcc} xx + \frac{a^4b^4}{c^4} = o$, & ſi $m = 2$ & $n = 3$, ou, ce qui eſt la même choſe, ſi l'arc RS doit être à l'arc MN comme 3 eſt à 2, on trouvera $x^4 - \frac{3a^4 - 3bbcc + \overline{bcc - b^4}}{2c^3 - 2ccb} xx + \frac{a^4b^3}{c^3} = o$; & la reſolution de ces égalités fournira celle du Problême. Il en eſt de même des autres valeurs de m & n.

M. *Bernoulli* celebre Profeſſeur des Mathematiques à Groningue, a reſolu le premier ce Problême d'une maniere differente de celle ci. On peut voir ce qu'il en dit dans les Actes de Leipſic de l'année 1698. p. 261.

EXEMPLE VI.

FIG. 254. 437. UN angle BAC étant donné avec un point D au dedans de cet angle ; décrire un cercle qui passe par le point donné D, qui touche le côté AB en quelque point P, & qui coupe sur l'autre côté AC une partie OC égale à une ligne donnée $2a$.

Ayant supposé le Problême resolu, on menera du point donné D, la ligne DA qui passe par le sommet A de l'angle donné, la ligne DP qui passe par le point touchant P & rencontre en H le côté AC prolongé, la ligne DE parallele à AC, & la perpendiculaire DB sur le côté AB : & ayant divisé la partie interceptée OC ($2a$) par le milieu en Q, on nommera les inconnuës AP, x ; AQ, z ; DH, t ; & les données AE, m ; AB, g ; BD, b ; DE, f ; AD, n. Cela fait, on aura par la proprieté du cercle $\overline{AP}^2$ (xx) $= CA \times AO$ ou $\overline{AQ}^2$ (zz) $- \overline{QO}^2$ (aa), & partant $zz = xx + aa$. De plus les triangles semblables PED, PAH, donnent AE (m). AP (x) :: DH (t). $HP = \frac{tx}{m}$. Et PE ($m - x$). ED (f) :: AP (x). $AH = \frac{fx}{m-x}$. Donc $HQ = z + \frac{fx}{m-x}$ & $CH \times HO$ ou $\overline{HQ}^2 - \overline{QO}^2 = zz + \frac{2fxz}{m-x} + \frac{ffxx}{\overline{m-x}^2} - aa = xx + \frac{2fxz}{m-x} + \frac{ffxx}{\overline{m-x}^2}$ (en mettant pour zz sa valeur $xx + aa$) $= DH \times HP \left(\frac{ttx}{m}\right)$ par la proprieté du cercle ; c'est à dire qu'en divisant par x, on aura cette égalité $x + \frac{2fz}{m-x} + \frac{ffx}{\overline{m-x}^2} = \frac{tt}{m}$. Or PD ou $DH - HP = \frac{mt - tx}{m}$; & (à cause du triangle rectangle DBP) son quarré $\frac{mmtt - 2mttx + ttxx}{mm} = xx - 2gx + gg + bb = xx - 2gx + nn$ en mettant pour $bb + gg$ sa valeur nn ; d'où l'on tire $\frac{tt}{m} = \frac{mxx - 2gmx + mnn}{\overline{m-x}^2} = x + \frac{2fz}{m-x} + \frac{ffx}{\overline{m-x}^2}$, & multipliant par $m - x$, &

transposant le terme $\frac{ffx}{m-x}$, il vient $mx - xx + 2fz = \frac{mxx-2gmx-ffx+mnn}{m-x} = \frac{mxx-mmx-nnx+mnn}{m-x}$, puisque à cause du triangle rectangle DEB on trouve $ff = bb + gg - 2gm + mm = nn - 2gm + mm$: c'est à dire, parce que la division se fait au juste, $mx - xx + 2fz = -mx + nn$ ou $2fz = xx - 2mx + nn$. Quarrant enfin chaque membre, & mettant pour zz sa valeur $xx + aa$ on aura cette égalité

$$\begin{array}{l} x^4 - 4mx^3 + 4mmxx - 4mnnx + n^4 = 0 \\ \quad - 4ff \qquad\qquad - 4aaff \\ \quad + 2nn \end{array}$$

qui est du quatriéme degré, & dont les racines que l'on trouvera par le moyen d'un cercle & d'une Parabole donnée ou de telle autre Section conique qu'on voudra doivent fournir pour AP (x) des valeurs telles que menant PM perpendiculaire sur AP, tirant PD, & faisant l'angle PDM égal à l'angle DPM, le point M, où se rencontrent les côtés DM, PM du triangle isoscelle DPM, soit le centre du cercle cherché, qui aura pour rayon la droite MP ou MD. Ou bien si l'on prend sur le côté AB la partie $AP = x$, & sur l'autre côté AC la partie $AQ = \sqrt{xx + aa}$, & qu'on mene sur ces côtés les perpendiculaires PM, QM; le point M où elles se rencontrent, sera le centre du cercle qu'on demande.

Comme rien n'est plus propre à donner de l'ouverture à l'esprit, que de faire voir les differens chemins qu'on peut suivre pour arriver à la connoissance de la même verité; je vais donner une autre maniere de resoudre cette question, qui me paroit encore plus naturelle que la precedente.

Ayant supposé que le point M soit le centre du cercle cherché, on menera les perpendiculaires MP, MQ, sur les côtés de l'angle donné BAC, & les paralleles ME, MG, à ces côtés; & du point donné D, on tirera les paralleles DB, DE, DK, à MP, ME, AB. On nommera ensuite les données DB, b; BE, c; DE, f; AB, g;

AE, m; AD, n; & les inconnuës AP, x; PM ou MD, y; & on aura PB ou $DK = g - x$, $MK = y - b$: ce qui donne (à cauſe du triangle rectangle MKD) l'équation $yy = gg - 2gx + xx + yy - 2by + bb$, d'où l'on tire $y = \frac{xx - 2gx + bb + gg}{2b} = \frac{xx - 2gx + nn}{2b}$ en mettant pour $bb + gg$ ſa valeur nn. Or à cauſe des triangles ſemblables DBE, MPF, on a cette proportion $DB(b)\ BE(c) :: PM(y).\ PF = \frac{cy}{b}$, & partant AF ou $MG = \frac{bx - cy}{b}$; & à cauſe des triangles ſemblables $DBE, MQG, DE(f).\ DB(b) :: MG\left(\frac{bx - cy}{b}\right).\ MQ = \frac{bx - cy}{f}$; Donc puiſque par les conditions du Problême, il faut que QC moitié de la partie interceptée OC ſoit égale à la ligne donnée a, & que les droites MC & MP ſoient rayons d'un même cercle cherché; il vient $\overline{MC}^2 = \frac{bbxx - 2bcxy + ccyy}{ff} + aa = \overline{MP}^2\ (yy)$, & multipliant par ff on aura $bbxx - 2bcxy + ccyy + aaff = ffyy = bbyy + ccyy$, en mettant pour ff ſa valeur $bb + cc$, c'eſt à dire $ffxx + aaff = ccxx + 2bcxy + bbyy$, en effaçant de part & d'autre $ccyy$, & mettant pour $bbxx$ ſa valeur $ffxx - ccxx$; ce qui donne par l'extraction de la racine quarrée, $f\sqrt{xx + aa} = cx + by = \frac{2cx - 2gx + xx + nn}{2b}$ en mettant pour y ſa valeur $\frac{xx - 2gx + nn}{2b}$, & enfin ſi l'on met pour $g - c$ ſa valeur m, on trouvera la même égalité que ci-deſſus $2f\sqrt{xx + aa} = xx - 2mx + nn$.

Voici encore une nouvelle maniere de reſoudre cette queſtion, qui donne d'abord une conſtruction fort aiſée; mais qui demande la deſcription de deux Paraboles. 1°. Je cherche le lieu des points M, tels qu'ayant mené de chacun de ces points au point donné D une ligne droite MD, & ſur la ligne AB donnée de poſition la perpendiculaire MP; ces deux lignes MD, MP, ſoient toûjours égales entr'elles : & je vois ſans aucun calcul que c'eſt* la Parabole qui a pour foyer le point D, & pour direc-

* *Art.* 1.

trice la ligne AB. 2°. Je cherche le lieu des points M, tels qu'ayant décrit de chacun de ces points un cercle qui paſſe par le point donné D ; ce cercle coupe ſur la ligne AL donnée de poſition, la partie OC égale à une ligne donnée $2a$. Je mene à cet effet du point donné D la perpendiculaire DL ſur AL, & d'un des points cherchés M que je regarde comme donné, les perpendiculaires MR, MQ, ſur DL, AL, & ayant nommé les inconnuës & indéterminées DR, x ; RM, y ; qui font entr'elles un angle droit DRM, & la connuë DL, b ; j'ai à cauſe du triangle rectangle MRD le quarré $\overline{MD}^2 = xx + yy$, & à cauſe du triangle rectangle MQC le quarré $\overline{MC}^2 = \overline{MQ}^2 (bb - 2bx + xx) + \overline{QC}^2 (aa)$. Or les lignes MD, MC, étant rayons du même cercle ſont égales entr'elles, & par conſequent $xx + yy = bb - 2bx + xx + aa$, ou $yy = bb + aa - 2bx$. Si donc l'on conſtruit la Parabole qui eſt le lieu de cette équation, il eſt viſible qu'elle paſſera par le centre M du cercle qu'on demande : mais la Parabole qui a pour foyer le point D & pour directrice la ligne AB devant auſſi paſſer par ce centre, il s'enſuit que le centre du cercle cherché ſe trouvera dans l'interſection de ces deux Paraboles.

EXEMPLE VII.

438. UN cercle qui a pour centre le point A & pour rayon la droite AM, étant donné, avec deux points E, F, ſur le même plan ; trouver ſur la circonference au dedans de l'angle EAF, le point M tel qu'ayant mené les droites AM, EM, FM ; les deux angles AME, AMF, ſoient égaux entr'eux. FIG. 255.

Si les lignes AE, AF, étoient égales entr'elles, il eſt viſible que la ligne qui diviſeroit par le milieu l'angle EAF, couperoit la circonference dans le point qu'on demande. C'eſt pourquoi on ſuppoſera que ces deux lignes ſont inégales, & même pour éviter la confuſion

que c'eſt la ligne AE qui eſt moindre que la ligne AF. Or cela poſé, je reſouds ce Problême en deux differentes manieres.

PREMIERE MANIE'RE.

Ayant ſuppoſé que le point M ſoit celui qu'on cherche, on menera les droites MB, MD, qui faſſent ſur AF, AE, des angles MBA, MDA, égaux aux angles AMF, AME, & par conſequent entr'eux; & à cauſe des triangles ſemblables AFM, AMB, & AEM, AMD, on aura ces deux proportions $AF.AM::AM.AB$. Et $AE.AM::AM.AD$. Donc puiſque les lignes AF, AE, ſont données avec le rayon AM, les parties AB, AD, des droites AF, AE, le ſeront auſſi. Maintenant, ſi l'on mene les droites MP, MQ, paralleles à AE, AF; les triangles BPM, DQM ſeront ſemblables, puiſque les angles APM, AQM, ſont égaux, comme auſſi les angles PBM, QDM, complemens à deux droits des angles égaux, MBA, MDA; & partant ſi l'on nomme les données AB, a; AD, b; & les inconnuës AP ou QM, x; PM ou AQ, y; on aura $BP\ (x-a).PM\ (y)::DQ\ (y-b).QM\ (x)$ ce qui donne (en multipliant les extrêmes & les moyens) cette équation $xx-ax=yy-by$, ou $yy-by-xx+ax=0$, dont le lieu eſt * une Hyperbole équilatere qui ſe conſtruit ainſi.

* *Art. 336.*

Soient priſes ſur les lignes AF, AE, les parties AB, AD, troiſiémes proportionnelles à AF, AM, & à AE, AM: ſoit tirée par le point C milieu de BD une ligne droite indéfinie CH parallele à AB, ſur laquelle ſoit priſe la partie $CK=\sqrt{\frac{1}{4}bb-\frac{1}{4}aa}$ (la ligne $AD\ (b)$ ſera plus grande que $BA\ (a)$, puiſqu'on a ſuppoſé que AE eſt moindre que AF): ſoit décrite une Hyperbole équilatere qui ait pour centre le point C, & pour la moitié d'un ſecond diametre la droite CK, dont les ordonnées HM ſoient paralleles à AD. Je dis qu'elle rencontrera la circonference du cercle donné, au point cherché M.

Car menant CL parallele AD; il eſt clair que les

lignes CH, CL, diviſeront par le milieu les droites AD, AB, aux points O, L ; puiſque le point C coupe en deux parties égales la ligne BD, & qu'ainſi CH ou $AP - AL = x - \frac{1}{2}a$, HM ou $PM - AO = y - \frac{1}{2}b$. Or par la proprieté de l'Hyperbole équilatere, $\overline{HM}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{CK}^2$, c'eſt à dire en termes analytiques $yy - by + \frac{1}{4}bb = xx - ax + \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}aa$; d'où l'on tire l'équation $yy - by = xx - ax$, qui étant reduite en proportion, donne $BP\ (x-a).\ PM\ (y) :: DQ\ (y-b).\ QM\ (x)$. Donc puiſque les angles BPM, DQM, ſont égaux, & que les côtés autour de ces angles ſont proportionnels ; les triangles BPM, DQM, ſeront ſemblables, & par conſequent l'angle MBP ſera égal à l'angle MDQ, & leurs complemens à deux droits ABM, ADM, ſeront égaux. Mais puiſque $AB.\ AM :: AM.\ AF$, & $AD.\ AM :: AM.\ AE$, les triangles ABM, AMF, & ADM, AME, ſeront ſemblables. L'angle ABM ſera donc égal à l'angle AMF, & l'angle ADM à l'angle AME ; & par conſequent les angles AMF, AME, ſeront égaux entr'eux, puiſqu'on vient de prouver que les angles ABM, ADM, le ſont.

On prouvera de même que l'Hyperbole oppoſée à celle ci coupera la circonference au dedans de l'angle oppoſé au ſommet à l'angle EAF, en un point M tel qu'ayant mené les droites AM, ME, MF ; les angles AME, AMF, ſeront égaux entr'eux : comme auſſi que ces deux Hyperboles équilateres oppoſées couperont la circonference au dedans des angles qui ſont à côté de ces deux ci, chacune en un point M tel qu'ayant mené les droites MA, ME, MF ; l'angle AME ſera égal au complement à deux droits de l'angle AMF.

Si l'on prend ſur CL la partie CG égale à CK, il eſt clair * que CG ſera la moitié du premier diametre conjugué à CK, & qu'ainſi * l'une des Aſymptotes de ces deux Hyperboles ſera parallele à KG. Or dans le triangle iſoſcelle GCK, l'angle externe GCO ou ſon égal BAD vaut les deux internes oppoſés, c'eſt à dire le dou-

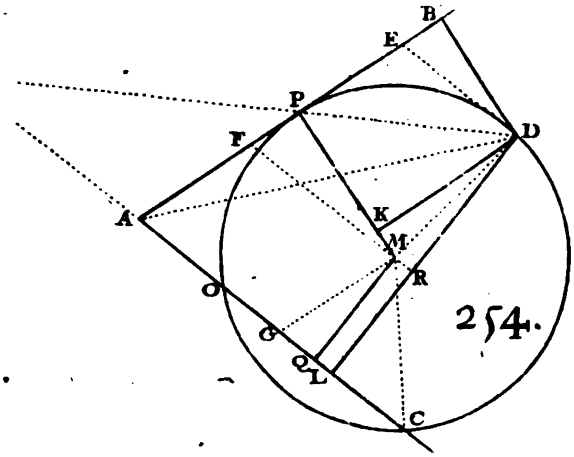
* *Def.* 16. III.

* *Art.* 114.

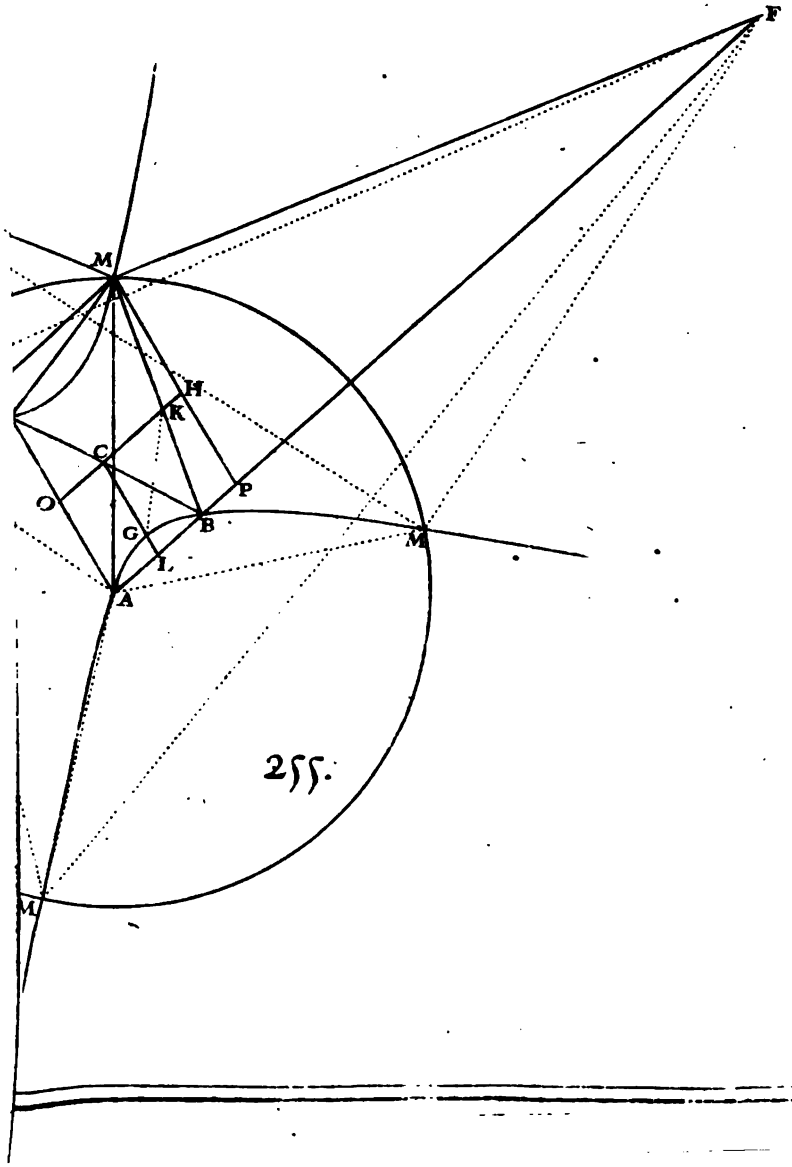
ble de l'angle CGK. Donc puiſque les lignes CG, AD, ſont paralleles, il s'enſuit que la ligne KG & par conſequent l'une des Aſymptotes ſera parallele à la ligne qui diviſe par le milieu l'angle DAB De plus il eſt evident que la ligne AD eſt une double ordonnee au ſecond diametre CK, puiſque $\overline{OD}^2$ ou $\overline{OA}^2$ $(\frac{1}{4}bb) = \overline{CO}^2$ $(\frac{1}{4}aa) + \overline{CK}^2$ $(\frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}aa)$; & qu'ainſi l'une des Hyperboles équilateres oppoſées paſſe par le point D, & l'autre par le point A. Ces deux remarques donnent lieu à une nouvelle conſtruction qu'il eſt plus ſimple que la precedente : la voici.

FIG. 256. Ayant pris ſur les lignes AF, AE, les parties AB, AD, troiſiémes proportionnelles à AF, AM, & à AE, AM; on menera par le point de milieu C de la ligne BD deux droites indéfinies GH, CK, l'une parallele & l'autre perpendiculaire à la ligne AP, qui diviſe par le milieu l'angle donné EAF. On décrira enſuite entre ces deux lignes comme Aſymptotes, par les points D, A, deux Hyperboles oppoſées, qui couperont la circonference du cercle donné en des points M tels qu'ayant mené les droites MA, ME, MF; les deux angles AME, AMF, ſeront égaux entr'eux lorſque le point d'interſection M tombe dans l'angle EAF ou dans ſon oppoſé au ſommet; & l'angle AME ſera égal au complement à deux droits de l'angle AMF lorſqu'il tombe dans l'un ou dans l'autre des angles à côté.

On n'eſt arrivé à cette derniere conſtruction qu'en ſuppoſant la premiere qui eſt fondée ſur le calcul, & en faiſant enſuite des remarques qui ſont aſſez recherchées. Il eſt cependant facile de la démontrer tout d'un coup, ſi l'on fait attention à une proprieté de l'Hyperbole équilatere qui ſe trouve dans l'article 361. (Liv. VIII.) & qui d'ailleurs ſe peut aiſément prouver. Car ſi l'on mene du point M où l'Hyperbole équilatere DM rencontre la circonference du cercle donné, aux deux extremités B, D, du premier diametre BD, les droites BM, DM,



254.



255.

BM, DM, qui rencontrent l'Asymptote CH aux points O, L, & la ligne AP qui lui est parallele aux points S, R; il est clair selon cet article, que MO est égal à ML, & qu'ainsi l'angle MOL ou MSR ou BSA est égal à l'angle MLO ou DRA. Mais par la construction l'angle BAS est égal à l'angle DAR, puisque la ligne AP divise par le milieu l'angle EAF. Partant les angles restans ABM, ADM, dans les deux triangles ABS, ADR, seront égaux entreux; d'où il suit que les angles AMF, AME, le sont aussi. Et c'est ce qui étoit proposé.

On peut trouver facilement par le moyen de cette derniere construction, une égalité trés-simple qui ne renferme qu'une seule inconnuë, & dont la construction qui se pourra faire par telle Section conique qu'on voudra suivant les regles prescrites dans le Livre precedent, fournira la resolution du Problême. Soit menée à cet effet du point M la ligne MP parallele à l'Asymptote CK, & qui rencontre l'autre Asymptote CH au point H; & soient nommées les données AM, a; AK, b; CK, c; & les inconnuës AP, x; PM, y. Cela posé, on aura par la proprieté du cercle l'équation $xx + yy = aa$, & par la proprieté des Hyperboles opposées * l'autre équation $CH * HM\ (xy - cx - by + bc) = CK * KA\ (bc)$; ce qui donne $xy - cx - by = o$, d'où l'on tire $y = \frac{cx}{x-b}$. Mettant le quarré de cette valeur à la place de yy dans la premiere équation $xx + yy = aa$, & operant à l'ordinaire on formera cette égalité du quatriéme degré $x^4 - 2bx^3 + bbxx + 2aabx - aabb = o$. * Art. 100.

$+ cc$

$- aa$

Or si l'on mene du centre C des Hyperboles, perpendiculairement à AC, la ligne CG qui rencontre la circonférence au point G; les triangles rectangles ACG, AKC, donneront $\overline{CG}^2 = \overline{AG}^2 - \overline{AC}^2 = \overline{AM}^2\ (aa) - \overline{AK}^2\ (bb) - \overline{CK}^2\ (cc)$. C'est pourquoi nommant la donnée CG, m;

on changera l'égalité precedente en celle-ci $x^4 - 2bx^3 - mmxx + 2aabx - aabb = o$, dans laquelle les données ſont le rayon AM (a), les lignes AK (b), CK (c), CG (m), & l'inconnuë x exprime des valeurs de AP telles que menant les perpendiculaires PM, elles rencontreront la circonference aux points cherchés.

Pour diſtinguer entre les deux points ou chaque perpendiculaire PM coupe la circonference du cercle, celui qui ſert à la queſtion preſente ; il faut obſerver de mener PM du côté où l'on a ſuppoſé que tomboit le point M par rapport à la ligne AP en faiſant le calcul, lorſque ſa valeur $\frac{cx}{x-b}$ qu'on a trouvé ci-deſſus eſt poſitive, c'eſt à dire, lorſque x eſt en même temps vraie & plus grande que b, ou bien lorſqu'elle eſt fauſſe ; & au contraire il la faut mener du côté oppoſe, lorſque ſa valeur eſt negative, c'eſt à dire, lorſque x eſt en même temps vraie & moindre que b.

SECONDE MANIE'RE.

FIG. 257. Ayant mené par le point cherché M que l'on regarde comme donné la droite MD perpendiculaire au rayon AM, & par le point D où elle rencontre AF la droite GH parallele à AM, laquelle rencontre en H la ligne MF, & en G la ligne EM prolongée qui coupe en C la droite AF ; on aura à cauſe des triangles ſemblables FAM, FDH, cette proportion : $AM. DH :: AF. FD$. Et à cauſe des triangles ſemblables CAM, CDG, cette autre, $AM. DG :: AC. CD$. Or la ligne DG eſt égale à DH, puiſque par la condition du Problême les angles AME, AMF, devant être égaux, les angles DMH, DMG, le ſeront auſſi. Donc $AF. FD :: AC. CD$, & $AF + FD. AF :: AC + CD$ ou $AD. AC$. Cela poſé, ſoient menées EB, MP, perpendiculaires ſur AF, & MQ perpendiculaire ſur EB : & ſoient nommées les données AM, a ; AB, b ; EB, c ;

AF, d ; & les inconnuës AP, x ; PM, y. Les triangles rectangles ſemblables APM, AMD, donneront $AP\ (x).\ AM\ (a)::\ AM\ (a).\ AD = \frac{aa}{x}$. Et partant $FD = d - \frac{aa}{x}$; & les triangles ſemblables EQM, MPC, donneront EQ ou $EB - MP\ (c-y).\ QM$ ou $AP - AB\ (x-b) ::\ MP\ (y).\ PC = \frac{xy-by}{c-y}$. Donc AC ou $AP + PC = \frac{cx-by}{c-y}$, & mettant dans la proportion precedente $AF + FD.\ AF ::\ AD.\ AC$ à la place de ces lignes leurs valeurs analytiques, on formera (en multipliant les moyens & les extrêmes) cette équation $2cdxx - aacx - 2bdxy + aaby + aady = aadc$, qui ſe reduit en diviſant par $2cd$, & en faiſant (pour abreger) $b + d = f$, à cette autre $xx - \frac{b}{c}yx - \frac{aa}{2d}x + \frac{aaf}{2cd}y - \frac{1}{2}aa = o$, dont le lieu qui eſt une Hyperbole entre ſes Aſymptotes étant conſtruit ſelon l'article 339. (Liv. VII.) coupera la circonference du cercle au point cherché M.

Si l'on veut avoir une égalité qui ne renferme que l'inconnuë x, on ſe ſervira de l'équation au cercle $xx + yy = aa$, dans laquelle mettant à la place de yy le quarré de y trouvé par le moyen de l'équation precedente, on arrivera à une égalité du quatriéme degré qui ne renfermera que l'inconnuë x, & dont l'une des racines exprimera la valeur de la cherchée AP.

EXEMPLE VIII.

439. UN cercle qui a pour centre le point A étant donné avec deux autres points E, F ; trouver ſur la circonference le point M tel qu'ayant mené les droites AM, MF, ME ; le ſinus droit de l'angle AMF ſoit au ſinus droit de l'angle AME, en la raiſon donnée de m à n. Fig. 258.

Je reſouds cette queſtion en trois differentes manieres.

PREMIERE MANIE'RE.

Ayant pris sur les droites données AF, AE, les parties AB, AD, troisiemes proportionnelles à AF, AM, & à AE, AM; on menera du point cherché M que l'on regarde comme donné les droites MB, MD, les perpendiculaires MG, MH, sur AF, AE, & les paralleles MP, MQ, à AE, AF. Ayant pris sur BM la partie BK égale à DM, on tirera du point K les droites KO, KL, paralleles à MG, MP, & du point donné D la perpendiculaire DC sur AF. Cela fait, les triangles semblables BMG, BKO, donnent $BM.BK$ ou $DM :: MG.KO$. Or par la condition du Problême $m.n :: KO.MH$; puisque prenant DM pour rayon ou sinus total, les droites KO, MH, seront les sinus droits des angles MBF, MDE, ou de leurs complemens à deux droits MBA, MDA, égaux par la construction aux angles AMF, AME. Donc en multipliant par ordre les antecedens & les consequens de ces deux proportions on aura $m*BM.n*MD :: MG*KO.KO*MH :: MG.MH :: MP.MQ$. à cause des triangles semblables MPG, MQH. Cela posé.

On nommera les données AD, a; AC, b; CD, c; AB, d; AM, r; & les inconnuës AP ou MQ, x; PM ou AQ, y; & les triangles semblables ADC, PMG, QMH donneront $PG = \frac{by}{a}$, $MG = \frac{cy}{a}$, $QH = \frac{bx}{a}$, $HM = \frac{cx}{a}$, $AG = x + \frac{by}{a}$, GB ou $AB - AG = d - x - \frac{by}{a}$, DH ou $AQ + QH - AD = y + \frac{bx}{a} - a$: & à cause des triangles rectangles BGM, DHM, on aura $\overline{BM}^2$ ou $\overline{BG}^2 + \overline{GM}^2 = xx + \frac{2b}{a}xy + \frac{bbyy}{aa} - 2dx - \frac{2bd}{a}y + dd + \frac{ccyy}{aa} = xx + \frac{2b}{a}xy + yy - 2dx - \frac{2bd}{a}y + dd$ en mettant pour $bb + cc$ sa valeur aa à cause du triangle rectangle ACD; & de même

$\overline{DM}^2 = yy + \frac{2b}{a}xy + xx - 2ay - 2bx + aa$. Or par la proprieté du cercle, le quarré $\overline{AM}^2$ $(rr) = \overline{AG}^2$ $\left(xx + \frac{2b}{a}xy + \frac{bbyy}{aa}\right) + \overline{GM}^2$ $\left(\frac{ccyy}{aa}\right) = xx + \frac{2b}{a}xy + yy$ en mettant pour $bb + cc$ sa valeur aa. Si donc l'on substituë dans les valeurs de $\overline{BM}^2$ & de $\overline{DM}^2$ à la place de $yy + \frac{2b}{a}xy + xx$ cette valeur rr, & que pour abreger on fasse $rr + dd = ff$ & $rr + aa = gg$, on trouvera $BM = \sqrt{ff - 2dx - \frac{2bd}{a}y}$, & $DM = \sqrt{gg - 2ay - 2bx}$. Substituant enfin ces valeurs à la place de BM & de DM dans la proportion $m \times BM. n \times DM :: MP\ (y). MQ\ (x)$ que l'on a trouvée ci-dessus ; & multipliant les extrêmes & les moyens, on formera cette équation $mx\sqrt{ff - 2dx - \frac{2bd}{a}y} = ny\sqrt{gg - 2ay - 2bx}$ de laquelle quarrant chaque membre, & faisant évanoüir l'inconnuë y par le moyen de l'équation au cercle $xx + \frac{2b}{a}xy + yy = rr$, on arrivera à une égalité du sixiéme degré qui ne renfermera plus que l'inconnuë x, & qui étant resoluë selon les regles du Livre precedent, donnera pour $AP\ (y)$ une valeur telle que menant PM parallele à AE, le point M où cette ligne rencontrera la circonference, sera celui qu'on cherche.

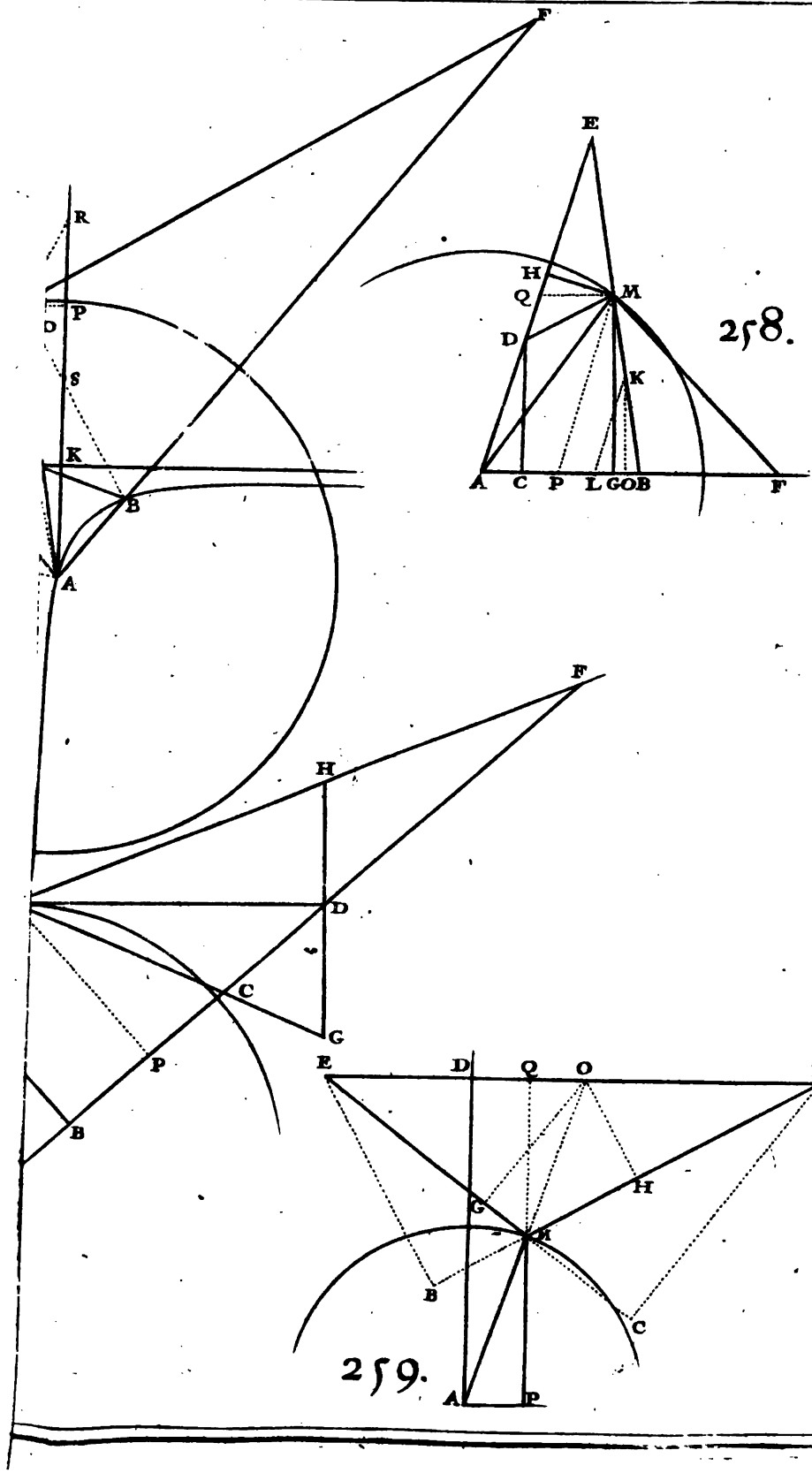
Si l'on suppose que $m = n$, il est évident que les angles MBF, MDE, seront égaux ; & qu'ainsi les angles ABM, ADM, ou AMF, AME, le seront aussi. D'où l'on voit que le Problême precedent n'est qu'un cas particulier de celui-ci.

SECONDE MANIE'RE.

Ayant joint les deux points donnés E, F, par une FIG. 259.

ligne droite, on tirera du centre donné A les droites AD, AP, l'une perpendiculaire & l'autre parallele à cette ligne, & par le point cherché M que l'on regarde comme donné la parallele PQ à AD; on menera auſſi du même point M, le rayon AM qui rencontre EF en O; & les droites EM, FM, ſur leſquelles on abaiſſera des points O, F, E, les perpendiculaires OG, OH, & FC, EB. Cela fait, les triangles ſemblables EOG, EFC, & FEB, FOH, donneront $EO.EF::OG.FC$. Et $EF.FO::EB.OH$, & partant $EO*EF.EF*FO$ ou $EO.FO::OG*EB.CF*OH$, c'eſt à dire, en raiſon compoſée de OG à OH, ou de m à n (puiſqu'en prenant MO pour le rayon ou ſinus total, les droites OG, OH, ſont les ſinus droits des angles EMO, FMO, complemens à deux droits des angles AME, AMF), & de BE à CF ou de EM à MF à cauſe des triangles rectangles ſemblables BME, CMF. On aura donc $EO.FO::m*EM.n*MF$. Cela poſé.

On nommera les données AD ou PQ, a; ED, b; DF, c; AM, r; & les inconnues AP, x; PM, y; & on aura à cauſe des triangles ſemblables APM, ADO, cette proportion, $MP\ (y).AP\ (x)::AD\ (a).DO = \frac{ax}{y}$. Et partant $EO = \frac{by+ax}{y}$, $FO = \frac{cy+ax}{y}$. Or les triangles rectangles EMQ, FMQ, donnent $\overline{EM}^2 = \overline{EQ}^2\ (bb+2bx+xx)+\overline{MQ}^2\ (aa-2ay+yy) = ff+2bx-2ay$ (en mettant pour $xx+yy$ ſa valeur rr à cauſe du triangle rectangle APM, & faiſant pour abreger $aa+bb+rr = ff$) & de même $\overline{FM}^2 = \overline{FQ}^2\ (cc-2cx+xx)+\overline{MQ}^2\ (aa-2ay+yy) = gg-2cx-2ay$ en mettant pour $xx+yy$ ſa valeur rr, & faiſant pour abreger $aa+cc+rr = gg$. Si dans la proportion precedente $EO.FO::m*EM.n*MF$, on met à la place de ces lignes les valeurs analytiques que l'on vient de trouver, & qu'on multiplie les extrêmes & les moyens,


F
R
P
D
S
K
B
A
E
H
Q
M
D
K
A
C
P
L
G
O
B
F
258.
F
H
D
C
G
P
B
E
D
Q
O
F
H
G
M
B
C
A
P
259.

on formera cette équation $bny + anx \sqrt{gg - 2cx - 2ay} = mcy - max \sqrt{ff + 2bx - 2ay}$, de laquelle quarrant chaque membre & faiſant évanoüir l'inconnuë y par le moyen de l'équation au cercle $xx + yy = rr$, on arrivera encore à une égalité du ſixiéme dégré, dont la reſolution fournira pour AP (x) une valeur telle que menant la perpendiculaire PM, elle ira couper la circonference au point cherché M.

C'eſt à peu près de cette façon que M. Deſcartes reſoud cette queſtion dans la ſoixante-cinquiéme de ſes Lettres, Tom. 3. Elle lui avoit été propoſée par M. de Roberval, d'une maniere qui paroît differente de celle-ci, mais qui dans le fond revient à la même choſe.

TROISIE'ME MANIE'RE.

Soient décrits des diametres AE, AF, deux cercles ART, AST, ſur leſquels ſoient portées depuis le point A deux cordes quelconques AR, AS, qui ſoient toûjours entr'elles en la raiſon donnée de m à n; & ſoient tirées les droites ER, FS, qui s'entrecoupent au point M. Je dis que la ligne courbe AM, qui eſt le lieu de tous les points M ainſi trouvés, coupera le cercle donné (dont le centre eſt en A) au point cherché M. FIG. 260.

Car tirant AM & le prenant pour rayon ou ſinus total, il eſt clair que la corde AR eſt le ſinus droit de l'angle AME, & la corde AS le ſinus droit de l'angle AMF.

Il eſt à propos de remarquer 1°. Que cette conſtruction a cela de particulier, qu'elle ne réüſſit pas ſeulement lorſqu'il s'agit de trouver le point M ſur la circonference d'un cercle dont le centre eſt en A, mais encore ſur telle ligne courbe qu'on voudra. 2°. Qu'ayant trouvé deux points de ce lieu de la maniere que l'on vient d'enſeigner, les plus proches que l'on pourra de la ligne courbe donnée, il ſuffit d'en tracer la portion qui joint ces deux points; ce qui rend la pratique de

cette conſtruction fort aiſée. 3°. Que le lieu de tous les points M ainſi trouvés eſt du quatriéme degré, comme il eſt facile de voir par le calcul de la ſeconde maniere, en obſervant de ne point ſubſtituer dans les valeurs de EM & FM à la place de $xx+yy$ le quarré rr que l'on trouve par le lieu au cercle ce qui donnera pour l'équation de ce lieu $nby+nax\sqrt{c-x^2+a-y^2}=mcy-max\sqrt{b+x^2+a-y^2}$, dont les inconnuës x & y montent au quatriéme degré, lorſqu'elle eſt délivrée d'incommenſurables. 4°. Que ce n'eſt pas une faute legere en Geometrie, ſelon M. Deſcartes, d'employer une ligne courbe trop compoſée pour reſoudre un Problême; de ſorte que ſelon lui, on doit preferer à cette derniere ſolution les deux precedentes, où les deux lieux qu'on a trouvés, & qui détermineroient par leur interſection avec la circonferenee donnée, le point cherché, ne ſont que du troiſiéme degré. Il me paroît neanmoins que la facilité d'une conſtruction & ſa ſimplicité peuvent récompenſer en quelque ſorte ce défaut, & c'eſt ce qu'on verra encore dans l'Exemple qui ſuit.

EXEMPLE IX.

FIG. 261. 440. DIVISER un triangle ſcalène donné ABC en quatre parties égales, par deux lignes droites DE, FG, qui s'entrecoupent à angles droits au point H.

Si l'on fait attention ſur la nature de ce Problême, on verra 1°. Que deux des extremités D, F, des deux droites DE, FG, ſe trouvent neceſſairement ſur l'un des côtés AC du triangle donné ABC, & que leurs deux autres extremités E, G, ſe trouvent chacune ſur chacun des deux autres côtés BC, BA. 2°. Que les deux points cherchés D, F, doivent avoir deux conditions, dont la premiere eſt que les lignes DE, FG, qui diviſent chacune le triangle ABC en deux parties égales, s'entrecoupent à angles droits en un point

H ; & la ſeconde qu'elles forment avec les deux autres côtes du triangle donné, un quadrilatere $BGHE$ qui ſoit la quatriéme partie du triangle ABC. Cela poſé.

Soient menées ſur le côté AC les perpendiculaires GI, BK, EL, & ſoient nommées les données AC, $2a$; BK, b; AK, c; KC, d; & les inconnuës AF, x; CD, y. Puiſque le triangle AGF, ou $GI \times \frac{1}{2} AF$ doit être la moitié du triangle ABC (ab), il s'enſuit que $GI = \frac{ab}{x}$; & par-là même raiſon $EL = \frac{ab}{y}$. Or les triangles ſemblables CBK, CEL, & ABK, AGI, donnent BK (b). EL ($\frac{ab}{y}$) :: CK (d). $CL = \frac{ad}{y}$. Et BK (b). GI ($\frac{ab}{x}$) :: AK (c). $AI = \frac{ac}{x}$. Et partant DL ou $CD - CL = y - \frac{ad}{y}$, FI ou $AF - AI = x - \frac{ac}{x}$. Mais les triangles rectangles DEL, FGI, ſont ſemblables entr'eux ; puiſque chacun d'eux eſt ſemblable au même triangle FDH, qui eſt rectangle en H ſelon la condition du Problême qui demande que les deux lignes DE, FG, s'entrecoupent à angles droits. On aura donc EL ($\frac{ab}{y}$). LD ($\frac{yy-ad}{y}$) :: FI ($\frac{xx-ac}{x}$). IG ($\frac{ab}{x}$) ; ce qui donne, en multipliant les extrêmes & les moyens, cette équation $xxyy - acyy - adxx + aacd = aabb$, ou $xx - ac \times yy - ad = aabb$, qui renferme la premiere condition du Problême ; de ſorte qu'il ne reſte plus qu'à accomplir la ſeconde ; ſçavoir que le trapeſe $BGHE$ ſoit le quart du triangle donné ABC.

Pour en venir à bout. Du point d'interſection H des deux droites DE, FG, ſoient menées aux trois angles du triangle ABC, les lignes HA, HC, HB, & on aura 1°. FD ($x + y - 2a$). AF (x) :: FHD ($\frac{1}{2}ab$). $FHA = \frac{abx}{4x+4y-8a}$. Et partant le triangle AHG ou le triangle FGA moins le triangle $FHA = \frac{1}{2}ab - \frac{abx}{4x+4y-8a}$.

2°. $AI\left(\frac{ac}{x}\right).IK\left(\frac{cx-ac}{x}\right)::AG.AGB::HG\left(\frac{abx+2aby-4aab}{4x+4y-8a}\right)$.

$GHB=\frac{bxx-5abx+2bxy-2aby+4aab}{4x+4y-8a}$. On trouvera par un raisonnement semblable que le triangle $HEB=\frac{byy-5aby+2bxy-2abx+4aab}{4x+4y-8a}$. Maintenant si l'on ajoûte ensemble les triangles HGB, HEB, on formera le quadrilatere $HGBE$ qui doit être égal à la quantité $\frac{1}{4}ab$ quatriéme partie du triangle ABC: ce qui donne pour la seconde équation $xx+yy+4xy-8ax-8ay+10aa=0$.

Si l'on fait évanoüir par le moyen de ces deux équations l'inconnuë y, on arrivera à une égalité de huitiéme degré qui renfermera toutes les conditions du Problême, & dans laquelle il n'y aura plus qu'une seule inconnuë x; de sorte que toute la difficulté est reduite à trouver les racines de cette égalité. Et c'est ce qu'on peut faire par le moyen de deux lieux du troisiéme degré, comme l'on a enseigné dans les articles 417, & 418 (Liv. preced) Mais comme la construction de ces lieux devient fort embarrassée & d'une longueur insuportable dans la pratique, à cause de la multitude des termes de leurs équations, il est beaucoup plus naturel de construire separément les lieux des deux équations que l'on vient de former, quoique l'un d'eux soit du quatriéme degré & par consequent plus composé, car l'autre n'étant que du second récompense ce défaut, & d'ailleurs la facilité de la construction doit déterminer en sa faveur: voici comment elle se fait.

FIG. 262. Ayant mené deux lignes droites indéfinies AB, AC, qui font entr'elles un angle droit BAC, on prolongera BA en E, en sorte que $AE=\sqrt{ac}$, & CA en F, en sorte que $AF=\sqrt{ad}$. Ayant pris sur AC une partie quelconque AP, on décrira du centre E de l'intervalle AP un arc de cercle qui coupe AC en G; & ayant pris AH, en sorte que le rectangle $HA*AG$ soit egal au triangle donné BAC, on prendra sur AB la partie

$AQ=FH$. On menera enſuite les droites PM, QM, paralleles à AB, AC, leſquelles s'entrecoupent en un point M; & ayant trouvé en la même ſorte une infinité d'autres points tels que M, on fera paſſer par tous ces points une ligne courbe KML. Cela fait, on prendra ſur la diagonale AD du quarré $ABCD$, qui a pour côté la ligne AC égal au côté AC du triangle donné ABC, les parties $AT=\frac{1}{3}AD$, & $DS=\frac{1}{6}AD$; & on décrira du premier axe TS qui ſoit à ſon parametre comme 1 eſt à 3, une Hyperbole OSR. Je dis à preſent que ſi l'on mene du point M où je ſuppoſe qu'elle rencontre la ligne courbe KML au dedans du quarré $ABCD$, la perpendiculaire MP ſur AC, & qu'on prenne ſur le côté AC du triangle ABC, les parties $AF=AP$, & $CD=PM$; les points F, D, ſeront tels qu'ayant mené (ce qui eſt facile) les deux droites FG, DE, qui diviſe chacune le triangle ABC en deux parties égales; elles s'entrecouperont à angles droits & le partageront en quatre parties égales.

Car nommant AP, x; PM, y; on aura à cauſe des triangles AEG, EAH, rectangles en A, le quarré $\overline{AG}^2=\overline{EG}^2\,(xx)-\overline{AE}^2\,(ac)$, & le quarré $\overline{AH}^2=\overline{FH}^2\,(yy)-\overline{AF}^2\,(ad)$. Or puiſque par la conſtruction le rectangle $HA\times AG$ eſt égal au triangle donné BAC (ab), il s'enſuit que $\overline{HA}^2\times\overline{AG}^2\,(yy-ad\times xx-ac)=aabb$. La ligne courbe KML ſera donc le lieu de cette équation qui eſt la premiere des deux que l'on vient de trouver; & par conſequent ſa proprieté ſera telle que ſi l'on mene d'un de ſes points quelconques M pris au dedans du quarré $ABDC$, une perpendiculaire MP ſur AC & qu'on prenne ſur le côté AC du triangle donné ABC, les parties $AF=AP$, & $CD=PM$; les droites FG, DE qui diviſe chacune par le milieu le triangle ABC, s'entrecouperont à angles droits au point H.

De plus ſi d'un point quelconque M de l'Hyperbole OSR, on mene la perpendiculaire MV ſur ſon premier

axe TS, & qu'on prolonge PM juſqu'à ce qu'elle rencontre la diagonale AD au point X; les triangles rectangles & iſoſcelles APX, MVX, donneront 1. $\sqrt{2}$ :: AP ou PX (x). $AX = x\sqrt{2}$, & $\sqrt{2}$. 1 :: MX ($x-y$). MV ou $VX = \frac{x-y}{\sqrt{2}}$; & partant AV ou $AX - XV = \frac{x+y}{\sqrt{2}}$. Or par la conſtruction $AD = 2a\sqrt{2}$ puiſque $AC = 2a$, & par conſequent TS ou $DT - DS = \frac{2}{3}a\sqrt{2}$. On aura donc TV ou $AV - AT = \frac{x+y-2a}{\sqrt{2}}$, & VS ou $TV - TS = \frac{3x+3y-10a}{3\sqrt{2}}$, & par la proprieté de l'Hyperbole $TV * VS \left(\frac{3xx+6xy+3yy-16ax-16ay+10aa}{6}\right)$. $\overline{MV}^2$ $\left(\frac{xx-2xy+yy}{2}\right)$ :: 1. 3, c'eſt à dire, comme le premier axe TS eſt à ſon parametre : ce qui donne en multipliant les extrêmes & les moyens cette équation $xx + yy + 4xy - 8ax - 8ay + 10aa = o$. L'Hyperbole OSR en ſera donc le lieu, & joüira par conſequent de cette proprieté; ſçavoir que ſi l'on mene d'un de ſes points quelconques M pris au dedans du quarré $ABDC$, une perpendiculaire MP ſur AC, & qu'on prenne ſur le côté AC du triangle donné ABC, les parties $AF = AP$, & $CD = PM$; les droites FG, DE, qui diviſe chacune par le milieu le triangle ABC, le couperont en quatre parties égales.

Maintenant puiſque le point M ſe trouve en même temps ſur la ligne courbe KML, & ſur l'Hyperbole OSR; il s'enſuit que les points D, F, pris ſur le côté AC du triangle donné, auront auſſi en même temps les deux conditions requiſes. Et c'eſt ce qui étoit propoſé.

S'il arrivoit que les deux courbes OSR, KML, ne ſe rencontraſſent point au dedans du quarré $ABDC$, ce ſeroit une marque infaillible qu'on auroit fait une ſuppoſition fauſſe, ſçavoir que les deux extremités D, F, ſe rencontrent ſur le côté AC. C'eſt pourquoi il fau-

droit les ſuppoſer ſur l'un des deux autres côtés, & recommencer le calcul, en faiſant des raiſonnemens ſemblables aux precedens, pour avoir une conſtruction par rapport à ce nouveau côté. Mais ſi l'on fait les trois remarques ſuivantes, il ſera aiſé de prevoir lequel des trois côtés on doit prendre pour celui ſur lequel tombent les deux extremités D, F, afin d'avoir ſûrement une ſolution, & de n'être pas obligé de recommencer.

La premiere eſt que $\overline{CL}^2 = \frac{aabb}{4aa-ac} + ad$, & $\overline{BK}^2 = \frac{aabb}{4aa-ad} + ac$; ce qui ſe voit en mettant dans $yy = \frac{aabb}{xx-ac} + ad$ à la place de AP (x) ſa valeur AC $(2a)$, & dans $xx = \frac{aabb}{yy-ad} + ac$ à la place de AQ (y) ſa valeur AB $(2a)$. La ſeconde conſiſte en ce que $CR = \sqrt{2aa} = BO$; ce qui ſe trouve en mettant dans l'autre équation $xx + yy + 4xy - 8ax - 8ay + 10aa = o$ dont le lieu eſt l'Hyperbole OSR, d'abord à la place de AP (x) ſa valeur AC $(2a)$, & enſuite à la place de AQ (y) ſa valeur AB $(2a)$. La troiſiéme ſe tire de ce qu'en ſuppoſant AK (c) moindre que CK (d) comme on le fait ici, il s'enſuit que $\overline{BK}^2 \left(\frac{aabb}{4aa-ad} + ac\right)$ eſt moindre que $\overline{CL}^2 \left(\frac{aabb}{4aa-ac} + ad\right)$. Or cela poſé, ſi l'on veut que $\overline{BK}^2$ $\left(\frac{aabb}{4aa-ad} + ac\right)$ ſoit moindre que $\overline{BO}^2$ $(2aa)$, on trouvera en mettant pour d ſa valeur $2a - c$ & operant à l'ordinaire que $bb + cc$ doit être moindre que $4aa$, c'eſt à dire, que le côté AB du triangle donné ABC doit être moindre que le côté AC : & ſi l'on veut que le quarré $\overline{CL}^2$ $\left(\frac{aabb}{4aa-ac} + ad\right)$ ſoit plus grand que $\overline{CR}^2$ $(2aa)$, on trouvera en mettant pour c ſa valeur $2a - d$ & operant à l'ordinaire que le côté BC $(\sqrt{bb + dd})$ doit ſurpaſſer le côté AC $(2a)$. Mais il eſt viſible que BK étant moindre que BO & CL plus grande que CR, les deux lignes courbes KML, OMR,

ſe coupent neceſſairement au dedans du quarré $ABDC$. D'où il ſuit que ſi le triangle donné ABC a tous les angles aigus, & qu'on prenne pour le côté AC ſur lequel on ſuppoſe que les deux points F, D, ſe rencontrent, celui des trois dont la grandeur eſt moyenne entre les deux autres & pour le côté AB le plus petit, le Problême aura toûjours neceſſairement une ſolution, puiſqu'alors *(fig. 261.)* le point K ſe trouvera entre les points A, C, & que AK eſt moindre que AC, comme l'on a ſuppoſé en faiſant le calcul ſur lequel tout ce raiſonnement eſt fondé. On trouvera en la même ſorte que ſi le triangle donné eſt rectangle ou obtus angle, & qu'on prenne pour le côté AC ſur lequel doivent tomber les deux extremités D, F, le côté moyen, on aura toûjours une ſolution ; de ſorte que cette remarque eſt generale pour toutes ſortes de triangles.

On voit dans la figure 262. que l'Hyperbole OSR & la courbe KML ſe coupent non ſeulement dans un point M, au dedans du quarré $ABDC$, comme le demande le Problême ; mais encore en un autre point M au dehors de ce quarré. Or ſi l'on veut ſçavoir quelle peut être l'utilité de cet autre point, on trouvera qu'il donne une des reſolutions du Problême ſuivant, dont celui-ci n'eſt qu'un cas particulier.

FIG. 263. Trouver ſur le côté AC du triangle donné ABC, deux points F, D, tels qu'ayant mené les droites FG, DE, qui ſont avec les deux autres côtés AB, BC, les triangles FGA, DEG, égaux chacun à la moitié du triangle ABC : les lignes FG, DE, s'entrecoupent à angles droits au point H, & le quadrilatere $BGHE$ ſoit égal au quart du triangle ABC.

FIG. 263. & 262. Car lorſque le point d'interſection M tombe au dedans du quarré $ABDC$, il eſt clair que les lignes AP, PM ſeront chacune moindre que le côté AC, & qu'ainſi les points B, D, qu'elles déterminent tomberont tous deux entre les points A, C ; ce qui reſoud le Problême énoncé comme l'on a fait au commencement. Mais

lorſque le point M tombe au dehors du quarré, comme alors l'une des lignes AP, PM eſt moindre que ſon côté AC, & l'autre plus grande ; il s'enſuit que l'un des points F, D, tombe ſur le côté AC du triangle donné, & l'autre ſur ce même côté prolongé, ce qui donne une autre ſolution du Problême énoncé comme l'on vient de faire en dernier lieu. FIG. 262. & 263.

EXEMPLE X.

441. UNE Section conique MAN étant donnée, avec un point S hors de ſon plan pour le ſommet du cone dont elle eſt la Section ; on demande la poſition du cercle $M\alpha N$ qui en eſt la baſe.

Je diſtingue cette queſtion en deux differens cas, dont le premier eſt lorſque la Section donnée eſt une Parabole, & le ſecond lorſque c'eſt une Ellipſe ou une Hyperbole.

Premier cas. La queſtion ſe reduit à trouver ſur la Parabole, le point A tel qu'ayant mené de ce point le diametre AP avec la ligne AS ; du point S la ligne SD parallele à AP ; & d'un point quelconque P du diametre AP, une ordonnée PM à ce diametre dans le plan de la Parabole, & une perpendiculaire αD à cette ordonnée dans le plan du triangle DSA, qui rencontre les côtés SA, SD, aux points α, D : le quarré de PM ſoit égal au rectangle $\alpha P \times PD$. Car décrivant dans le plan αPM un cercle qui ait pour diametre αD, il eſt clair qu'il paſſera par le point M, puiſque l'angle APM eſt droit, & que $\overline{PM}^2 = \alpha P \times PD$, qui eſt la proprieté eſſentielle du cercle ; c'eſt pourquoi menant le diametre $P\alpha$, & tirant de l'extremité D, du diametre $D\alpha$ du cercle une parallele DS à $P\alpha$, qui rencontre αA menée de ſon autre extremité α par l'origine A du diametre AP, en un point S, le cone qui a pour ſommet ce point, & pour baſe le cercle MAN, formera * par ſa rencontre avec le plan APM la Parabole même don- FIG. 264. * *Art.* 269.

née MAN. Voici comment on peut trouver le point A.

Soit v le parametre inconnu du diametre AP, & l'on aura par la proprieté de la Parabole, $\overline{PM}^2 = AP \times v$: mais pour ſatisfaire au Problême, il faut que $\overline{PM}^2 = aP \times PD$. Donc $aP \times PD = AP \times v$; ce qui donne cette proportion $AP. Pa :: PD. v$, qui ſe change en menant AO parallele à Da en cette autre $SO. AO :: PD.$ ou $AO. v$, & partant $SO \times v = \overline{AO}^2$.

Maintenant pour trouver les valeurs analytiques de ces lignes, je mene du point donné S ſur le plan de la Parabole la perpendiculaire SF, & du point F où elle rencontre ce plan, ſur l'axe BG la perpendiculaire FG, qui rencontre le diametre AP en H. Je tire du point A l'ordonnée AK à l'axe, & la perpendiculaire AQ à la tangente AL, leſquelles rencontrent en E & Q la ligne FQ menée par le point F parallelement à l'axe. J'éleve enfin du point Q une perpendiculaire QO ſur le plan de la Parabole, qui rencontrera SD dans le même point O, où la ligne AO parallele à aD la rencontre. Car la tangente AL étant parallele à l'ordonnée PM qui eſt perpendiculaire ſur aD, l'angle LAO ſera droit auſſi-bien que l'angle LAQ, & ainſi le plan QAO ſera perpendiculaire ſur AL, & ſur le plan de la Parabole qui paſſe par cette ligne; c'eſt pourquoi la ligne QO perpendiculaire à ce plan ſe trouvera dans le plan QAO & rencontrera par conſequent la ligne SD dans le même point O, où le plan QAO, c'eſt à dire, la ligne AO parallele à aD la rencontre. Il eſt à remarquer que toutes ces lignes excepté les deux FS, QO, ſont dans le plan de la Parabole. Cela poſé.

Je nomme les données SF ou QO, a; FG, ou KE, b; GB, c; le parametre de l'axe, p; & les inconnuës BK, x; KA ou GH, y; & j'ai à cauſe des triangles ſemblables AKT, AEQ, cette proportion AK (y). KT $(\frac{1}{2}p) :: AE$ $(b+y)$. $EQ = \frac{bp}{2y} + \frac{1}{2}p$: ce qui donne à cauſe

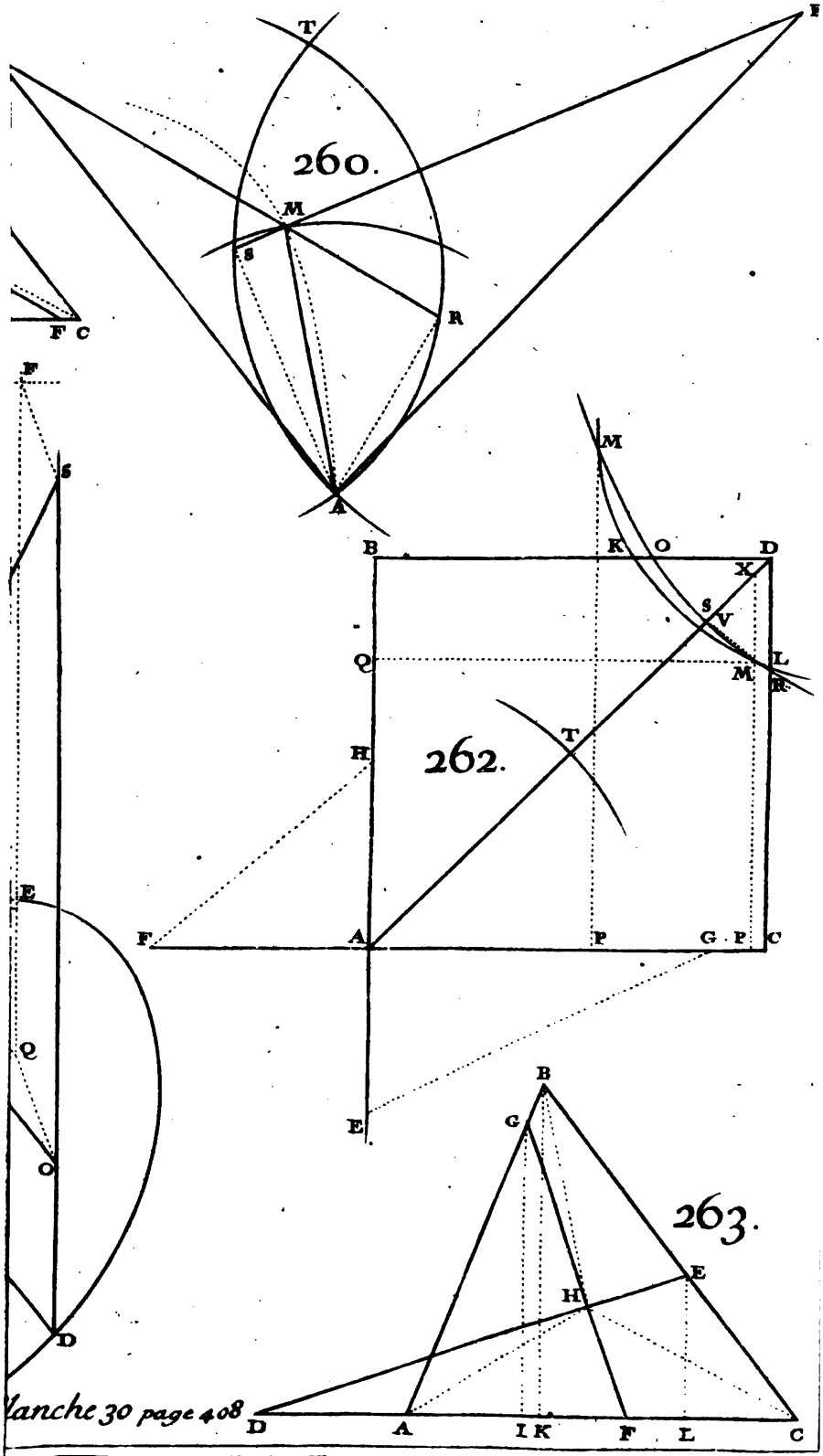


Planche 30 page 408

cause des triangles AEQ, AQO, rectangles en E & Q, le quarré $\overline{AO}^2$ ou $\overline{AE}^2 + \overline{EQ}^2 + \overline{QO}^2 = \frac{bbpp}{4yy} + \frac{bpp}{2y} + \frac{1}{4}pp + bb + 2by + yy + aa$. Or le parametre du diametre AP sçavoir $v = {}^{*}p + 4x = p + \frac{4yy}{p}$, en mettant pour x sa valeur $\frac{yy}{p}$; & SO ou FQ ou $GB + BK + EQ = c + x + \frac{bp}{2y} + \frac{1}{4}p = c + \frac{yy}{p} + \frac{bp}{2y} + \frac{1}{2}p$. Mettant donc ces valeurs analytiques à la place des lignes qu'elles expriment dans l'égalité $\overline{AO}^2 = SO \times v$, on trouvera $\frac{bbpp}{4yy} + \frac{bpp}{2y} + \frac{1}{4}pp + bb + 2by + yy + aa = cp + yy + \frac{bpp}{2y} + \frac{1}{2}pp + \frac{4cyy}{p} + \frac{4y^4}{pp} + 2by + 2yy$, c'est à dire en effaçant de part & d'autre les quantités qui se trouvent les mêmes, substituant pour yy la valeur px, & operant ensuite à l'ordinaire;

$$\begin{array}{llll} x^3 + cxx & + \frac{1}{4}cpx & - \frac{1}{16}bbp & = 0 \\ \quad + \frac{1}{2}p & - \frac{1}{4}aa & & \\ & - \frac{1}{4}bb & & \\ & + \frac{1}{16}pp & & \end{array}$$

dont la vraie racine que l'on peut trouver par le moyen * de la Parabole même donnée, exprimera la valeur de l'inconnuë BK, qui sert à déterminer le point A tel qu'on le demande.

Second cas. Toute la difficulté consiste à trouver sur l'Hyperbole donnée MAN, le point A tel qu'ayant mené le diametre AB avec les lignes SAa, BSb; & par un de ses points quelconques P, du diametre AB une ordon. PM dans le plan de l'Hyperbole, & une perpendiculaire ab à cette ordonnée dans le plan du triangle aSb: on ait le quarré $\overline{PM}^2$ égal au rectangle $aP \times Pb$. Cela se prouve de même que dans la Parabole, & voici ce qu'il faut faire pour trouver le point A.

Soit v le diametre conjugué au diametre AB, & soient menées dans le plan du triangle aSb, les lignes AO parallele à ab, & OZ parallele à AB qui rencon-

* Art. 17.

* Art. 387.

FIG. 265.

tre SA en Z; & l'on aura $AP \times PB$ à $\overline{PM}^2$ ou (à cauſe du cercle) à $aP \times Pb$, en raiſon compoſée de AP à Pa, ou ZO à OA, & de PB à Pb, ou de BA à AO; c'eſt à dire, comme $ZO \times AB$ eſt à $\overline{AO}^2$. Or par la proprieté de l'Hyperbole, $AP \times PB. \overline{PM}^2 :: \overline{AB}^2. vv$; & partant $ZO \times AB. \overline{AO}^2 :: \overline{AB}^2. vv = \frac{AB \times \overline{AO}^2}{ZO}$. Ce qui donne $OZ. AB$, ou $OS. SB :: \overline{AO}^2. vv$.

Maintenant pour trouver les valeurs analytiques, tant de la raiſon de OS à SB, que des quarrez $\overline{AO}^2$ & vv; je mene du point donné S, la ligne SF perpendiculaire ſur le plan des Hyperboles; du point F où elle rencontre ce plan, la perpendiculaire FG à l'axe DK qui eſt donné de poſition & de grandeur, puiſque les Hyperboles ſont données; & du point cherché A, l'ordonne AK à l'axe, & la perpendiculaire AT à la tangente AL, leſquelles rencontrent la ligne BF aux points E, Q. Je tire enfin BH parallele à l'axe qui rencontre GF en X, TV parallele à BF qui rencontre AE en V, & BD, QR, perpendiculaires ſur l'axe; & ayant élevé QO perpendiculaire ſur le plan de l'Hyperbole, on prouvera comme dans la Parabole qu'elle rencontrera la ligne BS au même point O, où la ligne AO parallele à ab la rencontre. Il eſt à remarquer que toutes ces lignes excepté les deux FS, QO, ſont dans le plan des Hyperboles. Cela poſé.

Soient nommées $SF = a$, $FG = b$, $CG = c$, le premier axe $= 2d$, le ſecond $= 2f$, les inconnuës CK ou $CD = x$, AK ou BD ou GX ou $KH = y$; & l'on aura DK ou $BH = xx$, DG ou $BX = c + x$, $GK = x - c$, $TK = \frac{ffx}{dd}$, & AT ou $\sqrt{\overline{TK}^2 + \overline{AK}^2} = \sqrt{yy + \frac{f^4xx}{d^4}} = \frac{f}{dd}\sqrt{ddxx + ffxx - a^4}$ en mettant pour yy ſa valeur $*\frac{ffxx}{dd} - ff$. Or les triangles ſemblables BXF, BHE, TKV donnent $BX(c+x). XF(b-y) :: BH(2x)$.

*Art. 81.

$HE = \frac{2bx-2xy}{c+x} :: TK\left(\frac{ffx}{dd}\right). KV = \frac{bffx-ffxy}{cdd+ddx}$; & partant AE ou $AK+KH+HE = \frac{2bx+2cy}{x+c}$, & AV ou $AK-KV = \frac{cddy+ddxy+ffxy-bffx}{cdd+ddx}$: mais à cauſe des triangles ſemblables AVT, AEQ, & ATK, QTR, il vient $AV. AT :: AE. AQ = \frac{2bfx+2cfy\sqrt{ddxx+ffxx-d^4}}{ddxy+ffxy-bffx+cddy}$, & $AT. TK :: QT. TR :: AT+TQ$ ou $AQ. KT+TR$ ou $KR = \frac{2bffxx+2cffxy}{ddxy+ffxy-bffx+cddy}$. Donc $\frac{GR \text{ ou } GK+KR}{DG} = \frac{ddxy+ffxy+bffx-cddy}{ddxy+ffxy-bffx+cddy}$, $\frac{DR \text{ ou } DK+KR}{DG} = FS = \frac{2addxy+2affxy}{ddxy+ffxy-bffx+cddy} = QO$, puiſque $DG. DR :: BF. BQ :: FS. QO$; & à cauſe du triangle rectangle AQO, le quarré $\overline{AO}^2$ ou $\overline{AQ}^2+\overline{QO}^2 = \frac{\overline{2bfx+2cfy}^2 * \overline{ddxx+ffxx-d^4} + \overline{2addxy+2affxy}^2}{\overline{ddxy+ffxy-bffx+cddy}^2}$.

De plus $SO. SB :: FQ. FB :: GK. GD$, & $vv = {}^*4xx+4yy+4ff-4dd$ ou $4xx-4dd+\frac{4ffxx}{dd}$. * Art. 125.

Si donc l'on met dans la proportion $SO. SB :: \overline{AO}^2. vv$, à la place tant de la raiſon de SO à SB ou GR à GD, que des quarrés $\overline{AO}^2$ & vv, les valeurs analytiques que l'on vient de trouver, on formera en multipliant les extrêmes & les moyens cette égalité $\overline{2bfx+2cfy}^2 * \overline{ddxx+ffxx-d^4} + \overline{2addxy+2affxy}^2 = \overline{ddxy+ffxy+bffx-cddy} * \overline{ddxy+ffxy-bffx+cddy} * 4xx+\frac{4ffxx}{dd}-4dd$, dans laquelle tous les termes où y ſe rencontrera au premier degré s'effaceront, & mettant à la place du quarré yy ſa valeur $\frac{ffxx}{dd}-ff$, on trouvera $bbd^4x^4+2bbddffx^4+bbf^4x^4-bbd^6xx-ccd^4xx-bbffd^4xx-ccffd^4xx+ccffa^6+cca^8 = \overline{ddxx+ffxx-d^4-aadd-ccdd} * ddx^4+2ffx^4+\frac{f^4}{dd}x^4-a^4xx$

$-2ddffxx-f^4xx|$ qui se change en faisant pour abreger $dd+ff=mm$, $bb+cc=nn$, $aa+dd+cc=rr$, en cette autre $bbm^4x^4-mmnnd^4xx+ccmmd^6=mmxx-ddrrx\frac{m^4}{dd}x^4-m^4xx|$ qui se reduit enfin en faisant $xx=dz$ à cette égalité du troisiéme degré.

$$z^3\left\{\begin{matrix}-d\\-\frac{drr}{mm}\\-\frac{dbb}{mm}\end{matrix}\right\}zz\left\{\begin{matrix}+\frac{ddrr}{mm}\\+\frac{nnd^4}{m^4}\end{matrix}\right\}z-\frac{ccd^5}{m^4}=0;$$

dont l'une des racines, sçavoir celle qui est plus grande que d, est telle que prenant une moyenne proportionnelle entre cette racine & d moitié du premier axe; cette moyenne proportionnelle exprime la valeur de CK qui sert à déterminer le point cherché A. On pourra se servir de l'Hyperbole même donnée pour trouver les racines de cette égalité, par le moyen des articles 396 & 399. du Livre precedent.

Lorsque $CG\ (c)=0$, c'est-à-dire, lorsque le point F tombe sur le second axe; il est visible que cette égalité se change en une autre du second degré, puisque le dernier terme étant nul, elle se divise par z. Mais lorsque $FG\ (b)=0$, ce qui arrive lorsque le point F tombe sur le premier axe; le terme $\frac{dbbz}{mm}z$ s'efface dans l'égalité precedente, & un qui est $bb+cc$ devient cc; ce qui fait qu'elle se peut diviser par $z-d$, & qu'elle se reduit par conséquent à celle-ci $zz-\frac{drr}{mm}z+\frac{ccd^4}{m^4}=0$, qui n'est encore que du second degré. Enfin si l'on fait dans cette derniere égalité $c=0$; ce qui doit arriver lorsque le point F tombe sur le centre C, puisqu'alors les lignes b & c deviennent chacune nulles; on aura $z=\frac{drr}{mm}$, & partant dz ou $xx=\frac{ddrr}{mm}$, & $x=\frac{dr}{m}=d\sqrt{\frac{aa+dd}{dd+ff}}$.

$$x = \frac{dr}{m} = d\sqrt{\frac{aa + dd}{dd + ff}}.$$

Il eſt inutile d'avertir que le Problême ſe reſoud par la même voie dans l'Ellipſe, n'y ayant de changement que dans quelques ſignes. Mais on peut toûjours rapporter, ſi l'on veut, ce ſecond cas au premier, de la maniere qui ſuit.

Ayant mené par un point quelconque B de l'une des Hyperboles données, une tangente BG; & ayant fait paſſer par cette tangente, & par le ſommet donné S, un plan GBS: ſoit mené par tout où l'on voudra, un autre plan HKL parallele à celui ci. Je dis qu'il formera dans la ſurface conique, décrite par une ligne droite indéfinie attachée en S, & muë autour de l'Hyperbole oppoſée MAN, une ligne courbe HKL qui ſera une Parabole; de ſorte que toute la difficulté eſt reduite au cas precedent. Car ſuppoſant que le cercle $DHMNL$ ſoit la baſe du cone, qui a pour ſommet le point S, & pour Section l'Hyperbole MAN avec ſon oppoſée; il eſt clair que le plan GBS touchant les deux ſurfaces coniques oppoſées qui ont pour baſe ce cercle, dans le côté BSD, formera dans le plan de la baſe, une ligne droite DE qui touchera cette baſe en un point D. Or comme cette ligne eſt la directrice par rapport à la Section HKL, il s'enſuit ſelon la définition dixiéme du Livre VI. que cette Section ſera une Parabole. FIG. A.

Ce Problême a été trés-celebre du temps de M. Deſcartes, & l'on en a trouvé une ſolution parmi ſes Manuſcrits, qui eſt imprimée à la fin de la 75e Lettre du 3e tome. Si l'on veut ſe donner la peine de comparer ſa ſolution avec la mienne, on verra que non ſeulement elle eſt moins naturelle, puiſqu'elle ne va pas droit au but, mais encore qu'elle eſt beaucoup plus embarraſſée. Auſſi ne donne-t-il point l'analyſe du cas où la Section eſt une Ellipſe ou une Hyperbole; & il ſe contente d'aſſurer que l'égalité qui renferme les conditions du Problême, ne doit pas paſſer le quatriéme degré.

LEMME I.

FIG. 266. 267. 268. 442. SI *par l'extremité* B *d'un diametre* AB, *l'on mene une corde quelconque* BD *qui termine l'arc* AD *moindre que la demie circonference ; & qu'ayant pris par tout où l'on voudra deux arcs contigus* EF, FG, *égaux chacun à l'arc* AD, *on tire les cordes* BE, BF, BG : *je dis que la corde du milieu* BF *eſt à la ſomme ou à la difference de ſes deux voiſines* BE, BG, *comme le rayon* CB *eſt à la corde* BD : *ſçavoir à la ſomme lorſque l'origine commune* B *des cordes* BD, BE, BF, BG, *ne tombe ſur pas un des deux arcs* EF, FG ; *& au contraire à la difference, lorſqu'il tombe ſur l'un ou l'autre de ces deux arcs.*

Car ſoit du centre *F*, & du rayon *FB*, décrit un arc de cercle qui coupe la corde *BG* prolongée, s'il eſt neceſſaire, au point *H*, pour avoir une triangle iſoſcelle *BFH*, qui ſera ſemblable au triangle iſoſcelle *BCD* ; puiſque l'angle *FBH* a pour meſure la moitié de l'arc *FG* égal à l'arc *AD*, dont la moitié eſt auſſi la meſure de l'angle *CBD*. On aura donc *FB. BH :: CB. BD*, de ſorte qu'il ne reſte qu'à démontrer que la ligne *BH* eſt la ſomme des deux cordes *BE*, *BG*, dans le premier cas, & leur difference dans le ſecond. Pour le faire.

FIG. 266. Soient tirées les cordes *EF*, *FG*, & on aura deux triangles *BEF*, *FHG*, qui ſeront ſemblables & égaux. Car dans le premier cas l'angle *FHB* ou *FHG*, eſt égal à l'angle *FBH* qui vaut l'angle *FBE*, puiſque les arcs *FG*, *FE*, ſont égaux ; & de plus l'angle *BEF* eſt égal à l'angle *FGH*, puiſqu'ils ont chacun pour meſure la moitié du même arc *BF* ; & partant l'angle *GFH* eſt égal à l'angle *EFB*. Or les côtés *FE*, *FG*, & *FB*, *FH*, ſont égaux entr'eux. Le côté *GH* ſera donc égal au côté *BE*. Donc &c.

FIG. 267. 268. On prouvera à peu près de même dans le ſecond cas que les triangles *FHG*, *FBE*, ſont ſemblables & égaux ; & qu'ainſi la ligne *BH* eſt la difference des deux cordes *BG*, *BE*.

LEMME II.

443. SOIT *une Table dont le premier rang parallele renfermant le nombre* 2, *&* *le ſecond la lettre* x ; *le troiſiéme* xx — 2 *ſoit le produit du ſecond par* x, *moins le premier* ; *le quatriéme* x^3 — 3x *ſoit le produit du troiſiéme par* x, *moins le ſecond, le cinquiéme* x^4 — 4xx + 2 *ſoit le produit du quatriéme par* x, *moins le troiſiéme, & ainſi de ſuite à l'infini. Soit de plus un arc de cercle quelconque* AR *diviſé en autant de parties égales qu'on voudra, aux points* D, E, F, G, *&c.* FIG. 269. 270. *Je dis que ſi le premier rang* 2 *de la Table exprime la valeur du diametre* BA, *&* *le ſecond rang* x *celle de la premiere corde* BD, *le troiſiéme rang* xx — 2 *exprimera la valeur de la ſeconde corde* BE, *le quatriéme rang* x^3 — 3x *celle de la troiſiéme corde* BF, *&* *ainſi de ſuite juſqu'à la derniere* BR : *en obſervant que ces cordes deviennent negatives, lorſqu'elles paſſent de l'autre côté du point* B.

1er	2	*Table pour la diviſion des arcs de cercle en parties égales.*
2e	1x	
3e	1xx — 2	
4e	$1x^3$ — 3x	
5e	$1x^4$ — 4xx + 2	
6e	$1x^5$ — $5x^3$ + 5x	
7e	$1x^6$ — $6x^4$ + 9xx — 2	
8e	$1x^7$ — $7x^5$ + $14x^3$ — 7x	
9e	$1x^8$ — $8x^6$ + $20x^4$ — 16xx + 2	
10e	$1x^9$ — $9x^7$ + $27x^5$ — $30x^3$ + 9x	
11e	$1x^{10}$ — $10x^8$ + $35x^6$ — $50x^4$ + 25xx — 2	
12e	$1x^{11}$ — $11x^9$ + $44x^7$ — $77x^5$ + $55x^3$ — 11x	
13e	$1x^{12}$ — $12x^{10}$ + $54x^8$ — $112x^6$ + $105x^4$ — 36xx + 2	
14e	$1x^{13}$ — $13x^{11}$ + $65x^9$ — $156x^7$ + $182x^5$ — $91x^3$ + 13x	

Car 1°. Lorſque l'arc *AR* eſt moindre que la demie circonference *ADB* ; ſi l'on multiplie une corde quelconque *BF* par *x* ; & qu'on retranche de ce produit la corde *BE* qui la precede, on aura la corde *BG* qui la ſuit immédiatement, puiſque ſelon le Lemme prece- FIG. 269.

dent CB (1). BD (x) :: BF. $BE + BG = x\,BF$, & partant $BG = x\,BF - BE$. Donc &c.

FIG. 270. 2°. Lorſque l'arc AR eſt plus grand que la demie circonference ADB ; il eſt viſible que l'origine commune B de toutes les cordes ſe trouvera neceſſairement ſur l'une des parties égale comme GH, dans leſquelles l'arc AR eſt diviſé. Or l'on prouvera comme dans le premier cas que le troiſiéme rang de la Table exprime la valeur de BE, le quatriéme celle de BF, & ainſi de ſuite juſqu'à BG : mais il reſte à démontrer que le rang qui ſuit celui qui exprime la corde BG, n'exprimera point la valeur de $+ BH$, mais celle de $- BH$; & de même que le rang qui ſuit ce dernier exprime la valeur de $- BI$, & ainſi de ſuite juſqu'à $- BR$.

Selon la formation de la Table, le rang qui ſuit celui qui exprime BG eſt $x\,BG - BF$. Or par le Lemme CB (1). BD (x) :: BG. $BF - BH$, & partant $- BH = x\,BG - BF$; c'eſt à dire que $- BH$ vaut le rang parallele de la Table qui ſuit immédiatement celui qui exprime la valeur de BG. Mais ſelon la formation de la même Table, le rang qui ſuit celui qui vaut $- BH$ eſt $- x\,BH - BG$ valeur de BI, puiſque ſelon le Lemme $x\,BH = BI - BG$: & de même le rang qui ſuit celui qui vaut $- BI$ eſt ſelon la formation de cette même Table $- x\,BI + BH$ valeur de la corde negative $- BL$, puiſque ſelon le Lemme $x\,BI = BL + BH$. Or il eſt viſible qu'il en eſt de même de toutes les cordes qui ſuivent BL juſqu'à BR ; & c'eſt ce qui reſtoit à démontrer.

COROLLAIRE I.

FIG. 269. 270. 444. DE-LA il eſt évident que ſi l'arc AR eſt diviſé en cinq parties égales, le ſixiéme rang de la Table $x^5 - 5x^3 + 5x$ exprimera la valeur de la corde BR qui ſoutend l'arc BR difference de l'arc AR & de la demie circonference ADB ; que s'il étoit diviſé en ſept parties égales, le huitiéme rang ſeroit la valeur de BR ;

&

& en general qu'il faut augmenter d'une unité le nombre des parties égales, afin d'avoir le rang de la Table qui vaut BR : en obſervant que le rayon $CB = r$, que la premiere corde $BD = x$, & que la derniere corde BR eſt negative lorſque l'arc AR eſt plus grand que la demie circonference.

COROLLAIRE II.

445. ON voit par la compoſition de cette Table, 1°. Que le nombre 2 eſt le premier terme de chaque rang perpendiculaire. 2°. Que les coëficiens de tous les autres termes du premier rang perpendiculaire ſont égaux à l'unité. 3°. Que le coëficient d'un terme quelconque de tel rang perpendiculaire qu'on voudra, eſt toûjours égal au coëficient d'un pareil terme dans le rang perpendiculaire à gauche, plus au coëficient du terme qui eſt au deſſus de lui : c'eſt à dire, par exemple, que le coëficient 14. du quatriéme terme $14x^3$ du troiſiéme rang perpendiculaire, eſt égal au coëficient 5 du quatriéme terme $5x^3$ du deuxiéme rang perpendiculaire qui eſt le rang à gauche, plus au coëficient 9. du terme $9xx$ qui eſt au deſſus du terme $14x^3$.

REMARQUE.

446. SI l'on continuoit à diviſer la circonference en parties égales aux arcs AD, DE, &c. au-delà du point R; il eſt clair que les rangs paralleles de la Table qui ſuivent celui qui exprime $-BR$ continuëroient à exprimer par ordre toutes les cordes négatives qui ſuivroient BR, juſqu'à ce que repaſſant le point B elles redeviendroient encore négatives; & ainſi de ſuite alternativement poſitives & negatives, autant de fois qu'elles paſſeroient le point B juſqu'à l'infini. Fig. 270.

EXEMPLE I.

447. COUPER un arc de cercle donné AR, en autant de parties égales AD, DE, EF, FG, &c. qu'on voudra.

FIG. 269. 270. Ayant mené le diametre AB & la corde BR, & nommé le rayon donné CA ou CB, 1; la corde donnée BR, a; on formera une égalité dont le premier membre ſera le rang parallele de la Table qui ſurpaſſe d'une unité le nombre des parties égales, & le ſecond ſera $\mp a$; ſçavoir $+a$ lorſque l'arc AR eſt moindre que la demie circonference, & $-a$ lorſqu'il eſt plus grand. Or il eſt viſible, ſelon l'article 443. que la reſolution de cette égalité doit fournir pour l'une de ſes racines x, une valeur BD telle qu'ayant décrit du point B comme centre & de l'intervalle BD un arc de cercle, il coupera ſur l'arc donné AR la premiere des parties égales cherchées AD.

Qu'il faille, par exemple, diviſer l'arc donné AR en trois parties égales; on trouvera $x^3 - 3x = \mp a$, dont l'une des racines BD terminera la premiere des trois parties égales qu'on demande. S'il falloit diviſer l'arc AR en cinq parties égales, on auroit $x^5 - 5x^3 + 5x = \mp a$; & de même, s'il falloit diviſer en ſept, il viendroit $x^7 - 7x^5 + 14x^3 - 7x = \mp a$: de ſorte que toute la difficulté ſe reduit à trouver les racines de ces égalités. Or c'eſt ce qu'on a enſeigné dans le Livre precedent. Donc &c.

Il eſt à remarquer que ces égalités ſont les plus ſimples qu'il eſt poſſible, lorſque le nombre des parties égales eſt un nombre premier. Mais lorſqu'il eſt compoſé de deux ou pluſieurs nombres premiers, on diviſera d'abord l'arc donné en autant de parties égales que l'un de ces nombres a d'unités, & enſuite la premiere de ces parties en autant de parties égales que l'un des nombres reſtans a d'unités, & ainſi de ſuite juſqu'à ce qu'on ait épuiſé tous les nombres premiers, dont le produit for-

me le nombre donné ; ce qui donnera enfin la premiere des parties égales qu'on cherche : ſi l'on veut, par exemple, diviſer l'arc AR en trente parties égales, il faudra d'abord le diviſer en cinq, enſuite la premiere de ces cinq parties en trois, & enfin la premiere de ces trois en deux, pour avoir la trentiéme partie qu'on demande, & cela parce que $30 = 5 * 3 * 2$.

REMARQUE I.

448. DEUX points donnés A, R, ſur la circonference d'un cercle en déterminent non ſeulement deux arcs, dont l'un AR eſt moindre que la demie circonference, & l'autre ABR plus grand ; mais encore une infinité de portions, dont les unes ſont la circonference entiere plus l'arc AR, deux fois la circonference plus l'arc AR, trois fois la circonference plus l'arc AR &c. & les autres ſont la circonference entiere plus l'arc ABR, deux fois la circonference plus l'arc ABR, trois fois la circonference plus l'arc ABR &c ; dont la raiſon eſt que la circonference d'un cercle rentrant en elle-même, on peut conſiderer cette ligne courbe comme faiſant une infinité de revolutions autour d'elle-même. Si donc l'on nomme l'arc AR, d ; la circonference entiere c ; l'arc ABR ſera $c - d$ & l'on aura ces deux ſuites, FIG. 270. 271, 272 &c.

1e. $d, c+d, 2c+d, 3c+d, 4c+d, 5c+d, 6c+d, 7c+d, 8c+d$, &c.

2e. $c-d, 2c-d, 3c-d, 4c-d, 5c-d, 6c-d, 7c-d, 8c-d$, &c.

qui expriment par ordre toutes les portions de circonferences terminées par les deux points A, R. Cela poſé.

Si l'arc AD eſt une aliquote quelconque de l'arc AR moindre que la demie circonference ; & qu'ayant inſcrit dans le cercle un poligone $DEFGH$ &c. d'un pareil nombre de côtés à commencer par le point D, on tire de l'extremité B du diametre AB aux angles du poligone les cordes BD, BF, BG, BH, &c.

je dis qu'elles terminent des aliquotes pareilles de tous les termes de ces deux ſuites, dont l'origine fixe eſt toûjours au point A.

FIG. 271. Car ſoit pour fixer les idées l'arc $AD = \frac{1}{5}d$; il eſt clair que l'arc $ADE = \frac{c+d}{5}$, l'arc $ADEF = \frac{2c+d}{5}$, l'arc $ADEFG = \frac{3c+d}{5}$ l'arc $ADEFGH = \frac{4c+d}{5}$ qui ſont les 5es parties ou les aliquotes pareilles des cinq premiers termes de la premiere ſuite. Or ſi l'on diviſe tel autre de ſes termes qu'on voudra par 5, il eſt viſible que le quotient renferme au juſte un certain nombre de fois la circonference entiere plus une des cinq fractions precedentes. Donc puiſque la corde qui termine un arc, dont l'origine eſt en A, eſt la même que celle qui termine cet arc plus la circonference repetée autant de fois qu'on veut, il s'enſuit que les cordes BD, BE, BF, BG, BH, terminent les cinquiemes parties de tous les termes de la premiere ſuite. On prouvera de la même maniere que les arcs AH, AHG, $AHGF$, $AHGFE$, $AHGFED$ ſont les cinquiémes parties des cinq premiers termes de la ſeconde ſuite, & qu'ainſi les cordes BH, BG, BF, BE, BD, terminent les cinquiémes parties de tous les termes de la ſeconde ſuite. Mais il eſt viſible que cette démonſtration ſe peut appliquer à telle autre aliquote qu'on voudra de l'arc AR. Donc &c.

FIG. 273. 274. Delà il ſuit que ſi l'on réünit les deux ſuites precedentes en une ſeule $d, c \overline{+} d, 2c \overline{+} d, 3c \overline{+} d$ &c; les deux cordes voiſines de part & d'autre de la plus grande ou premiere BD qui termine l'aliquote AD de l'arc AR moindre que la demie circonference, termineront des aliquotes pareilles du ſecond terme $c \overline{+} d$ de la ſuite; que les deux cordes voiſines de celles-ci termineront des aliquotes pareilles du troiſiéme terme $2c \overline{+} d$ de la ſuite; & ainſi à l'infini de deux en deux juſqu'aux dernieres lorſque l'aliquote eſt impaire, & juſqu'à la derniere lorſqu'elle eſt paire. Ainſi lorſque l'arc $AD = \frac{1}{7}AR$, les cordes BE, BH, terminent des deux arcs ADE, AH,

cinquiémes parties du ſecond terme $c \mp d$ de la ſuite, c'eſt à dire de la circonference plus l'arc AR, & de la circonference moins cet arc ; les deux cordes BF, BG, voiſines de celles-ci termineront deux arcs $ADEF$, AHG, qui ſont les cinquiémes parties du troiſiéme terme $2c \mp d$ de la ſuite : & de même lorſque l'arc $AD = \frac{1}{6} AR$; les deux cordes BE, BK, voiſines de part & d'autre de la premiere ou plus grande BD terminent les deux arcs ADE, AK, qui ſont les ſixiémes parties du ſecond terme $c \mp d$; les deux cordes BF, BH, voiſines de ces deux-ci terminent les deux arcs $ADEF$, AKH, ſixiémes parties du troiſiéme terme $2c \mp d$; & enfin la derniere corde BG termine les deux arcs $ADEFG$, $AKHG$, ſixiémes parties du quatriéme terme $3c \mp d$.

On entend dans les remarques ſuivantes par *cordes impaires*, celles qui étant priſes de part & d'autre de la premiere ou plus grande BD, ſe trouvent dans les lieux impairs à commencer par cette plus grande ; & par *cordes paires*, celles qui étant priſes de part & d'autre de la même BD, ſe trouvent dans des lieux pairs. Ainſi lorſque l'arc $AD = \frac{1}{5} AR$; les cordes BD, BF, BG, ſont des cordes impaires, & les cordes BE, BH, des cordes paires : & de même lorſque l'arc $AD = \frac{1}{6} AR$; les cordes BD, BF, BH, ſont des cordes impaires, & les côtés BE, BK, BG, ſont des cordes paires.

REMARQUE II.

449. SI l'arc AD eſt une ali quote quelconque de l'arc AR moindre que la demie circonference ARB ; & qu'ayant inſcrit dans le cercle à commencer par le point D, un poligone $DEFGH$ &c. d'un pareil nombre de côtés, on tire de l'extremité B du diametre AB aux angles du poligone les cordes BD, BE, BF, BG, BH &c : je dis que les cordes impaires lorſque l'arc AD eſt une aliquote impaire de l'arc AR, & leurs quar- FIG. 273. 274.

rés lorſqu'il en eſt une aliquote paire, expriment les racines vraies de l'égalité qu'on trouve en égalant à la grandeur poſitive $+a$, le rang parallele de la Table dont l'expoſant ſurpaſſe d'une unité le nombre des côtés du poligone ; & que les cordes paires dans le premier cas, & leurs quarrés dans le ſecond, expriment les racines vraies de l'autre egalité qu'on trouve en égalant à la grandeur negative $-a$, le même rang parallele de la Table.

FIG. 271. 273. Soit, par exemple, l'arc $AD = \frac{1}{5} AR$; je dis que les cordes impaires BD, BF, BG, ſont les racines vraies de l'égalité $x^5 - 5x^3 + 5x = a$, & que les cordes paires FIG. 272. 274. BE, BH, ſont les racines vraies de l'autre égalité $x^5 - 5x^3 + 5x = -a$. Si l'arc $AD = \frac{1}{6} AR$; les quarrés des cordes impaires BD, BF, BH, ſeront les racines vraies de l'égalité $x^6 - 6x^4 + 9xx - 2 = a$, & les quarrés des cordes paires BE, BK, BG, ſeront les racines vraies de l'autre égalité $x^6 - 6x^4 + 9xx - 2 = -a$.

Car ſi l'on propoſe de diviſer la circonference entiere repetée un certain nombre de fois plus ou moins l'arc AR, en parties égales dont la premiere ſoit moindre que la demie circonference, il eſt clair ſelon l'article 444 qu'on formera la même Table que pour la diviſion de l'arc AR : en obſervant que les cordes doivent changer neceſſairement une fois de ſigne (avant que d'arriver à la derniere BR) lorſque la circonference n'eſt repetée qu'une fois, par ce que l'origine commune B de toutes ſe trouve ſur l'une des parties égales ; que les cordes doivent changer deux fois de ſignes, lorſque la circonference eſt repetée deux fois, parce que l'origine B ſe trouve neceſſairement ſur deux des parties égales ; qu'elles doivent changer trois fois, lorſque la circonference eſt repetée trois fois, parce que l'origine B ſe trouve ſur trois parties égales, & ainſi de ſuite. La corde BR ſera donc poſitive lorſquil s'agit de diviſer en parties égales l'arc AR & la circonference repetée un nombre pair de fois plus ou moins l'arc AR ; & negative lorſque la circonferen-

ce eſt repetée un nombre impair de fois : c'eſt à dire que dans le premier cas on doit égaler le rang parallele de la Table à la grandeur poſitive $+a$. Et par conſequent les cordes impaires ou leurs quarrés ſeront les racines vraies de l'autre égalité dont l'un des membres eſt $-a$. *Ce qu'il falloit, &c.*

REMARQUE III.

450. LES mêmes choſes étant poſées, ſi l'arc AD eſt une aliquote impaire de l'arc AR ; il eſt clair par l'inſpection de la Table, que tous les termes pairs, c'eſt à dire, le deuxiéme, quatriéme, ſixiéme, &c, excepté le dernier terme a, manquent toûjours dans les deux égalités qu'on trouve ſelon la remarque precedente. Or l'on ſçait en Algebre, qu'en changeant de ſignes les termes pairs d'une égalité, on ne fait qu'en changer les racines vraies en fauſſes & les fauſſes en vraies. D'où il ſuit que les cordes paires qui ſont des racines vraies de l'égalité dont l'un des membres eſt $-a$, deviendront des racines fauſſes de l'autre égalité dont l'un des membres eſt $+a$. Par exemple, ſi l'arc $AD = \frac{1}{5} AR$; les cordes impaires BD, BF, BG, ſeront les racines vraies de l'égalité $x^5 - 5x^3 + 5x = a$, & les cordes paires BE, BH, en ſeront les racines fauſſes. FIG. 271. 273.

On peut tirer de ces deux dernieres Remarques pluſieurs Theorêmes la plûpart entierement nouveaux, touchant l'inſcription des poligones reguliers ; ſi l'on fait attention que la grandeur connuë du ſecond terme d'une égalité renferme la ſomme de ſes racines, que celle du troiſiéme terme renferme la ſomme des plans alternatifs de ſes racines, que celle du quatriéme terme renferme la ſomme des ſolides alternatifs &c, & enfin que le dernier terme eſt égal au produit de toutes les racines les unes par les autres. J'en mettrai ici quatre des principaux, après avoir fait la Remarque ſuivante qui peut être de quelque utilité.

REMARQUE. IV.

FIG. 271. 273. 451. LES mêmes choſes étant poſées que dans la Remarque precedente, où l'on veut que l'aliquote AD de l'arc AR ſoit impaire ; je dis qu'entre les cordes renfermées dans la demie circonference ARB qui contient l'arc AR, la derniere ou plus petite BF ſoûtend un arc BF qui eſt à l'arc BR, en même raiſon que l'arc AD à l'arc AR.

Car ſoit l'arc AD la cinquiéme partie de l'arc AR, & par conſequent l'arc DE la cinquiéme partie de la circonference ; il eſt clair que la demie circonference ARB contiendra deux fois & demie l'arc DE, c'eſt à dire, deux fois l'arc DE ou bien l'arc DEF plus la cinquiéme partie de la demie circonference. Donc l'arc AD plus l'arc BF vaut la cinquiéme partie de la demie circonference ARB. Donc puiſque AD eſt la cinquiéme partie de l'arc AR, il s'enſuit que BF ſera auſſi la cinquiéme partie de l'arc BR complement à deux droits de l'arc AR. Mais ce que l'on vient de démontrer ſubſiſte avec la même force, ſoit que l'arc AD ſoit la cinquiéme partie de l'arc AR, ou bien une autre aliquote quelconque impaire. On a donc eu raiſon de dire en general &c.

De là on voit que ſi l'on nomme b la corde BR d'un arc quelconque BR moindre que la demie circonference, dont le rayon eſt 1 ; & que l'on forme une égalité dont l'un des membres ſoit b, & l'autre le rang parallele de la Table qui ſurpaſſe d'une unité le nombre des parties égales dans leſquelles l'arc BR doit être diviſé : cette égalité aura pour l'une de ſes racines la corde BF de la premiere de ſes parties, & par conſequent pour une autre de ſes racines, la corde BG de la premiere d'un pareil nombre de parties égales de l'arc BAR complement à quatre droits de l'arc BR.

THEOR. I.

THEORESME I.

452. *Si l'on inſcrit au dedans d'un cercle un poligone regulier quelconque* DEFGH &c. *d'un nombre impair de côtés ; & qu'on tire d'un point quelconque* B *de la circonference à tous les angles du poligone des cordes* BD, BE, BF, BG, BH, &c : *je dis*, FIG. 271.

1°. *Que la ſomme des cordes impaires* BD, BF, BG &c, *à commencer par la plus grande* BD *ſera toûjours égale à la ſomme des cordes paires* BE, BH &c ; *c'eſt à dire que la plus petite corde* BF — BE + BD — BH + BG &c = 0.

Car menant le diametre *BA*, & prenant l'arc *AR* qui contienne l'arc *AD* autant de fois que le poligone a de côtés, il eſt clair comme l'on vient de voir que ſi l'on nomme la corde *BR*, *a* ; & le rayon *CA* ou *CB*, 1 ; les cordes impaires *BD*, *BF*, *BG &c*, ſeront les racines vraies, & les cordes paires *BE*, *BH &c*, les racines fauſſes de l'égalité qui a pour l'un de ſes membres + *a*. Or puiſque le ſecond terme, qui ſelon qu'on démontre en Algebre contient la ſomme des racines, manque toûjours dans cette égalité ; il s'enſuit &c.

2°. *Que ſi l'on mene le diametre* BA, *& qu'ayant pris l'arc* AR *qui contienne l'arc* AD *autant de fois que le poligone a de côtés, on tire la corde* BR : *le produit* BD * BE * BF * BG * BH &c *de toutes les cordes* BD, BE, BF, BG, BH &c *les unes par les autres, ſera toûjours égal au produit de la corde* BR *par une puiſſance du rayon* CA *qui ait pour expoſant le nombre des cordes* — 1.

Car ce dernier produit vaut le membre *a* ; puiſque *BR* = *a*, & qu'on prend dans la Table pour l'unité le rayon *CA*. Or comme le terme *a* eſt toûjours le dernier terme de l'égalité qui a pour ſes racines toutes les cordes *BD*, *BE*, *BF*, *BG*, *BH &c*, & que le dernier terme d'une égalité contient toûjours ſelon ce qu'on démontre en Algebre le produit de toutes ſes racines : il s'enſuit &c.

THEORESME II.

FIG. 673. 453. SI *l'on diviſe une demie circonference* AEB *en un nombre quelconque impair de parties égales, dont les deux premieres ſoient l'arc* AE, *les quatre premieres l'arc* AEF, *& ainſi de ſuite de deux en deux juſqu'à la derniere; & qu'on tire les cordes* BE, BF &c: *je dis,*

1°. *Que la premiere de ces cordes* BE, *moins la ſeconde* BF, *plus la troiſiéme, moins la quatriéme &c. juſqu'à la derniere inclufivement; eſt toûjours égale au rayon.*

2°. *Que le produit* BE × BF &c. *de toutes les cordes les unes par les autres, eſt égal à une puiſſance convenable du rayon. Ainſi dans cet exemple où le nombre des diviſions eſt* 5, *& où il n'y a par conſequent que deux cordes* BE, BF; *on aura* 1°. $BE - BF = CA$. 2°. $BE \times BF = \overline{CA}^2$.

Car inſcrivant dans le cercle entier le poligone regulier *E F G H* dont le nombre des côtés ſoit égal au nombre des diviſions à commencer par le point *A*; & tirant de l'autre extremité *B* du diametre *A B* à tous les angles de ce poligone des cordes *B D*, *B E*, *B H*, *B F*, *B G*, *&c*; il eſt clair 1°. Que la plus grande de ces cordes *B D* eſt égale au diametre *B A*, & qu'ainſi l'arc *A D* étant nul ou zero, l'arc *A R* le ſera auſſi; d'où l'on voit que la corde *B R* ſera auſſi égale au diametre *B A*. 2°. Que les cordes *B E*, *B H*, *B F*, *B G &c*, étant priſes deux à deux ſont égales entr'elles. Or cela poſé, ſi l'on applique le Theorême precedent à ce cas particulier on en verra naître celui-ci. Donc &c.

THEORESME III.

FIG. 272. 454. SI *l'on inſcrit au dedans d'un cercle un poligone regulier quelconque* DEFGHK &c, *dont le nombre des côtés ſoit pair; & que d'un point quelconque* B *de la circonference, on tire à tous les angles de ce poligone des cordes* BD, BE, BF, BG, BH, BK &c. : *je dis,*

1°. *Que la ſomme tant des quarrés des cordes impaires* BD,

BF, BH, *que des cordes paires* BE, BG, BK, *eſt égale au quarré du rayon* CB *pris autant de fois que le poligone a de côtés.*

Car menant le diametre *BA*, & prenant l'arc *AR* qui contienne l'arc *AD* autant de fois que le poligone a de côtés; il eſt clair * qu'en nommant la corde *BR*, *a*; & le rayon *CA* ou *CB*, 1; les quarrés des cordes impaires *BD*, *BF*, *BH* &c, ſeront les racines vraies de l'égalité dont l'un des membres eſt $+a$; & que les quarrés des cordes paires *BE*, *BK*, *BG* &c, ſeront les racines vraies de l'autre égalité dont l'un des membres eſt $-a$. Or le coëficient du ſecond terme de chacune de ces deux égalités qui contient la ſomme de leurs racines, eſt toûjours égal au quarré du rayon pris autant de fois que le poligone a de côtés, comme l'on voit dans la Table. Donc &c. * *Art.* 449.

2°. *Que ſi l'on mene le diametre* BA; *& qu'ayant pris l'arc* AR *qui contienne autant de fois l'arc* AD *que le poligone a de côtés, on tire la corde* BR: *le produit* $\overline{BD}^2 * \overline{BF}^2 * \overline{BH}^2$ &c. *des quarrés des cordes impaires, eſt égal au produit de* $BA \mp BR$ *par une puiſſance convenable du rayon, ſçavoir* $BA + BR$ *lorſque le nombre des côtés du poligone eſt ſimplement pair, &* $BA - BR$ *lorſqu'il eſt pairement pair, c'eſt à dire, diviſible par* 4; *& le produit* $\overline{BE}^2 * \overline{BG}^2 * \overline{BK}^2$ &c. *des cordes paires, eſt égal au produit de* $BA \mp BR$ *par la même puiſſance du rayon, ſçavoir* $BA - BR$ *dans le premier cas &* $BA + BR$ *dans le ſecond.*

Car nommant *BR*, *a*; & le rayon *CA*, 1; il eſt clair que les quarrés des cordes impaires *BD*, *BF*, *BH* &c, ſont les racines d'une égalité qui a toûjours pour dernier terme $2 \mp a$, c'eſt-à-dire $BA \mp BR$; & de plus que les quarrés des cordes paires *BR*, *BG*, *BK* &c, ſont les racines de l'autre égalité qui a toûjours pour dernier terme $2 \mp a$, c'eſt-à-dire $BA \mp BR$. Or comme le dernier terme d'une égalité contient toûjours le produit de toutes ſes racines, il s'enſuit &c.

COROLLAIRE.

455. DE-LA il eſt évident 1°. Que la ſomme des quarrés de toutes les cordes tant paires qu'impaires, eſt égal au quarré du rayon multiplié par le double du nombre des côtés du poligone, c'eſt à dire ici que $\overline{BF}^2 + \overline{BE}^2 + \overline{BD}^2 + \overline{BK}^2 + \overline{BH}^2 + \overline{BG}^2 = 12\overline{CA}^2$. 2°. Que la difference des quarrés des cordes impaires avec les quarrés des cordes paires, eſt toûjours égale a zero, c'eſt à dire, que $\overline{BF}^2 - \overline{BE}^2 + \overline{BD}^2 - \overline{BK}^2 + \overline{BH}^2 - \overline{BG}^2 = 0$. 3°. Que le produit des quarres des cordes impaires plus celui des quarrés des cordes paires, eſt egal au quadruple d'une puiſſance pareille du rayon; c'eſt à dire, que $\overline{BF}^2 * \overline{BD}^2 * \overline{BH}^2 + \overline{BE}^2 * \overline{BK}^2 * \overline{BG}^2 = 4\overline{CA}^6$. 4° Que la difference de ces deux produits, eſt égale au double de la corde BR multipliée par une puiſſance convenable du rayon; en obſervant que le produit du quarré des cordes impaires, ſurpaſſe celui des quarrés des cordes paires, lorſque le nombre des côtés du poligone eſt ſimplement pair, & au contraire qu'il eſt moindre, lorſqu'il eſt pairement pair: c'eſt à dire ici, que $\overline{BF}^2 * \overline{BD}^2 * \overline{BH}^2 - \overline{BR}^2 * \overline{BK}^2 * \overline{BG}^2 = 2BR * \overline{CA}^6$. 5°. Que le produit des quarrés de toutes les cordes tant paires qu'impaires les uns par les autres ſera toûjours égal au produit de $\overline{BA}^2 - \overline{BE}^2 = BA \mp BR * BA \pm BR = \overline{AR}^2$ à cauſe de l'angle droit ARB, par une puiſſance convenable du rayon: c'eſt à dire en extrayant de part & d'autre les racines quarrées, que le produit de toutes les cordes eſt égal au produit de la corde AR par une puiſſance du rayon moindre d'une unité que le nombre des cordes; par exemple ici, $BF * BE * BD * BK * BH * BG = AR * CA^6$.

THEORESME IV.

FIG. 275. 456. SI *l'on diviſe une demie circonference* A D B *en un nombre quelconque pair de parties égales, dont la premiere*

soit l'arc AD, *les trois premieres l'arc* ADE, *les cinq premieres l'arc* ADEF, *& ainsi de suite de deux en deux jusqu'à la derniere ; & qu'on tire les cordes* BD, BE, BF &c: *je dis*,

1°. *Que la somme des quarrés de ces cordes est égale au quarré du rayon pris autant de fois qu'il y a de divisions. C'est à dire ici, où le nombre des divisions est* 6, *que* $\overline{BD}^2 + \overline{BE}^2 + \overline{BF}^2 = 6\overline{CA}^2$.

2°. *Que le produit des quarrés de ces cordes les uns par les autres, vaut le double de la puissance convenable du rayon. Ainsi* $\overline{BD}^2 * \overline{BE}^2 * \overline{BF}^2 = 2CA^6$, *& par consequent* BD * BE * BF $= CA^3 * \sqrt{2}$.

Car inscrivant dans le cercle entier un poligone regulier *D E F G H K*, dont le nombre des côtés soit égal au nombre des divisions, à commencer par la premiere *D* ; & tirant de l'extremité *B* du diametre *AB*, à tous les angles de ce poligone, des cordes *BD*, *BK*, *BE*, *BH*, *BF*, *BG* : il est clair que les cordes *BD*, *BK*, *BE*, *BH*, *BF*, *BG*, *&c.* étant prises deux à deux sont égales entr'elles ; & partant que si l'on applique les articles premier & troisiéme du Corollaire precedent à ce cas particulier, on en verra naître ce Theorême.

EXEMPLE XII.

457. INSCRIRE dans un cercle donné, un poligone regulier quelconque, dont le nombre des côtés soit donné. FIG. 275.

On peut regarder ce Problême, comme n'étant qu'un cas particulier de l'Exemple precedent. Car si l'on suppose que la corde *BR* devienne nulle ou zero, il s'ensuit que l'arc *AR* qu'elle termine deviendra la demie circonference, Or si l'on propose de diviser la circonference entiere en un nombre quelconque de parties égales ; il est évident qu'en divisant la demie circonference dans ce même nombre, & prenant la seconde corde au

lieu de la premiere, elle terminera la premiere des parties demandées. Par exemple, si l'on divise la demie circonference ADB en sept parties égales $AD, DE, EF, FG, GH, HI, IB$; la seconde corde BE terminera l'arc AE qui est la septiéme partie de la circonference entiere. D'où l'on voit qu'en égalant à zero le rang parallele de la Table qui surpasse d'une unité le nombre des côtés du poligone, on formera une égalité dont la plus grande des racines x exprimera la valeur de la corde BD qui termine l'arc AD moitié de l'arc cherché AE. Mais *$CB\ (1).BD\ (x) :: BD\ (x).BE + BA$, & par consequent si l'on nomme la seconde corde BE, z; on aura $xx = z + 2$. Si donc l'on fait évanoüir par le moyen de cette égalité l'inconnuë x dans la precedente, on en formera une nouvelle dont la plus grande racine z exprimera la corde BE qui termine l'arc cherché AE. Ainsi dans nôtre exemple, en égalant à zero le huitiéme rang parallele & divisant par x, je trouve cette égalité $x^6 - 7x^4 + 14xx - 7 = 0$, dans laquelle mettant à la place de xx sa valeur $z + 2$, à la place de x^4 le quarré de cette valeur &c. je la change en cette autre $z^3 - zz - 2z + 1 = 0$, dont la plus grande des racines z exprime la valeur de la corde BE qui termine l'arc AE septiéme partie de la circonference entiere.

FIG. 276.

*Art. 442.

Voici maintenant une maniere generale de trouver immédiatement toutes ces égalités lorsque le nombre des côtés du poligone est impair qui est le seul cas necessaire; puisque s'il étoit pair, on le reduiroit toûjours en le divisant par 2, autant de fois qu'il seroit possible, en un nombre impair dans lequel ayant partagé la circonference, on auroit par la bissection d'une des parties égales, réïterée autant qu'il seroit necessaire, l'arc qu'on demande.

Soit construite une Table dans laquelle le premier rang parallele étant 1, & le second $z - 1$; le troisiéme $zz - z - 1$ soit égal au produit du second par z, moins le premier; le quatriéme $z^3 - zz - 2z + 1$ soit égal au pro-

duit du troiſiéme par z, moins le ſecond ; & ainſi à l'infini. Soit formée une égalité dont l'un des membres étant zero, l'autre ſoit le rang parallele de la Table, qui ait pour expoſant la plus grande moitié du nombre des côtés du poligone. Je dis que la plus grande des racines z de cette égalité, terminera un arc qui aura pour corde, le côté cherché du poligone.

Table pour l'inſcription des poligones reguliers dans le cercle.

1er	1
2e	$z - 1$
3e	$zz - z - 1$
4e	$z^3 - zz - 2z + 1$
5e	$z^4 - z^3 - 3zz + 2z + 1$
6e	$z^5 - z^4 - 4z^3 + 3zz + 3z - 1$
7e	$z^6 - z^5 - 5z^4 + 4z^3 + 6zz - 3z - 1$
8e	$z^7 - z^6 - 6z^5 + 5z^4 + 10z^3 - 6zz - 4z + 1$
9e	$z^8 - z^7 - 7z^6 + 6z^5 + 15z^4 - 10z^3 - 10zz + 4z + 1$
10e	$z^9 - z^8 - 8z^7 + 7z^6 + 21z^5 - 15z^4 - 20z^3 + 10zz + 5z - 1$

Qu'il faille, par exemple, inſcrire dans un cercle un heptagone. Je prends le quatriéme rang parallele de la Table, parce que 4 eſt la plus grande moitié de 7, & l'égalant à zero j'ai $z^3 - zz - 2z + 1 = o$, dont la plus grande racine z exprimera la valeur de la corde BE, qui termine l'arc AE ſeptiéme partie de la circonference entiere ; pour le prouver.

Soit un arc de cercle AR moindre que la demie circonference diviſé en un nombre quelconque impair, de parties egales aux points D, E, F, G &c : & ſoient menées de l'extremité B du diametre BA, les cordes BD, BE, BF, BG &c, juſqu'à la derniere BR. Ayant pris l'arc AS égal à l'arc AD, ſoit tirée la corde BS, & ſoient nommées la premiere corde BD ou BS, x ; & la ſeconde BE, z. Cela poſé, on aura ſelon le Lemme $CB\ (1).\ BE\ (z) :: BD\ (x).\ BF + BS$. Et par conſequent $BF = xz - x$. De même $CB\ (1).\ BE\ (z) :: BF.\ BD + BH$. Et par conſequent $BH = zBF - BD$; de FIG. 275.

même encore CB (1). $BE(z) :: BH. BF + BR$, & partant $BR = zBH - BF$: c'eſt-à-dire, que la cinquiéme corde BH eſt égale au produit de la troiſiéme BF par z, moins la premiere BD ; que la ſeptiéme BR eſt égale au produit de la cinquiéme BH par z, moins la troiſieme BF ; & ainſi à l'infini de toutes les cordes impaires D'où l'on voit que ſi l'on conſtruit une Table dont le premier rang étant x, & le ſecond $xz - x$; le troiſiéme $xzz - xz - x$ ſoit égal au produit du ſecond par z, moins le premier ; le quatriéme $xz^3 - xzz - 2xz + 1$ ſoit égal au produit du troiſiéme par z moins le ſecond ; & ainſi à l'infini : les rangs de cette Table exprimeront par ordre toutes les cordes impaires BD, BF, BH, BR, de l'arc AR. Or les rangs de cette Table n'étant autres que ceux de la precedente multipliez chacun par x, il s'enſuit qu'en ſuppoſant que la derniere corde BR devienne nulle ou zero (ce qui arrive lorſque l'arc AR devient la demie circonference,) & faiſant ce qu'on vient de preſcrire, on aura une égalité dont l'inconnuë z exprimera la ſeconde corde BE qui termine l'arc AE qui eſt contenu autant de fois dans la circonference entiere, que l'arc AD qui en eſt la moitié, l'eſt dans la demie circonference.

Fig. 276.

Il faut remarquer 1°. Que les égalités qu'on trouve de cette maniere ſont les plus ſimples qu'il eſt poſſible, lorſque le nombre des côtés du poligone eſt un nombre premier : mais que lorſqu'il eſt compoſé de deux ou de pluſieurs nombres premiers, il faudra diviſer d'abord la circonference entiere en autant de parties égales que le plus grand de ces nombres a d'unités, & enſuite une de ces parties en autant de parties égales que l'un des nombres reſtans a d'unités, & continuer juſqu'à ce que tous les nombres premiers qui compoſent le nombre donné des côtés du poligone ſoient épuiſés. 2°. Qu'entre les cordes qui partent du point B, & qui ſont renfermées dans la demie circonference AEB ; les impaires à commencer par la plus grande BE ſont les racines vraies,

vraies, & les paires les fauſſes des égalités qu'on trouve par cette methode : ainſi les cordes BE, BI, ſont les deux racines vraies de l'égalité $z^4 - zz - 2z + 1 = o$, & la corde BG en eſt la fauſſe. 3°. Qu'entre les racines de ces ſortes d'égalités, la plus petite eſt la corde d'un arc qui eſt la moitié de celui qu'on cherche : c'eſt à-dire dans cet exemple, que la plus petite racine BI de l'égalité $z^4 - zz - 2z + 1 = o$, eſt la corde d'un arc BI qui eſt la quatorziéme partie de la circonference.

REMARQUE.

458. IL eſt viſible dans cette derniere Table, que tous les termes du premier & du ſecond rang perpendiculaire ont chacun pour coëficient l'unité ; que ceux du troiſiéme & du quatriéme rang ont pour coëficiens les nombres naturels 1, 2, 3, 4 &c, qui ſe forment par l'addition continuelle des unités ; que ceux du cinquiéme & du ſixiéme rang ont pour coëficiens les nombres triangulaires 1, 3, 6, 10 &c qui ſe forment par l'addition continuelle des nombres naturels ; que ceux du ſeptiéme & du huitiéme rang ont pour coëficiens les nombres piramidaux 1, 4, 10 &c, qui ſe forment par l'addition continuelle des triangulaires ; & ainſi à l'infini de deux en deux des nombres d'un ordre ſuperieur qui ſe forment par l'addition continuelle de ceux du dernier ordre.

LEMME I.

459. S'IL *y a ſur un demi cercle* AEB *deux arcs égaux* AD, EF, *dont l'un* AD *ait ſon commencement en l'une des extremités* A *du diametre* AB, *& l'autre* EF *ſoit pris par tout où l'on voudra ; & qu'on tire les cordes* BD, BE, BF, *&* AD, AE, AF : *je dis*, 1°. *Que* $AB * BF = BD * BE - AD * AE$. 2°. *Que* $AB * AF = BD * AE + AD * BE$. FIG. 277.

Car les trois triangles rectangles ADG (le point G eſt ici le point d'interſection des cordes BD, AF), AEB,

BFG ſont ſemblables entr'eux ; puiſque l'angle AGD ou BGF ayant pour meſure la moitié des deux arcs BF, AD, eſt égal à l'angle BAE qui a auſſi pour meſure la moitié des deux arcs BF, FE, ou AD. Si donc l'on nomme le diametre AB, 1 ; les cordes BD, x ; AD, y ; BE, v ; AE, z ; on aura 1°. $BE(v).EA(z)::AD(y).DG=\frac{yz}{v}$, & partant BG ou $BD-DG=x-\frac{yz}{v}$. 2°. $AB(1).BE(v)::BG\left(x-\frac{yz}{v}\right).BF=vx-yz$ c'eſt-à-dire (puiſque $AB=1$) que $AB\times BF=BD\times BE-AD\times AE$. Ce qu'il falloit demontrer en premier lieu.

Maintenant $BE(v).BA(1)::AD(y).AG=\frac{y}{v}$. Et $AB(1).AE(z)::BG\left(x-\frac{y}{v}\right).GF=xz-\frac{zyy}{v}$; & partant $AG+GF$ ou $AF=xz-\frac{zyy}{v}+\frac{y}{v}=xz+vy$, puiſqu'à cauſe du triangle rectangle AEB on trouve $1-zz=vv$; c'eſt-à dire que AF ou $AB\times AF=BD\times AE+AD\times BE$. Et c'eſt ce qui reſtoit à démontrer.

LEMME II.

460. SOIT *formée une Table, dont le premier rang parallele étant compoſé de deux parties* x & y, *tous les autres le ſoient auſſi ſelon cette regle ; la premiere partie de tel rang parallele qu'on voudra, vaut la premiere partie du rang parallele qui le precede immédiatement, multipliée par* x, *moins la ſeconde partie du même rang multipliée par* y : *& la ſeconde partie vaut la même premiere partie multipliée par* y, *plus la même ſeconde multipliée par* x. *Soit de plus un arc de cercle* FIG. 278. *quelconque* AR *moindre que la demie circonference diviſé en autant de parties égales qu'on voudra, aux points* D, E, F, G, &c. *Je dis que ſi le diametre* AB = 1, *& les deux premieres cordes* BD = x, AD = y ; *toutes les autres cordes* BE, BF, BG &c, *ſeront exprimées par les premieres parties du deuxiéme, troiſiéme, quatriéme, &c. rang parallele, &*

les autres cordes correſpondantes AE, AF, AG, &c, *par les ſecondes parties des mêmes rangs. Ainſi* BG *étant la quatriéme corde, vaut la premiere partie* $x^4 - 6yyxx + y^4$ *du quatriéme rang parallele, & ſa correſpondante* AG *vaut la ſeconde partie* $4yx^3 - 4y^3x$ *du même rang.*

1er	x	y
2^{e}	$xx - yy$	$2yx$
3^{e}	$x^3 - 3yyx$	$3yxx - y^3$
4^{e}	$x^4 - 6yyxx + y^4$	$4yx^3 - 4y^3x$
5^{e}	$x^5 - 10yyx^3 + 5y^4x$	$5yx^4 - 10y^3xx + y^5$
6^{e}	$x^6 - 15yyx^4 + 15y^4xx - y^6$	$6yx^5 - 20y^3x^3 + 6y^5x$
7^{e}	$x^7 - 21yyx^5 + 35y^4x^3 - 7y^6x$	$7yx^6 - 35y^3x^4 + 21y^5xx - y^7$

Car il eſt clair ſelon le Lemme precedent que le produit d'une corde quelconque BF par la premiere corde BD (x), moins le produit de la corde correſpondante AF, par l'autre premiere corde AD (y) exprime la valeur de la corde BG qui ſuit immédiatement BF; & auſſi que la corde AG vaut $BF \times AD\,(y) + AF \times BD\,(x)$. Donc &c.

COROLLAIRE.

461. Si l'on ajoûte enſemble les deux parties de chaque rang parallele de la Table precedente, en mettant par ordre tous les termes qui les compoſent ſelon les differens degrez des puiſſances de x; on formera cette nouvelle Table qui contiendra par ordre les termes de toutes les puiſſances du binome $x + y$: en obſervant que le premier & le ſecond terme doivent être pris affirmativement, le troiſiéme & le quatriéme negativement, & ainſi alternativement de deux en deux juſqu'au dernier. Ainſi le troiſiéme rang parallele contiendra $x^3 + 3yxx - 3yyx - y^3$; c'eſt-à-dire le cube du binome $x + y$, dont on prend les deux premiers termes affirmativement, & les deux derniers negativement: de même le cinquiéme rang parallele contiendra $x^5 + 5yx^4 - 10yyx^3 - 10y^3xx + 5y^4x + y^5$, qui eſt la cinquieme

puiſſance du binome $x+y$, dont le premier & le ſecond terme ſont pris affirmativement, le troiſiéme & le quatriéme negativement, le cinquieme & le ſixieme affirmativement; & il en eſt ainſi de tous les autres rangs à l'infini.

1er	$x+y$
2	$xx+2xy-yy$
3e	$x^3+3xxy-3xyy-y^3$
4	$x^4+4x^3y-6xxyy-4xy^3+y^4$
5e	$x^5+5x^4y-10x^3y^2-10xxy^3+5xy^4+y^5$
6e	$x^6+6x^5y-15x^4yy-20x^3y^3+15xxy^4+6xy^5-y^6$
7	$x^7+7x^6y-21x^5yy-35x^4y^3+35x^3y^4+21xxy^5-7xy^6-y^7$

Car ſi l'on fait attention à la maniere dont la Table precedente eſt formee, on verra que tous les termes de chacun de ſes rangs parall les ſont formés par ceux du rang parallele qui le precede, multiples par x & par y, & joints par des ſignes $+$ & $-$, en telle ſorte que les termes des deux parties qui compoſent chaque rang, étant mis par ordre, ſelon les differens degres de l'inconnuë x, il y a de ſuite deux ſignes $+$, & après deux ſignes $-$; & ainſi alternativement juſqu'au dernier.

REMARQUE.

462. IL eſt viſible dans cette derniere Table, que tous les termes du premier rang perpendiculaire, ont chacun pour coëficient l'unite, que ceux du ſecond rang ont pour coëficiens les nombres naturels 1, 2, 3, 4, &c, qui ſe forment par l'addition continuelle des unites; que ceux du troiſieme rang ont pour coëficiens les nombres triangulaires 1, 3, 6, 10, &c, qui ſe forment par l'addition continuelle des nombres naturels; que ceux du quatrieme rang ont pour coëficiens les nombres piramidaux 1, 4, 10, 20, &c, qui ſe forment par l'addition continuelle des triangulaires; & ainſi à l'infini de rang en rang en avançant vers la droite, les nombres dun

ordre ſuperieur, ſe forment par l'addition continuelle de ceux de l'ordre immediatement precedent.

EXEMPLE XIII.

463. UN arc de cercle AR étant donné ; le diviſer en autant de parties égales qu'on voudra, aux points D, E, F, G &c ; par une methode differente de celle de l'Exemple dixieme. FIG. 278.

Ayant nommé le diametre AB, 1 ; les cordes données BR, a ; AR, b ; qui terminent l'arc donné AR ; & les cordes inconnuës BD, x ; AD, y ; qui terminent l'arc cherché AD ; on élevera le binome $x+y$ à une puiſſance dont l'expoſant ſoit égal au nombre des diviſions. On formera deux égalités, dont la premiere aura pour l'un de ſes membres ſa donnée a, & pour l'autre tous les termes impairs de la puiſſance de $x+y$, joints par des ſignes $+$ & $-$ alternatifs ; & la ſeconde aura pour l'un de ſes membres la donnée b, & pour l'autre tous les autres termes de la même puiſſance du binome $x+y$, joints encore enſemble par des ſignes alternatifs $+$ & $-$. On fera évanoüir l'une ou l'autre des inconnuës x ou y, par le moyen de l'egalité $xx = 1 - yy$ ou $yy = 1 - xx$, qui ſe tire du triangle ADB rectangle en D : ce qui donnera enfin une derniere egalité où il n'y aura qu'une ſeule inconnuë x ou y, dont la reſolution fournira la valeur de cette inconnuë BD ou AD qui termine l'arc cherché AD.

Qu'il faille, par exemple, diviſer l'arc cherché AR en ſept parties egales aux points D, E, F, G, H, I. Je prends la ſeptiéme puiſſance $x^7 + 7yx^6 + 21yyx^5 + 35y^3x^4 + 35y^4x^3 + 21y^5xx + 7y^6x + y^7$ du binome $x+y$, de laquelle je forme les deux egalités $a = x^7 - 21yyx^5 + 35y^4x^3 - 7yx^6$, & $b = 7yx^6 - 35y^3x^4 + 21y^5xx - y^7$. Et faiſant evanoüir dans la premiere de ces deux égalités l'inconnuë y, ou dans la ſeconde l'inconnuë x, par le moyen de l'egalité $yy = 1 - xx$ ou $xx = 1 - yy$,

je forme l'une de ces deux nouvelles égalités $a = 64x^6 - 112x^5 + 56x^4 - 7x$ ou $b = 7y - 56y^3 + 112y^5 - 63y^9$, qui ne renferme plus qu'une ſeule inconnuë, & dont la reſolution qui ſe fera ſelon les regles du Livre precedent, fournira pour l'une de ſes racines x ou y, une valeur BD ou AD qui ſervira à déterminer la premiere des parties égales demandées. Tout cela eſt une ſuite des deux articles precedens.

Il eſt à remarquer que ſi l'arc AR étoit plus grand que la demie circonference, celle des deux égalités precedentes qui a pour l'un de ſes membres $+b$ ſert également ſans y rien changer, mais dans l'autre il faut changer le membre $+a$ en $-a$; dont la raiſon eſt que la corde BR (a) paſſant de l'autre côté du point B devient negative de poſitive qu'elle étoit, au lieu que la corde AR ne repaſſant point de l'autre côté du point A demeure toûjours poſitive.

LEMME I.

464. QUE *dans un quarré quelconque de cellules on rempliſſe de la lettre* a, *toutes les cellules du premier rang parallele; de la lettre* b, *toutes les cellules du premier rang perpendiculaire, excepté la premiere; & enſuite toutes les autres cellules par le moyen de cette regle; c'eſt à ſçavoir qu'une cellule doit toûjours être égale à celle qui eſt au deſſus plus à celle qui eſt à gauche: de cette ſorte on aura le quarré de cellules qu'on voit ici. Or cela poſé;*

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
1.	a	a	a	a	a	a	a
2.	b	$a+b$	$2a+b$	$3a+b$	$4a+b$	$5a+b$	$6a+b$
3.	b	$a+2b$	$3a+3b$	$6a+4b$	$10a+5b$	$15a+6b$	$21a+7b$
4.	b	$a+3b$	$4a+6b$	$10a+10b$	$20a+15b$	$35a+21b$	$56a+28b$
5.	b	$a+4b$	$5a+10b$	$15a+20b$	$35a+35b$	$70a+56b$	$126a+84b$
6.	b	$a+5b$	$6a+15b$	$21a+35b$	$56a+70b$	$126a+126b$	$252a+210b$
7.	b	$a+6b$	$7a+21b$	$28a+56b$	$84a+126b$	$210a+252b$	$462a+462b$

Je dis qu'une cellule quelconque eſt égale à la cellule qui eſt

à gauche plus à toutes celles qui ſont au deſſus : c'eſt à dire, par exemple, que la quatriéme cellule 4a + 6b *du troiſiéme rang perpendiculaire, eſt égale à la cellule* 2a + 3b *qui eſt à gauche, & qui par conſequent eſt la quatriéme du ſecond rang perpendiculaire, plus à toutes les autres* a + 2b, a + b, a, *qui ſont au deſſus d'elle dans ce ſecond rang.*

Car ſuppoſant que a, c, d, e, expriment les quatre premieres cellules du ſecond rang perpendiculaire, & a, f, g, h, les quatre premiers du troiſieme rang, on aura par la formation du quarré de cellules $h = e + g$, $g = d + f$, $f = c + a$, & partant $h = e + d + c + a$; ce qu'il falloit prouver. Or il eſt viſible que cette demonſtration ſe peut appliquer à tel nombre de cellules qu'on voudra de deux rangs perpendiculaires voiſins. Donc &c.

COROLLAIRE.

465. PUISQUE toutes les cellules excepté celles du premier rang parallele & celle du premier rang perpendiculaire, ſont compoſées de deux termes dans le premier deſquels ſe trouve la lettre a, & dans le ſecond la lettre b; il s'enſuit 1°. Que le terme où ſe trouve la lettre a, eſt égal au terme où ſe trouve la même lettre a dans la cellule gauche, plus à tous les termes où elle ſe rencontre dans les cellules qui ſont au deſſus de celle ci. 2°. Que le terme où ſe trouve la lettre b, eſt égal au terme où ſe trouve la même lettre b dans la cellule à gauche, plus à tous ceux où elle ſe trouve dans les cellules qui ſont au deſſus. Ainſi le terme $15a$ de la cinquieme cellule du quatriéme rang perpendiculaire, eſt égal au terme $5a$ de la cellule à gauche, plus aux termes $4a, 3a, 2a, 1a$, qui ſe trouvent dans les cellules qui ſont au deſſus de celle-ci; & de même $10b$ eſt égal au terme $10b$ de la cellule à gauche, plus aux termes $6b, 3b, 1b$, de toutes les cellules qui ſont au deſſus.

LEMME II.

466. *Si l'on multiplie le terme où ſe trouve la lettre* a *dans une cellule quelconque, par la ſomme des expoſans de ſon rang parallele & de ſon rang perpendiculaire moins* 2, *& qu'on diviſe le produit par l'expoſant de ſon rang perpendiculaire moins* 1; *je dis que le quotient ſera égal à ce terme plus à tous ceux qui ſont au deſſus de lui : c'eſt à dire, par exemple, que ſi l'on multiplie le terme* 15a *de la cinquiéme cellule du quatriéme rang perpendiculaire par* $5+4-2=7$, *& qu'on diviſe le produit par* $4-1=3$; *le quotient* 35a *ſera égal au terme* 15a *plus à tous les autres* 10a, 6a, 3a, 1a, *qui ſont au deſſus de lui.*

Cela eſt viſible dans toutes les cellules du deuxiéme rang perpendiculaire, puiſquelles contiennent toutes le même terme 1*a*. Or je vais démontrer que ſuppoſé que cette proprieté ſe rencontre dans un rang perpendiculaire quelconque, elle ſe trouve neceſſairement dans celui qui eſt à droit; d'où il ſuivra que puiſqu'elle ſe trouve dans le deuxiéme rang perpendiculaire, elle ſera auſſi dans le troiſiéme, que puiſqu'elle ſe rencontre dans le troiſiéme, elle ſera auſſi dans le quatriéme, & ainſi de ſuite à l'infini. Pour le prouver.

Soient a, c, d, e, f *&c*, autant de termes qu'on voudra de ceux où ſe trouve la lettre a, dans un rang perpendiculaire quelconque à commencer par le premier; a, g, h, k, l, *&c* un pareil nombre de termes du rang qui eſt à droit à commencer auſſi par le premier. Soit de plus m égale à la ſomme des expoſans moins 2 des rangs perpendiculaire & parallele de la cellule où ſe trouve le terme f; & r égale à l'expoſant moins 1 du rang perpendiculaire de cette cellule. Par la ſuppoſition $\frac{m}{r}f=f+e+d+c+a=$ * *Art.* 464. l, $\frac{m-1}{r}e=e+d+c+a=k$, $\frac{m-2}{r}d=d+c+a=h$, $\frac{m-3}{r}c=c+a=g$, $\frac{m-4}{r}a=a$. Donc $l+k+h+g+a=\frac{m}{r}f+$

$+\frac{m-1}{r}e+\frac{m-2}{r}d+\frac{m-3}{r}c+\frac{m-4}{r}a=\frac{m}{r}*f+e+d+c+a$, $-\frac{1}{r}*1e+2d+3c+4a=\frac{m}{r}l$, $-\frac{1}{r}*k+h+g+a$ en mettant pour $f+e+d+c+a$ ſa valeur l, & pour $1e+2d+3c+4a$ ſa valeur $k+h+g+a$: tranſpoſant d'une part l & de l'autre $-\frac{1}{r}*k+h+g+a$, on aura $\frac{r+1}{r}*k+h+g+a=\frac{m-r}{r}l$: multipliant de part & d'autre par r, diviſant par $r+1$; & ajoûtant de part & d'autre l, il vient enfin $\frac{m+1}{r+1}l=l+k+h+g+a$. Mais comme le rang perpendiculaire de la cellule où ſe trouve l, ſurpaſſe d'une unité celui de la cellule où ſe trouve f, & que leur rang parallele demeure le même; il eſt évident que la propriété marquée pour chaque terme où ſe trouve la lettre a dans un rang perpendiculaire quelconque, convient auſſi au terme l du rang perpendiculaire qui eſt à droit. De plus puiſque cette demonſtration ſubſiſte également tel que puiſſe être le nombre de termes des deux rangs perpendiculaires voiſins, il s'enſuit que ce que l'on vient de montrer par rapport au terme l, ſera vrai auſſi à l'égard de tout autre de ſon rang perpendiculaire.

Si l'on ſuppoſe à preſent que n exprime en general l'expoſant d'un rang parallele quelconque autre que le premier, on verra que la premiere cellule de ce rang ne renferme aucun terme où la lettre a ſe rencontre; que la ſeconde renferme toûjours $1a$; que ſi l'on multiplie $1a$ par $\frac{n+2-2}{2-1}=\frac{n}{1}$, on aura $\frac{n}{1}a$ pour le terme où ſe trouve la lettre a dans la troiſiéme cellule; & de même que ſi l'on multiplie $\frac{n}{1}a$ par $\frac{n+3-3}{3+1}=\frac{n+1}{2}$, on aura $\frac{n}{1}a*\frac{n+1}{2}$ pour le terme où ſe trouve a dans la quatriéme cellule: de ſorte que cette ſuite $0, 1a, \frac{n}{1}a, \frac{n}{1}*\frac{n+1}{2}a, \frac{n}{1}*\frac{n+1}{2}*\frac{n+1}{3}a, \frac{n}{1}*\frac{n+1}{2}*\frac{n+2}{3}*\frac{n+3}{4}a$ &c, exprimera

par ordre tous les termes où ſe trouve la lettre a, dans les cellules du rang parallele dont n eſt l'expoſant. Ainſi ſi $n = 5$, la ſuite $0, 1a, 5a, 15a, 35a$ &c, exprimera par ordre tous les termes où ſe trouve la lettre a dans les cellules du cinquiéme rang parallele.

LEMME III.

467. SI *l'on multiplie le terme où ſe trouve la lettre* b *dans une cellule quelconque, par la ſomme des expoſans de ſon rang parallele & de ſon rang perpendiculaire moins* 2, *& qu'on diviſe le produit par l'expoſant de ſon rang perpendiculaire ; je dis que le quotient ſera égal à ce terme plus à tous ceux qui ſont au deſſus de lui : c'eſt à dire, par exemple, que ſi l'on multiplie le terme* 10 b *de la cinquiéme cellule du troiſiéme rang perpendiculaire par* $5 + 3 - 2 = 6$, *& qu'on diviſe le produit par* 3, *on aura* 20 b *pour la ſomme du terme* 10 b, *& de tous les autres* 6 b, 3 b, 1 b, *qui ſont au deſſus de lui :*

Il eſt viſible que cette proprieté ſe rencontre dans le premier rang perpendiculaire où toutes les cellules renferment la même valeur $1b$, excepté la premiere dans laquelle la lettre b ne ſe rencontre point. Or de cela ſeul l'on prouvera comme l'on vient de faire dans le Lemme precedent à l'égard des termes qui ſont multiples de, a, qu'elle ſe doit rencontrer dans le ſecond rang perpendiculaire, dans le troiſiéme, dans le quatriéme, & ainſi dans tous les autres à l'infini. D'où l'on conclura que ſi n deſigne l'expoſant d'un rang parallele quelconque autre que le premier ; la ſuite $1b, \frac{n-1}{1}b, \frac{n-1}{1} \times \frac{n}{2}b, \frac{n-1}{1} \times \frac{n}{2} \times \frac{n+1}{3}b, \frac{n-1}{1} \times \frac{n}{2} \times \frac{n+1}{3} \times \frac{n+2}{4}b$ &c, exprimera par ordre tous les termes où ſe trouve la lettre b dans les cellules du rang parallele dont n eſt l'expoſant. Ainſi ſi $n = 5$, la ſuite $1b, 4b, 10b, 20b, 35b$, &c, exprimera par ordre tous les termes où ſe trouve b dans le cinquiéme rang parallele.

COROLLAIRE.

468. IL suit de ces deux derniers Lemmes, que si l'on ajoûte par ordre tous les termes de cette suite à ceux de la precedente, on en formera une, $1b$, $1a$, $+\frac{n-1}{1}b$, $\frac{n}{1}a+\frac{n-1}{1}\times\frac{n}{2}b$, $\frac{n}{1}\times\frac{n+1}{2}a+\frac{n-1}{1}\times\frac{n}{2}\times\frac{n+1}{3}b$, $\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n+2}{3}a\times\frac{n-1}{1}\times\frac{n}{2}\times\frac{n+1}{3}\times\frac{n+2}{4}b$, *&c*; ou en abregeant l'expression, b, $a+\frac{n-1}{1}b$, $a+\frac{n-1}{2}b\times\frac{n}{1}$, $a+\frac{n-1}{3}b\times\frac{n}{1}\times\frac{n+1}{2}$, $a+\frac{n-1}{4}b\times\frac{n}{1}\times\frac{n+1}{2}\times\frac{n+2}{3}$ *&c.* qui exprimera par ordre toutes les cellules du rang parallele de la Table dont n est l'exposant.

D'où l'on voit que par le moyen de cette suite, on peut trouver tout d'un coup telle cellule qu'on voudra, les exposans de son rang parallele & perpendiculaire étant donnés; puisque prenant dans la suite generale le terme qui répond à l'exposant du rang perpendiculaire, c'est-à dire, le quatriéme terme, si le rang perpendiculaire est le quatriéme, le cinquiéme, s'il est le cinquiéme &c, & mettant dans ce terme à la place de n l'exposant du rang parallele, on aura la cellule que l'on cherche. Que l'on demande, par exemple, la cinquiéme cellule du quatrieme rang perpendiculaire; ayant mis dans le quatriéme terme $a+\frac{n-1}{3}b\times\frac{n}{1}\times\frac{n+1}{2}$, à la place de n l'exposant 5 du rang parallele de la cellule on trouvera $a+\frac{4}{1}b\times 15$, c'est-à-dire, $15a+20b$ pour cette cellule; & il en est ainsi de toutes les autres.

LEMME IV.

469. SI *l'on fait* $a=2$ *&* $b=1$ *dans le quarré de cellules de l'article* 464, *on le changera en celui-ci; duquel je dis que le premier rang parallele contient de suite le premier terme de tous les rangs perpendiculaires de la Table de l'article* 443; *le second rang parallele, les seconds termes; le troisiéme*

rang, les troiſiémes termes ; & ainſi de ſuite à l'infini.

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
1.	2	2	2	2	2	2	2
2.	1	3	5	7	9	11	13
3.	1	4	9	16	25	36	49
4.	1	5	14	30	55	91	140
5.	1	6	20	50	105	196	336
6.	1	7	27	77	182	378	714
7.	1	8	35	112	294	672	1386

Cela eſt une ſuite naturelle de l'article 445, & de la formation du quarré de cellules de l'article 464, expliquée dans ce même article & dans le ſuivant 465.

COROLLAIRE.

470. Si l'on fait $b = 1$ & $a = 2$ dans la ſuite generale de l'article 468. b, $a + \frac{n-1}{1} b$, $a + \frac{n-1}{2} b \times \frac{n}{3}$, $a + \frac{n-1}{3} b \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2}$, $a + \frac{n-1}{4} b \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3}$ &c ; on la changera en cette autre $1, \frac{n+1}{1}, \frac{n+3}{2} \times \frac{n}{1}, \frac{n+5}{3} \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2}, \frac{n+7}{4} \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3}$ &c, par le moyen de laquelle on trouvera tout d'un coup le coëficient de tel terme qu'on voudra de la Table de l'article 443, ſon rang perpendiculaire & le quantiéme qu'il y occupe étant donnés. Voici la regle.

On prendra dans cette ſuite le terme qui répond au rang perpendiculaire donné, c'eſt-à-dire le troiſiéme, ſi c'eſt le troiſiéme rang, le quatriéme, ſi c'eſt le quatriéme &c ; & ayant mis dans ce terme à la place de n le nombre qui expoſe le quantiéme du terme dans ſon rang perpendiculaire, c'eſt-à-dire 4 s'il eſt le quatriéme, 5, s'il eſt le cinquiéme &c, on aura le coëficient qu'on cherche. Si l'on demande, par exemple, le coëficient du quatriéme terme $14x^3$ du troiſiéme rang perpendicu-

laire ; on mettra dans le troiſiéme terme $\frac{n+3}{2} \times \frac{n}{1}$ à la place de n le nombre 4, & l'on aura 14 pour le coëficient cherché.

Car l'expoſant du rang perpendiculaire du coëficient pris dans la Table de l'article 443, eſt le même que l'expoſant du rang perpendiculaire du quarré de cellules de l'article precedent ; & le quantiéme que ce coëficient occupe dans ſon rang perpendiculaire, eſt l'expoſant du rang parallele du quarré de cellules. D'où l'on voit que cette regle n'eſt qu'une application de celle de l'article 468, à ce cas particulier ou $a = 2$ & $b = 1$.

LEMME V.

471. *Si l'on met* 1 *à la place de* b, *dans le quarré de cellules de l'article* 464 ; *on le changera en celui-ci, dont je dis que les rangs perpendiculaires contiennent par ordre tous les nombres qu'on appelle* Figurés : *ſçavoir le premier rang les nombres du premier ordre qui ſont les unités, le ſecond rang les nombres naturels ou du ſecond ordre qui ſe forment par l'addition continuelle des unités, le troiſiéme rang les nombres triangulaires ou du troiſiéme ordre qui ſe forment par l'addition continuelle des naturels, le quatriéme les nombres piramidaux ou du quatriéme ordre qui ſe forment par l'addition continuelle des triangulaires, & ainſi à l'infini.*

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
1.	1	1	1	1	1	1	1
2.	1	2	3	4	5	6	7
3.	1	3	6	10	15	21	28
4.	1	4	10	20	35	56	84
5.	1	5	15	35	70	126	210
6.	1	6	21	56	126	252	462
7.	1	7	28	84	210	462	924

Car ſelon le même article 464, chaque cellule eſt

égale à celle qui eſt à gauche, plus à toutes les autres qui ſont au deſſus.

M. Paſchal a fait un Traité qui a pour titre Triangle Arithmetique, dans lequel il conſidere les proprietés de ces nombres, & fait voir qu'ils ſont d'un trés-grand uſage dans pluſieurs queſtions d'Arithmetique.

COROLLAIRE.

472. SI l'on fait $a = 1$ & $b = 1$ dans la ſuite generale de l'article 468. b, $a + \frac{n-1}{1} b$, $a + \frac{n-1}{2} b \times \frac{n}{1}$, $a + \frac{n-1}{3} b \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2}$, $a + \frac{n-1}{4} b \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3}$ &c ; on changera en cette autre $1, n, \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2}, \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3}, \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3} \times \frac{n+3}{4}$ &c, qui ſervira à trouver tout d'un coup tel nombre figuré qu'on voudra, ſon ordre étant donné avec le quantieme qu'il y occupe. Voici comment.

On prendra dans cette derniere ſuite le terme qui répond à l'ordre donné, c'eſt à-dire le troiſieme, ſi c'eſt le troiſiéme ordre, le quatrieme, ſi c'eſt le quatrieme ordre &c ; & ayant mis à la place de n le nombre qui expoſe le quantieme du nombre figuré, c'eſt à-dire 4, s'il doit être le quatriéme, 5, s'il doit être le cinquiéme &c, on aura ce nombre. Qu'il faille, par exemple, trouver le cinquiéme nombre du quatriéme ordre ; je mets dans le quatriéme terme $\frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3}$ de la ſuite à la place de n le nombre 5, & j'ai 35 pour le nombre cherché.

Ceci n'eſt autre choſe que l'application de la regle de l'article 468. à ce cas particulier.

PROBLESME I.

473. SOIT *propoſé de trouver une ſuite generale, qui exprime par ordre tous les termes d'un rang parallele quelconque, de la Table de la diviſion des arcs de l'article* 443.

Comme le troiſiéme terme d'un rang perpendiculaire quelconque de cette Table, répond toûjours au premier du rang qui eſt à droit; il s'enſuit que ſi $m+1$ exprime en general l'expoſant du rang parallele, il faudra trouver dans le premier rang perpendiculaire, le coëficient du terme dont le quantiéme eſt $m+1$; dans le deuxiéme, le coëficient du terme dont le quantiéme eſt $m+1-2$ ou $m-1$; dans le troiſiéme, le coëficient du terme dont le quantiéme eſt $m-1-2$ ou $m-3$, & ainſi de ſuite en diminuant toûjours de 2 le quantiéme du terme, à meſure que le rang perpendiculaire avance vers la droite. Il faudra donc ſelon la regle de l'article 470. mettre dans le ſecond terme $\frac{n+1}{1}$ à la place de n le nombre $m-1$; dans le troiſiéme terme $\frac{n+3}{2} \times \frac{n}{1}$ à la place de n le nombre $m-3$, dans le quatriéme terme $\frac{n+5}{3} \times \frac{n+1}{2}$ à la place de n le nombre $m-5$; dans le cinquiéme $\frac{n+7}{4} \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3}$ à la place de n le nombre $m-7$; &c: ce qui donnera pour la ſuite des coëficiens 1, m, $\frac{m}{2} \times \frac{m-3}{1}$, $\frac{m}{3} \times \frac{m-5}{1} \times \frac{m-4}{2}$, $\frac{m}{4} \times \frac{m-7}{1} \times \frac{m-6}{2} \times \frac{m-5}{3}$, &c. Or comme les ſignes des termes d'un rang parallele quelconque de la Table ſont toûjours alternatifs; & que le premier terme eſt toûjours l'inconnuë x élevée à une puiſſance dont l'expoſant eſt moindre d'une unité que celui du rang parallele; & que tous les autres termes renferment des puiſſances de x dont les expoſans diminuent continuellement de 2, en obſervant que $x^0 = 1$: il s'enſuit qu'on aura $x^m - m x^{m-2} + \frac{m}{2} \times \frac{m-3}{1} x^{m-4} - \frac{m}{3} \times \frac{m-5}{1} \times \frac{m-4}{2} x^{m-6} + \frac{m}{4} \times \frac{m-7}{1} \times \frac{m-6}{2} \times \frac{m-5}{3} x^{m-8}$ &c, pour l'expreſſion generale du rang parallele de la Table, dont l'expoſant eſt $m+1$. Ce qui étoit propoſé.

Lorſqu'on a les premiers termes de ces ſortes de ſuites, il eſt facile d'obſerver la loy qui y regne par tout,

& qui ſert à les continuer autant que l'on veut. Si l'on ſuppoſe, par exemple, dans celle-ci, que r exprime le quantieme du terme dont on veut avoir le coëficient; il ſera exprimé par la fraction generale $\frac{m \times m-r \times m-r-1 \times m-r-2 \ \&c.}{r-1 \times r-2 \times r-3 \times r-4 \ \&c.}$, en obſervant que le numerateur & le denominateur doivent avoir chacun autant de termes, que le nombre $r-1$ contient d'unités. Ainſi ſi $r=5$, on aura pour le coëficient du cinquiéme terme, la fraction $\frac{m \times m-1 \times m-2 \times m-3}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$: ſi $r=4$, on aura $\frac{m \times m-1 \times m-2}{3 \times 2 \times 1}$.

Il faut remarquer que le nombre des termes de cette ſuite eſt toûjours determiné, de ſorte qu'il eſt égal à la plus grande moitié de l'expoſant du rang parallele qu'elle exprime, lorſque cet expoſant eſt impair, & à ſa moitié au juſte lorſqu'il eſt pair. Ainſi elle n'a que trois termes, lorſqu'elle exprime le cinquiéme ou le ſixiéme rang parallele, elle n'en a que quatre, lorſqu'elle exprime le ſeptiéme ou le huitiéme rang parallele, &c.

PROBLESME II.

474. SOIT *propoſé de trouver une ſuite generale qui exprime par ordre tous les termes de tel rang parallele qu'on voudra, de la Table de l'inſcription des poligones reguliers de l'article* 457.

Comme le ſecond terme de chaque rang perpendiculaire répond au premier de celui qui eſt à droit, il s'enſuit * que ſi $m+1$ eſt l'expoſant d'un rang parallele quelconque de cette Table, les coëficiens des quatre premiers termes de ce rang ſeront 1, 1, $m-1$, $m-2$; le coëficient du cinquiéme terme ſera le nombre triangulaire dont le quantiéme eſt $m-3$, c'eſt à dire * $\frac{m-3}{1} \times \frac{m-2}{2}$; celui du ſixiéme rang ſera le nombre triangulaire dont le quantiéme eſt $m-4$, c'eſt à dire $\frac{m-4}{1} \times \frac{m-3}{2}$; celui du ſeptiéme terme ſera le nombre piramidal

* *Art.* 458.

* *Art.* 472.

midal dont le quantiéme eſt $m-5$, c'eſt-à dire $\frac{m-5}{1} \times \frac{m-4}{2} \times \frac{m-3}{3}$; celui du huitiéme terme ſera le nombre piramidal dont le quantiéme eſt $m-6$, c'eſt-à-dire, $\frac{m-6}{1} \times \frac{m-5}{2} \times \frac{m-4}{3}$; celui du neuviéme terme ſera le nombre du cinquiéme ordre dont le quantiéme eſt $m-7$, c'eſt-à-dire $\frac{m-7}{1} \times \frac{m-6}{2} \times \frac{m-5}{3} \times \frac{m-4}{4}$; & ainſi à l'infini. Si donc l'on joint à ces coëficiens les puiſſances de z qu'ils affectent, en faiſant preceder le ſecond & le troiſieme terme du ſigne —, le quatriéme & le cinquiéme du ſigne +, le ſixiéme & le ſeptiéme du ſigne —, & ainſi alternativement de deux en deux; on aura cette ſuite generale $z^m - z^{m-1} - m-1\, z^{m-2} + m-2\, z^{m-3} + \frac{m-3}{1} \times \frac{m-2}{2} z^{m-4} - \frac{m-4}{1} \times \frac{m-3}{2} z^{m-5} - \frac{m-5}{1} \times \frac{m-4}{2} \times \frac{m-3}{3} z^{m-6} + \frac{m-6}{1} \times \frac{m-5}{2} \times \frac{m-4}{3} z^{m-7} + \frac{m-7}{1} \times \frac{m-6}{2} \times \frac{m-5}{3} \times \frac{m-4}{4} z^{m-8}$ &c, qui exprime par ordre tous les termes du rang parallele de la Table de l'article 457 dont l'expoſant eſt $m+1$: où l'on doit obſerver de ne prendre qu'autant de termes que le nombre $m+1$ contient d'unités.

PROBLESME III.

475. TROUVER *une ſuite generale, qui exprime par ordre, les coëficiens de tous les termes, de tel rang parallele qu'on voudra, de la Table de l'article* 460; *ou* (*ce qui eſt la même choſe*) *d'une puiſſance quelconque du binome* $x+y$.

Soit en general m l'expoſant d'un rang parallele quelconque de cette Table, il eſt clair que les coëficiens dès deux premiers termes de ce rang ſeront toûjours * 1, m; comme le ſecond terme de chaque rang perpendiculaire à commencer par le ſecond, répond au premier terme du rang qui eſt à droit, il s'enſuit que le coëficient du troiſieme terme du rang parallele ſera *

* *Art.* 462.

* *Art.* 462.

le nombre triangulaire dont le quantiéme eſt $m-1$, c'eſt-à-dire $\frac{m-1}{1} \times \frac{m}{2}$; que celui du quatriéme terme ſera le nombre piramidal dont le quantiéme eſt $m-2$, c'eſt à dire $\frac{m-2}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m}{3}$; que celui du cinquiéme terme ſera le nombre du cinquiéme ordre dont le quantiéme eſt $m-3$, c'eſt-à-dire $\frac{m-3}{1} \times \frac{m-2}{2} \times \frac{m-1}{3} \times \frac{m}{4}$; & ainſi à l'infini. On aura donc pour la ſuite generale qu'on demande 1, m, $\frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2}$, $\frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3}$, $\frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4}$ &c.

*Art. 472.

COROLLAIRE.

476. DE-LA il ſuit que $x \mp y^m = x^m \mp \frac{m}{1} y x^{m-1} + \frac{m \times m-1}{1 \times 2} y y x^{m-2} \mp \frac{m \times m-1 \times m-2}{1 \times 2 \times 3} y^3 x^{m-3} \ldots + \frac{m \times m-1 \times m-2 \times m-3}{1 \times 2 \times 3 \times 4} y^4 x^{m-4} \mp \frac{m \times m-1 \times m-2 \times m-3 \times m-4}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} y^5 x^{m-5}$ &c.

PROBLESME IV.

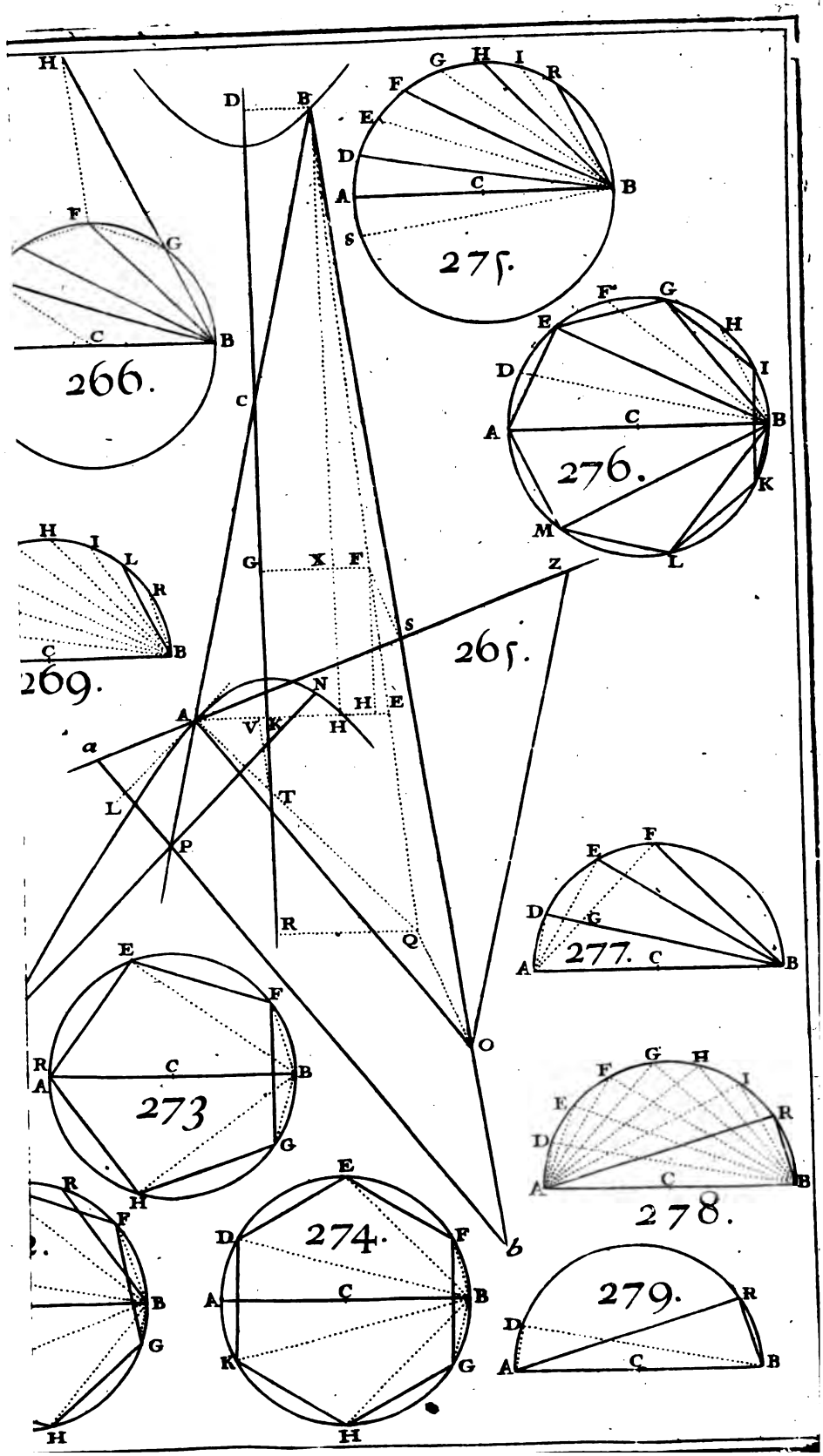
477. TROUVER *une équation generale qui ſerve à diviſer un arc de cercle donné* AR, *en autant de parties égales qu'on voudra.*

PREMIERE MANIE'RE.

FIG. 279. Soit en general m le nombre des parties égales, l'arc AD la premiere de ces parties ; ſoit tiré le diametre AB, & les cordes BD, BR ; & ſoit le rayon CA ou $CB = 1$, la corde donnée $BR = a$, la corde cherchée $BD = x$. On aura $\mp a = x^m - mx^{m-2} + \frac{m \times m-3}{2 \times 1} x^{m-4} - \frac{m \times m-5 \times m-4}{3 \times 1 \times 2} x^{m-6} + \frac{m \times m-7 \times m-6 \times m-5}{4 \times 1 \times 2 \times 3} x^{m-8}$ &c,

*Art. 444. 473.

(ſçavoir $+a$ lorſque l'arc donné AR eſt moindre que la demie circonference, & $-a$ lorſqu'il eſt plus grand)



275.
276.
266.
269.
265.
277.
273
278.
274.
279.

pour l'équation generale qu'on demande ; de laquelle il ne faut prendre qu'autant de termes, que la moitié du nombre m lorſqu'il eſt pair, ou ſa plus grande moitié lorſqu'il eſt impair contient d'unités ; parce que le terme qui ſuivroit ſeroit nul ou zero.

Si $m = 5$, il vient $\overline{+}\, a = x^5 - 5x^3 + 5x$; ſi $m = 7$, on trouve $\overline{+}\, a = x^7 - 7x^5 + 14x^3 - 7x$.

SECONDE MANIE'RE.

Soit tiré le diametre AB, & les cordes BR, AR, BD, AD, qui terminent l'arc donné AR, & l'arc cherché AD. Soit m le nombre des parties égales, le diametre $AB = 1$, les cordes données $BR = a$, $AR = b$; & les cordes inconnuës $BD = x$, $AD = y$. On aura * ces deux égalités generales $\overline{+}\, a = x^m - \frac{m \times m-1}{1 \times 2} y^2 x^{m-2} + \frac{m \times m-1 \times m-2 \times m-3}{1 \times 2 \times 3 \times 4} y^4 x^{m-4}$ &c, * *Art.* 463. 475.

$b = \frac{m}{1} y x^{m-1} - \frac{m \times m-1 \times m-2}{1 \times 2 \times 3} y^3 x^{m-3} + \ldots$

$\frac{m \times m-1 \times m-2 \times m-3 \times m-4}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} y^5 x^{m-5}$ &c, dans leſquelles mettant à la place de m, le nombre de parties égales dans leſquelles l'arc AR doit être diviſé, il en vient deux autres particulieres, dont la reſolution fournit la valeur cherchée de la corde BD (x) ou AD (y), après avoir fait évanoüir l'inconnuë y ou x, par le moyen de l'équation $yy = 1 - xx$ ou $xx = 1 - yy$.

Soit par exemple $m = 7$. On aura $\overline{+}\, a = x^7 - 21yyx^5 + 35y^4x^3 - 7y^6x$, & $b = 7yx^6 - 35y^3x^4 + 21y^5xx - y^7$, & l'on achevera le reſte comme dans l'article 462.

PROBLESME V.

478. TROUVER *une équation generale, qui ſerve à inſcrire dans un cercle donné, un poligone regulier quelconque* ADEFGHK &c. FIG. 280.

Soit tiré le diametre AB, & la corde BD qui terminent le premier côté du poligone ; ſoit le rayon

donné CA ou $CB = 1$, la corde inconnuë $BD = z$, & en general m la plus petite moitié du nombre des côtés du poligone, que je ſuppoſe être impair. On aura * $o = z^m - z^{m-1} - \frac{m-1}{1} z^{m-2} + \frac{m-2}{2} z^{m-3} + \frac{m-3}{1} \times \frac{m-2}{2} z^{m-4} - \frac{m-4}{1} \times \frac{m-3}{3} z^{m-5} - \frac{m-5}{1} \times \frac{m-4}{2} \times \frac{m-3}{3} z^{m-6} + \frac{m-6}{1} \times \frac{m-5}{2} \times \frac{m-4}{3} z^{m-7} + \frac{m-7}{4} \times \frac{m-6}{2} \times \frac{m-5}{3} \times \frac{m-4}{4} z^{m-8}$ &c, pour l'équation generale qu'on demande ; de laquelle il ne faut prendre qu'autant de termes que le nombre $m + 1$ contient d'unités, parce que celui qui ſuivroit ſeroit nul ou zero.

* *Art.* 457. 474.

Soit par exemple 7 le nombre des côtés du poligone à inſcrire, on aura $m = 3$; & partant $o = z^3 - zz - 2z + 1$, dont la plus grande racine z exprimera la corde BD, qui termine l'arc AD, qui a pour corde le premier côté AD du poligone. De même ſi le nombre des côtés eſt 11, on aura $m = 5$; & par conſequent l'équation generale devient $o = z^5 - z^4 - 4z^3 + 3zz + 3z - 1$, dont la plus grande des racines eſt $z = BD$.

PROBLESME VI.

FIG. 281. 282.

479. DIVISER *un angle donné en un nombre quelconque impair de parties égales, par le moyen d'un inſtrument.*

1°. Soit propoſé de diviſer l'angle donné ECF en trois parties égales. Il faut avoir un rhombe $ABCD$, dont les quatre côtés ſoient mobiles autour de ſes quatre angles, & duquel les deux côtés AB, AD, ſoient indéfiniment prolongés vers X & Z ; attacher l'angle C du rhombe, dans le ſommet C de l'angle donné ECF ; marquer ſur les côtés CE, CF, les points E, F, en ſorte que CE & CF ſoient égales chacune au côté CB ou CD ou DA ou AB du rhombe. Cela fait, il faut ouvrir ou reſſerrer les côtés AX, AZ, de l'angle BAD, en ſorte qu'ils paſſent par les points E, F ; &

l'angle BAD ſera la troiſiéme partie de l'angle ECF.

Car les triangles ABC, BCE, étant iſoſcelles, l'angle externe CBE ou ſon égal CEB, qui vaut les deux internes oppoſés BAC, BCA, ſera double de l'angle BAC; & dans le triangle ECA, l'angle externe ECY, qui vaut l'angle CEA plus l'angle BAC, ſera triple de l'angle BAC. On démontrera de même que l'angle FCY eſt triple de l'angle DAC. D'où il ſuit que l'angle donné ECF eſt triple de l'angle BAD. *Ce qu'il falloit &c.*

2°. Soit propoſé de diviſer l'angle donné HGK, en cinq parties égales. On attachera dans l'angle C du rhombe $ABCD$ de l'inſtrument precedent, un autre rhombe $CEGF$, dont les côtés ſeront égaux à ceux du premier & mobiles auſſi autour de leurs angles. On fichera l'angle G de ce dernier rhombe, dans le ſommet G de l'angle donné HGK; & ayant pris ſur les côtés de cet angle les parties GH, GK, égales chacune au côté GE de l'un des rhombes, on ouvrira ou fermera l'angle XAZ mobile autour du point A, en ſorte que ſes côtés AX, AZ, touchent les angles E, F, & paſſent en même temps par les points marqués H, K. Je dis que l'angle XAZ ou BAD ſera la cinquiéme partie cherchée de l'angle donné HGK. FIG. 283. 284.

Car ayant mené dans le rhombe $ABCD$ la diagonale AC, prolongée indéfiniment vers Y; elle paſſera par le point G, puiſque les angles ECY, FCY, étant triples des angles égaux BAC, DAC, ſeront auſſi égaux entr'eux. Or dans le triangle EGA, l'angle externe HEG, qui vaut les deux internes oppoſés BAC, EGA, ou ECY (à cauſe du triangle iſoſcelle CEG) ſera quadruple de l'angle BAC. Et partant dans le triangle AHG, l'angle externe HGY, qui vaut les deux internes oppoſés BAC, GHA ou GEH (à cauſe du triangle iſoſcelle EGH) ſera le quintuple de l'angle BAC. On prouvera de même que l'angle KGY ſera quintuple de l'angle DAC; d'où il eſt évident

que l'angle entier HGK ſera quintuple de l'angle entier BAD ou XAZ.

S'il falloit diviſer un angle donné en ſept parties égales, il n'y aura qu'à joindre aux deux rhombes precedens, un troiſiéme rhombe égal & conſtruit de la même maniere; & ainſi de ſuite de deux en deux. Car la pratique & la démonſtration ſe fera toûjours de la même maniere.

EXEMPLE.

480. TROUVER entre deux lignes données a & b, autant de moyennes proportionnelles qu'on voudra.

Soit l'inconnuë x la premiere des moyennes proportionnelles qu'il eſt queſtion de trouver; & l'on aura la progreſſion geometrique continuë $a, x, \frac{xx}{a}, \frac{x^3}{aa}, \frac{x^4}{a^3}, \frac{x^5}{a^4}$ &c, de laquelle on prendra le terme dont le quantiéme ſurpaſſe de 2 le nombre donné des moyennes proportionnelles, & l'égalant à la donnée b on formera une égalité, dont la reſolution fournira la valeur de l'inconnuë x qui eſt la premiere des moyennes proportionnelles que l'on cherche.

Qu'il faille, par exemple, trouver deux moyennes proportionnelles. On prendra dans la progreſſion geometrique le quatriéme terme $\frac{x^3}{aa}$, qui étant égalé à la ligne b, donne $x^3 = aab$; & de même ſi l'on demande quatre moyennes proportionnelles, l'on aura $x^5 = a^4b$. D'où il eſt facile de voir que ſi n marque en general le nombre des moyennes proportionnelles qu'il faut trouver entre les données a & b, on aura $x^{n+1} = a^nb$ pour l'egalité generale qu'il faut reſoudre. Or cela poſé.

Soit 1°. $x^{17} = a^{16}b$ qui ſert à trouver ſeize moyennes proportionnelles. Je multiplie les deux membres de cette égalité par x^3, afin d'avoir $x^{20} = a^{16}bx^3$, dont la plus haute dimenſion 20 eſt le produit des deux nombres 4 & 5 qui ſe ſuivent immediatement. Je prends l'é-

quation $x^5 = a^4 y$; ce qui donne en élevant chaque membre à la puiſſance quatriéme $x^{20} = a^{16} y^4 = a^{16} b x^5$, d'où je tire une autre équation $y^4 = b x^5$, dont le lieu étant conſtruit ſeparément, donnera par ſon interſection avec celui de la ſuppoſée $x^5 = a^4 y$, la valeur de l'inconnuë x. Ou bien je prends l'équation $x^4 = a^3 y$, dont j'éleve chaque membre à la quatriéme puiſſance ; & les multipliant enſuite par x, j'ai $x^{17} = a^{12} y^4 x = a^{16} b$, d'où je tire $y^4 x = a^4 b$, dont le lieu étant conſtruit ſeparément avec celui de l'équation $x^4 = a^3 y$, donnera par ſon interſection la valeur cherchée de l'inconnuë x.

Soit 2°. $x^{11} = a^{10} b$ qui ſert à trouver trente moyennes proportionnelles. Je multiplie de part & d'autre par x^5, afin d'avoir $x^{16} = a^{10} b x^5$, dont la plus haute dimenſion 36 eſt le quarré de 6 : c'eſt pourquoi faiſant $x^6 = a^5 y$, & prenant de part & d'autre la ſixiéme puiſſance, j'ai $x^{36} = a^{30} y^6 = a^{30} b y^5$, d'où je tire $x^6 = b y^5$, dont le lieu étant conſtruit ſeparément avec celui de l'équation que j'ai priſe d'abord $x^6 = a^5 y$, donnera par ſon interſection la valeur de l'inconnuë x. Ou bien ayant pris comme ci-deſſus l'équation $x^6 = a^5 y$, je l'éleve à la cinquiéme puiſſance, & la multipliant enſuite par x, j'ai $x^{31} = a^{25} y^5 x = a^{30} b$, ce qui donne $y^5 x = a^5 b$. D'où l'on voit que le lieu de l'équation $x^6 = a^5 y$, étant conſtruit ſeparément avec le lieu de l'autre équation $y^5 x = a^5 b$, donnera la reſolution de l'égalité propoſée $x^{31} = a^{30} b$; de ſorte que l'on peut choiſir entre les deux lieux $y^6 x = b x^5$, ou $y^5 x = a^5 b$, celui qu'on jugera le plus ſimple. Il en eſt ainſi de tous les autres exemples qu'on peut ſe former à plaiſir.

Il eſt à remarquer que ſi la dimenſion de l'inconnuë x n'étoit pas un nombre premier, l'égalité propoſée ſe pourroit toûjours abaiſſer. Si l'on avoit, par exemple, $x^9 = a^8 b$, qui ſert à trouver huit moyennes proportionnelles ; on trouveroit en extrayant de part & d'autre la racine cubique $x^3 = \sqrt[3]{a^8 b}$. Or afin que le nombre $a^8 b$ ſoit un cube, il n'y a qu'à trouver une ligne z dont le

cube $z^3 = aab$, ou ce qui eſt la même choſe de trouver entre a & b deux moyennes proportionnelles ; car mettant à la place de aab ſa valeur z^3, on aura $x^9 = a^6 z^3$ ou $x^3 = a^2 z$, de ſorte qu'en reſolvant ces deux égalités $z^3 = aab$, & enſuite $x^3 = aaz$ qui ne ſont que du troiſiéme degré, on trouvera la valeur de l'inconnuë x, qui eſt la premiere des huit moyennes proportionnelles entre les extrêmes a & b. De même ſi l'on avoit $x^{14} = a^{11} b$ qui ſert à trouver treize moyennes proportionnelles, il viendroit en extrayant de part & d'autre la racine quarrée $x^7 = \sqrt{a^{11} b}$. Or afin que $\sqrt{a^{11} b}$ ſoit un quarre, il faut trouver une ligne z dont le quarré $zz = ab$; car ſubſtituant à la place de ab, le quarré zz dans l'égalité propoſée, on aura $x^{14} = a^{12} zz$ ou $x^7 = a^6 z$; c'eſt pourquoi il n'y aura qu'à reſoudre d'abord l'egalité du ſecond degré $zz = ab$, & enſuite celle du ſeptiéme $x^7 = a^6 z$.

On doit encore remarquer que ces ſortes d'égalités qui ſervent à trouver des moyennes proportionnelles, & dont la dimenſion de l'inconnuë eſt un nombre premier, n'ont qu'une racine réelle & toutes les autres imaginaires ; dont la raiſon eſt qu'il ne peut y avoir qu'une ſeule ligne qui ſoit la premiere des moyennes proportionnelles cherchées.

REMARQUE.

FIG. 285. 481. ON peut reſoudre le Problême precedent par le moyen d'un inſtrument geometrique dont la conſtruction eſt telle. Soient deux lignes indéfinies XY, YZ, mobiles autour du point Y, en ſorte qu'elles ſe puiſſent ouvrir & fermer. Soit attachée au point quelconque fixe B du côté YX, une perpendiculaire indéfinie BC ſur ce côté, laquelle chaſſe devant elle (pendant que l'angle XYZ s'ouvre) par le point C où elle rencontre l'autre côté YZ, la perpendiculaire indéfinie CD ſur ce dernier côté ; qui chaſſe de même par

par le point D où elle rencontre le côté YX, la perpendiculaire indéfinie DE; qui chaſſe encore de même par le point E où elle rencontre le côté YZ, la perpendiculaire indéfinie EF; qui chaſſera par le point F où elle rencontre le côté YX, la perpendiculaire FG; qui chaſſe encore par le point G où elle rencontre le côté YZ, la perpendiculaire GH; & ainſi de ſuite à l'infini, en augmentant autant que l'on voudra le nombre des perpendiculaires ſur les côtés YX & YZ. Cela fait, ſoit propoſé, par exemple, de trouver quatre moyennes proportionnelles entre les deux lignes droites données a & b. Ayant pris ſur le côté YZ la partie YG quatriéme proportionnelle aux trois lignes a, b, YB, on ouvrira le côté XY de l'inſtrument, juſqu'à ce que la cinquiéme perpendiculaire FG (parce qu'il eſt queſtion de trouver quatre moyennes proportionnelles) paſſe par le point G; & alors les lignes YC, YD, YE, YF, ſeront les quatre moyennes proportionnelles entre les extrêmes YB, YG; & partant la quatriéme proportionnelles aux trois lignes YB, YC, a ſera la premiere des quatre moyennes proportionnelles demandées.

Car les triangles rectangles YBC, YCD, YDE, YEF, YFG, étant tous ſemblables; leurs côtés YB, YC, YD, YE, YF, YG, ſeront en progreſſion geometrique continuë. Donc &c.

Il eſt clair que pendant que l'angle XYZ s'ouvre de plus en plus, le point B décrit un arc de cercle AB; & que les interſections continuelles D, F, H, des perpendiculaires CD, EF, GH, ſur le côté YZ, avec l'autre côté YX, décrivent des lignes courbes AD, AF, AH, qui ſervent à trouver autant de moyennes proportionnelles qu'on voudra. Car ſi l'on décrit, par exemple, du diametre YE un demi cercle, il coupera la courbe AD en un point D, tel que YD eſt la ſeconde des deux moyennes proportionnelles, entre les ex-

trêmes γB ou γA & γE ; & de même ſi l'on décrit un demi cercle du diametre γG, il coupera la ligne courbe AF en un point F, tel que γF eſt la derniere des quatre moyennes proportionnelles entre γA & γG &c. Sur quoi il eſt à propos de remarquer que la ligne courbe AD eſt du quatriéme degré ; la ligne courbe AF du huitiéme ; la courbe AH du ſeiziéme, &c ; ce que je prouve ainſi.

Soient 1°. les inconnuës & indéterminées $\gamma C = x$, $CD = y$, $\gamma D = z$, & la connuë γA ou $\gamma B = a$, on aura à cauſe des triangles rectangles ſemblables γCD, γBC, cette équation $\gamma B\ (a) = \frac{xx}{z}$, & à cauſe du triangle rectangle γCD cette autre $yy + xx = zz$, dans laquelle mettant à la place de z ſa valeur $\frac{xx}{a}$ trouvée par le moyen de la premiere équation, il vient $aayy = x^4 - aaxx$; ce qui fait voir que la courbe AD eſt un lieu du quatriéme degré. Soient 2°. les inconnuës & indéterminées $\gamma E = x$, $EF = y$, $\gamma F = z$, & la connuë γA ou $\gamma B = a$; on aura à cauſe des triangles rectangles ſemblables γFE, γED, γDC, γCB, cette équation $\gamma B\ (a) = \frac{x^4}{z^3}$, & à cauſe du triangle rectangle γEF cette autre $yy + xx = zz$, dans laquelle faiſant évanoüir l'inconnuë z par le moyen de la premiere équation, & ôtant les incommenſurables, on trouve $aay^6 + 3aaxxy^4 + 3aax^4yy + aax^6 = x^8$; d'où l'on voit que la courbe AF eſt un lieu du huitiéme degré. On prouvera de même que la courbe AH eſt un lieu du ſeiziéme degré, &c.

Maintenant puiſque ſelon l'exemple on peut trouver deux moyennes proportionnelles, en n'employant que deux lignes du ſecond degré ; quatre moyennes proportionnelles, en ſe ſervant du lieu du ſecond degré, & d'un autre du troiſiéme ; au lieu qu'ici il faut dans le premier cas un lieu du quatriéme, qui

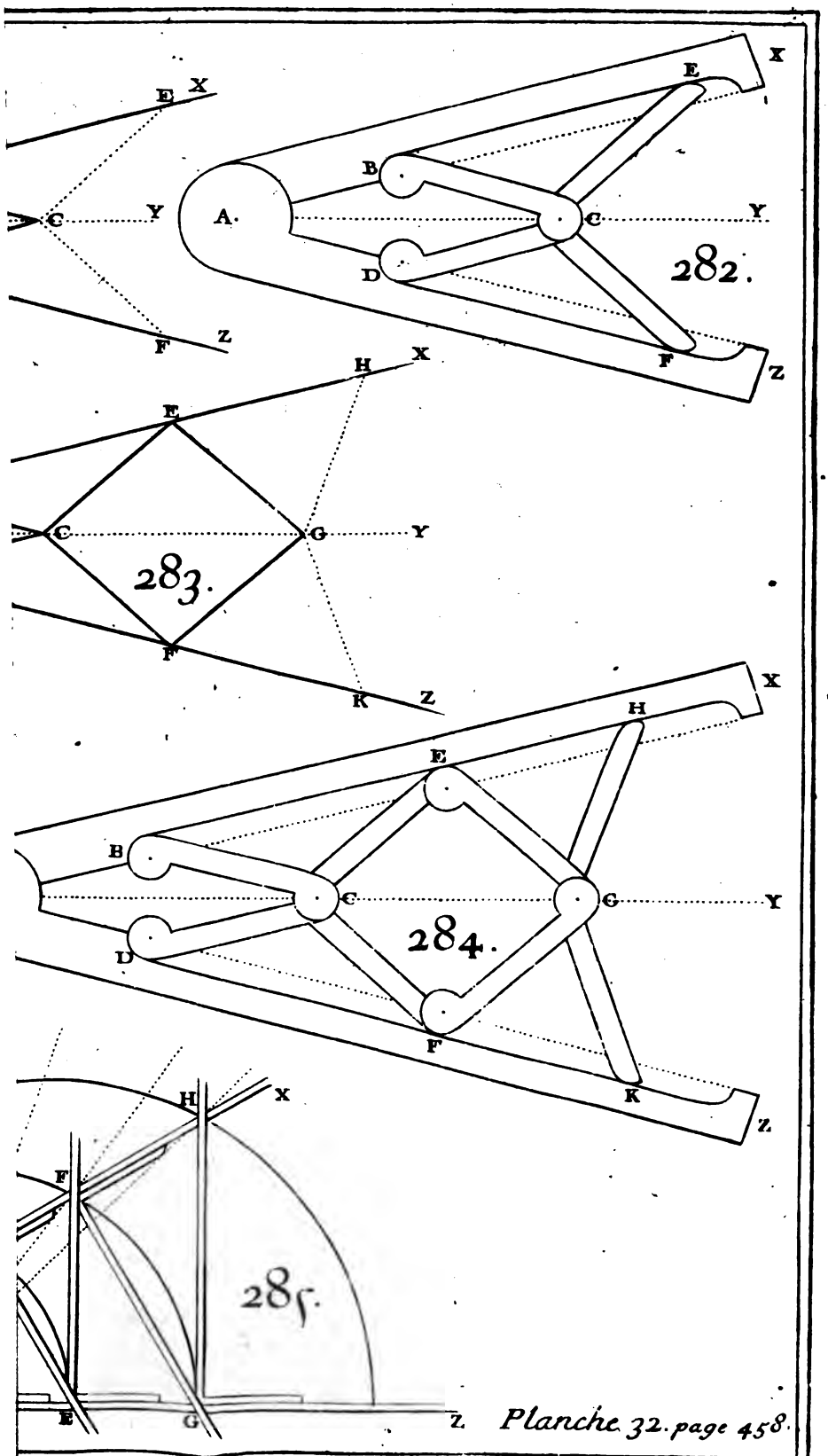
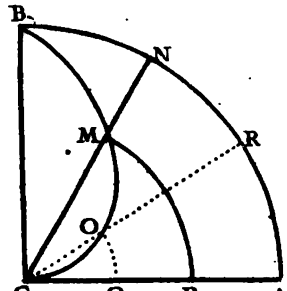
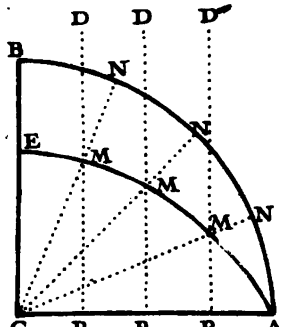


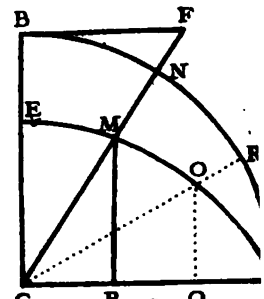
Planche 32. page 458.



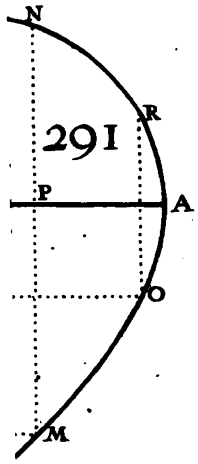
287



288

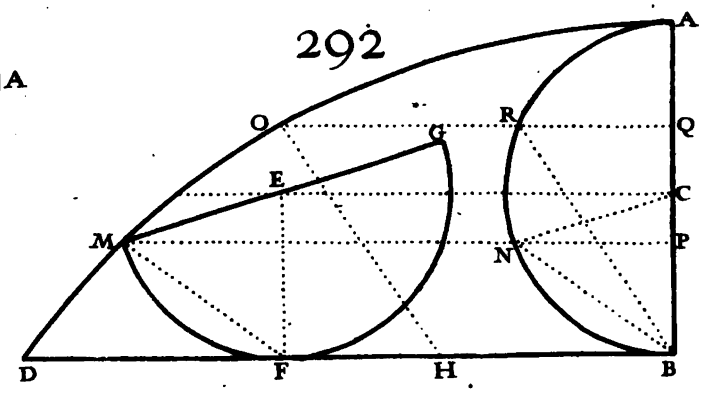


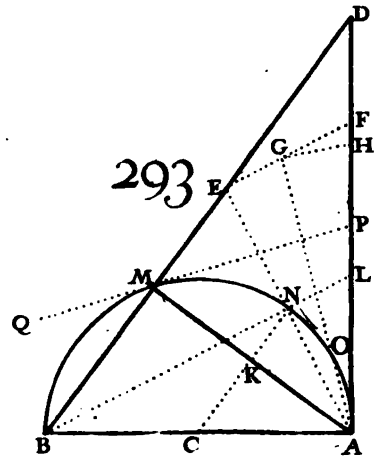
289



291

292





293

eſt la ligne AD, & un lieu du ſecond qui eſt le cercle YDE; & dans le ſecond un lieu du huitiéme, ſçavoir: la ligne courbe AF, & un lieu du ſecond, ſçavoir le cercle YFG: il s'enſuit que ces lignes courbes AD, AF, AH, ſont beaucoup trop compoſées pour reſoudre ce Problême. Cependant la facilité de la conſtruction & de la démonſtration, récompenſe en quelque ſorte ce défaut.

FIN.

PRIVILEGE DU ROY.

LOUIS PAR LA GRACE DE DIEU ROY DE FRANCE ET DE NAVARRE : A nos amez & feaux Conſeillers les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de nôtre Hôtel, Grand-Conſeil, Prevôt de Paris, Baillifs, Senechaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Juſticiers qu'il appartiendra : SALUT. Nôtre Academie Royale des Sciences Nous ayant trés-humblement fait expoſer, que depuis qu'il Nous a plû luy donner par un Reglement nouveau de nouvelles marques de nôtre affection, Elle s'eſt appliquée avec plus de ſoin à cultiver les Sciences qui font l'objet de ſes exercices ; en ſorte qu'outre les Ouvrages qu'elle a déja donnez au public, Elle ſeroit en état d'en produire encore d'autres, s'il Nous plaiſoit luy accorder de nouvelles Lettres de Privilege, attendu que celles que Nous luy avons accordées en date du 6. Avril 1699. n'ayant point de tems limité, ont été déclarées nulles par un Arrêt de nôtre Conſeil d'Etat du 13. du mois d'Aouſt dernier. Et deſirant donner à ladite Academie en corps, & en particulier à chacun de ceux qui la compoſent, toutes les facilitez & les moyens qui peuvent contribuer à rendre leurs travaux utiles au public ; Nous avons permis & permettons par ces Preſentes à ladite Academie, de faire imprimer, vendre & debiter dans tous les lieux de nôtre Obéïſſance, par tel Imprimeur qu'Elle voudra choiſir, en telle forme, marge, caractere, & autant de fois que bon luy ſemblera : *Toutes les Recherches ou Obſervations journalieres, & Relations annuelles de tout ce qui aura été fait dans les Aſſemblées de l'Academie Royale des Sciences* ; comme auſſi *les Ouvrages, Memoires ou Traitez de chacun des Particuliers qui la compoſent*, & generalement tout ce que ladite Academie voudra faire paroître ſous ſon nom, lorſqu'aprés avoir examiné & approuvé leſdits Ouvrages aux termes de l'article XXX. dudit Reglement, elle les jugera dignes d'être imprimez : & ce pendant le tems de dix années conſecutives, à compter du jour de la date deſdites Preſentes. Faiſons trés-expreſſes défenſes à tous Imprimeurs, Libraires, & à toutes ſortes de perſonnes de quelque qualité & condition que ce ſoit, d'imprimer, faire imprimer en tout ni en partie, aucun des Ouvrages imprimez par l'Imprimeur de ladite Academie ; comme auſſi d'en introduire, vendre & debiter d'impreſſion étrangere dans nôtre Royaume ſans le conſentement par écrit de ladite Academie ou de ſes ayans cauſe, à peine contre chacun des contrevenans de confiſcation des Exemplaires contrefaits au profit de ſon-

dit Imprimeur, de trois mille livres d'amende, dont un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, un tiers audit Imprimeur, & l'autre tiers au Dénonciateur, & de tous dépens, dommages & interêts : à condition que ces Preſentes ſeront enregiſtrées tout au long ſur le Regiſtre de la Communauté des Imprimeurs-Libraires de Paris, & ce dans trois mois de ce jour ; Que l'impreſſion de chacun deſdits Ouvrages ſera faite dans nôtre Royaume & non ailleurs, & ce en bon papier & en beaux caracteres, conformément aux Reglemens de la Librairie ; & qu'avant que de les expoſer en vente il en ſera mis de chacun deux Exemplaires dans nôtre Bibliotheque publique, un dans celle de nôtre Château du Louvre, & un dans celle de nôtre trés-cher & feal Chevalier Chancelier de France le Sieur Phelyppeaux Comte de Pontchartrain, Commandeur de nos Ordres, le tout à peine de nullité des Preſentes ; du contenu deſquelles Vous mandons & enjoignons de faire joüir ladite Academie ou ſes ayans cauſe pleinement & paiſiblement, ſans ſouffrir qu'il leur ſoit fait aucun trouble ou empêchemens. Voulons que la copie deſdites Preſentes qui ſera imprimée au commencement ou à la fin deſdits Ouvrages ſoit tenuë pour dûëment ſignifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amez & feaux Conſeillers & Secretaires foy ſoit ajoûtée comme à l'original : Commandons au premier nôtre Huiſſier ou Sergent de faire pour l'execution d'icelles tous actes requis & neceſſaires ſans autre permiſſion, & nonobſtant Clameur de Haro, Chartre Normande & Lettres à ce contraires : CAR tel eſt nôtre plaiſir. DONNE à Verſailles le neuviéme jour de Fevrier, l'an de grace mil ſept cens quatre, & de nôtre Regne le ſoixante & uniéme. Par le Roy en ſon Conſeil, LE COMTE.

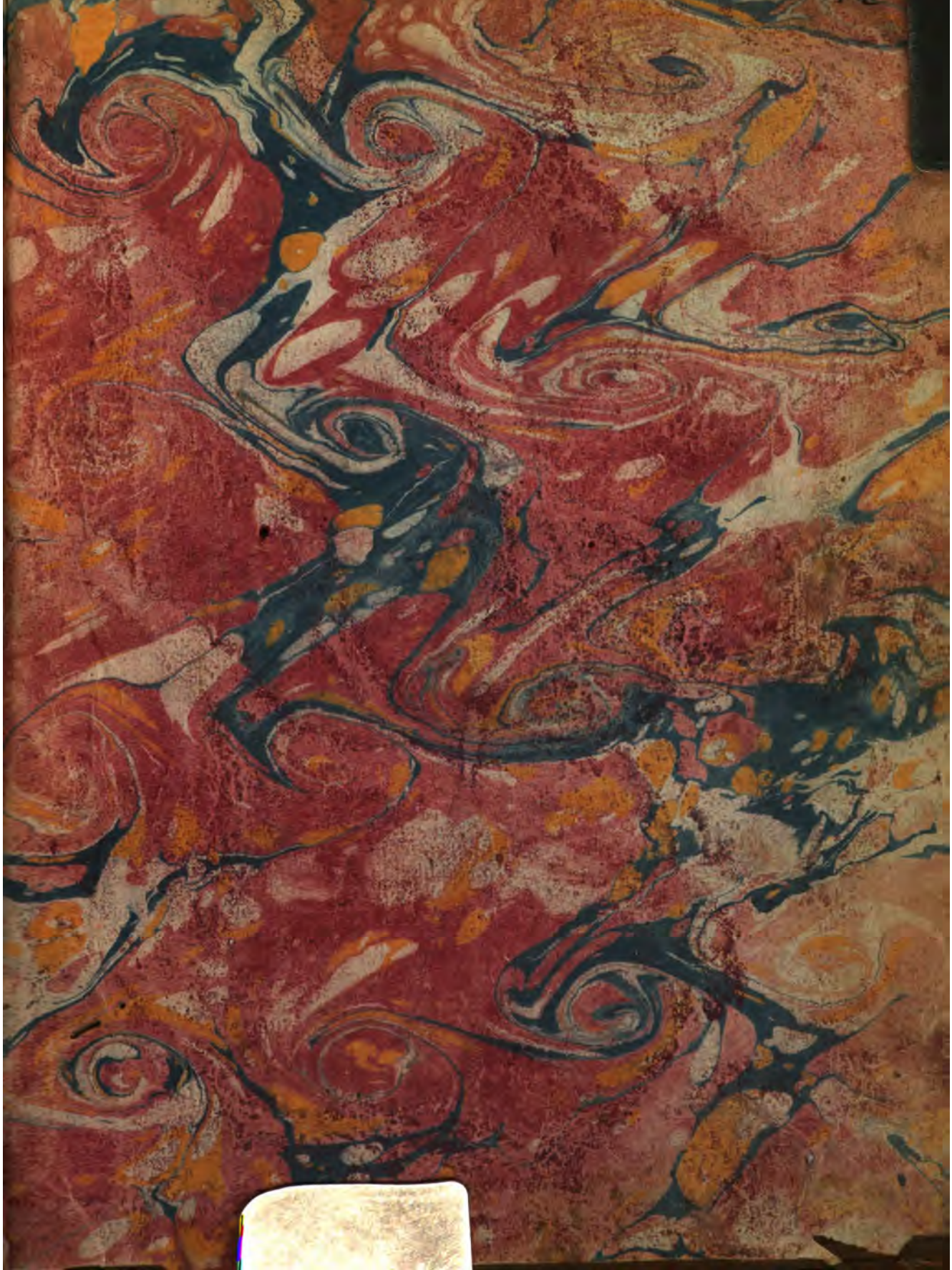
L'Academie Royale des Sciences par Déliberation du 13. Fevrier 1704. a cedé le preſent Privilege à JEAN BOUDOT ſon Libraire, pour en joüir conformément au Traité fait par l'Academie avec ledit Boudot le 13. Juillet 1699. En foy de quoy j'ay ſigné, à Paris ce 15. Fevrier 1704.

FONTENELLE, *Secretaire de l'Academie Royale des Sciences.*

Regiſtré ſur le Livre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, Numero CVI, *page* 136. *conformément aux Reglemens, & notamment à l'Arreſt du Conſeil du* 13. *Aouſt dernier. A Paris, ce* 13. *Fevrier* 1704.

P. EMERY, *Syndic.*

Je ſous-ſigné, en conformité du Traité fait avec M. Hochereau,

le 25 Aouſt dernier, qui avoit acquis du Sieur Boudot, Libraire de l'Academie, le droit du Privilege des Sections Coniques de M. le Marquis de l'Hôpital ; de même encore que l'Agrement du Sieur Rigaud pour la joüiſſance dudit Privilege : déclare & reconnois tout ce que deſſus avoir cedé cejourd'hui au Sieur Montalant, que je ſubſtituë en mon lieu & prerogatives, moyennant l'accord fait entre nous, à Paris ce treiziéme Novembre mil ſept cens dix-neuf.

C. JOMBERT.